BACCALAUREAT
SESSION 2008

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : C

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1) et (C ; –1). Pour la figure prendre comme unité de longueur le centimètre et AB = 6. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

1. Démontrer que le quadrilatère ACBG est un losange.

2. a) On appelle O le centre du losange ACBG. E est le symétrique de O par rapport à B. Le point F est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Construire les points E et F.
   b) Démontrer que F est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

3. On note : $t = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$
   a) Déterminer les images des points A et C par t.
   b) K est l'image de B par t. Démontrer que le point K appartient à la droite (GF). Construire K.
   c) Déterminer l'image du triangle ABC par t.

4. On note : $f = t \circ s_{(OC)}$, où $s_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC).
   a) Déterminer l'image du triangle ABC par f.
   b) Démontrer que f est une symétrie glissée.
   c) Soit $s_{(BF)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BF). Démontrer que : $s_{(OC)} = t_{\overrightarrow{EO}} \circ s_{(BF)}$
   d) En déduire les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) définie par : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 2$.

1. a) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de 35 et 27.
   b) En déduire une solution de l'équation (E') : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 1$.

2. a) Vérifier que (– 20, – 26) est une solution de (E).
   b) Démontrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant :
   $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ où k est un entier relatif.

3. Les habitants d'un village adorent deux génies protecteurs N'Gouan et Moayé. Le génie N'Gouan est adoré tous les 140 jours et le génie Moayé tous les 108 jours. Les jours où les cultes coïncident sont considérés comme des jours de grâce appelés "jour des génies"
   Un matin, le village a adoré le génie Moayé.
   Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain « jour des génies » sachant qu'ils avaient adoré le génie N'Gouan 8 jours auparavant.

Tournez la page S.V.P.

PROBLEME

On considère la fonction f, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = -1 + x\ln x$ si $x \neq 0$ et et $f(0) = -1$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 5 cm.

Partie A

1. a) Justifier que f est continue 0.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)+1}{x}$.

   Interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique s comprise entre 1,7 et 1,8.
   Pour la suite on prendra 1,8 pour valeur approchée de s.

   b) Justifier que :

   $\forall x \in [0\,;s[,\ f(x) < 0\,;$
   $\forall x \in]s\,;+\infty[\ ,\ f(x) > 0.$

4. a) Justifier que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

   b) Tracer (C).

   c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de s l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^s f(x)dx$.

   d) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire $\mathcal{A}(s)$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = s$.

Partie B

On considère la fonction g, dérivable sur $\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ et définie par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+\ln x}$.

1. a) Démontrer que : $\forall x \in \left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$, $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$.

   b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x) = x$ et leur valeur.

2. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$.

   b) Justifier que g est strictement croissante sur l'intervalle [s, 2].

3. Démontrer que : $g([s, 2]) \subset [s, 2]$.

4. a) Démontrer que : $\forall x \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{(1+\ln x)^2} \leqslant 1$

   b) Démontrer que pour tout réel x élément de [s, 2], $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{3}f(2)$

   En déduire que : $\forall x \in [s, 2]$, $|g'(x)| \leqslant 0{,}3$.

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 2$ et, pour entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

5. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n \in [s, 2]$.

6. a) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |U_{n+1} - s| \leqslant 0{,}3 \times |U_n - s|$.

   b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |U_n - s| \leqslant \dfrac{(0{,}3)^n}{2}$.

7. a) Justifier que U_n converge vers s.

   b) À partir de quelle valeur de n, U_n est une valeur approchée de s à 10^{-4} près ?