*R. C. I. - M. E. N E. T. * Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N E. T.*

BACCALAURÉAT
SESSION 2013

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 *(5 points)*

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et définie par : $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$.

On admettra que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1- On suppose que : $0 < a < 1$.

a) Démontrer par récurrence que :

i) pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$;

ii) la suite (u_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

2- On suppose que : $a > 1$.
Soit la suite (v_n) définie par :
$v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = a^n.$$

c) On pose : $S_0 = 1$ et $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Justifier que : $S_n = \dfrac{1-a^n}{1-a}$

d) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{S_n}\,.$$

$\boxed{\text{EXERCICE 2}}$ *(5 points)*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$, d'unité 1 cm, on considère les points $A(-1\ ;\ 0)$ et $I(4\ ;\ 0)$.

On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est le point O.

1- *a*) Déterminer les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

b) Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$.

c) Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

2- *a*) Démonter qu'une équation de (E) dans le repère $(O\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est :

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

b) Construire (E).

3- On considère l'équation :

(E_α) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2(4 + 5\cos\alpha)z + (4\cos\alpha + 5)^2 = 0$ avec $\alpha \in [0\ ;\ \pi]$.

a) Justifier que le discriminant de (E_α) est : $\Delta = (6\, i \sin\alpha)^2$.

b) Résoudre l'équation (E_α).

On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.

c) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 dans le repère $(O\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Démontrer que M_1 et M_2 appartiennent à (E) lorsque α décrit l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

$\boxed{\text{PROBLÈME}}$ *(10 points)*

<u>Partie</u> A.

On considère la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

Unités : $OI = 2$ cm et $OJ = 4$ cm.

I- Soit la fonction u dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $u(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1- Calculer $\lim\limits_{x \to 0} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.

2- *a*) Etudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que l'équation :

(E) : $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, $u(x) = 0$ admet une solution unique α.

c) Démontrer que : $1{,}89 < \alpha < 1{,}9$.

d) Justifier que : $\begin{cases} \text{si } x \in]0\,,\alpha[\text{ alors } u(x) > 0 \\ \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\text{ alors } u(x) \leq 0 \end{cases}$.

II-

1- Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2- *a*) Démontrer que pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $f'(-x) = \dfrac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

c) Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

3- *a*) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (OI).

b) Déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ pour tout x élément de $]0, +\infty[$.

4- Tracer $(\mathscr{C})$ dans le plan muni du repère $(O\,;I, J)$.

Partie B.

On note F la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

1- *a*) Déterminer le signe de F sur $]0\,;+\infty[$.

b) Calculer $F'(x)$ pour tout nombre réel x élément de $]0\,;+\infty[$.

2- On note φ la bijection réciproque de la fonction tangente sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.

a) Démontrer que pour tout x élément de $[0\,;+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} \forall\, x \in]0, +\infty],\ h(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} \\ h(0) = 1 \end{cases}$.

Démontrer que h est continue en 0.

3- *a*) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ F(x) = \varphi(x)\ln x - \displaystyle\int_1^x h(t)\,dt.$

b) En utilisant la question 2-*b*) de la partie *B*, démontrer que : $\lim\limits_{x \mapsto 0} \varphi(x)\ln x = 0$.

4- On admettra que F est prolongeable par continuité en 0 et que : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $F(x) = F(\frac{1}{x})$. Soit G le prolongement par continuité de F en 0. On pose $G(0) = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$.

G est définie par : $\begin{cases} \forall\, x \in]0, +\infty[,\ G(x) = F(x) \\ G(0) = \ell \end{cases}$.

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;I, J)$.

a) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \ell$.

b) Étudier les variations de G sur $[0\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

5- On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

On admet que : $|\ell - v_n| < \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.

a) Justifier que : $v_2 = \dfrac{209}{225}$.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\dfrac{1}{(2n+3)^2} < 25.10^{-3}$.

c) En déduire une valeur approchée de ℓ à 25.10^{-3} près.

d) Donner l'allure de (Γ) dans le plan muni du repère (O, I, J).