PREPA BAC
SESSION : 2024

MATHÉMATIQUES

SUJET N°7

Année Scolaire
2023 -2024
Prof. : M. TEHUA
0546234613

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/3 et 2/3 et 3/3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

Pour chaque énoncé, écris vrai si l'énoncé est vrai ou Faux si l'énoncé est faux. Aucune justification n'est demandée.

N°	Énoncés
1.	La fonction g définie par $g(x) = xe^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $(E) = y' - 2y = e^{2x}$
2.	Sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction f définie par $: f(x) = lnx$ est la fonction G définie par $G(x) = xlnx - x + 2$
3.	La suite numérique (v_n) définie par : $v_{n+1} = v_n - 2n + 3$ est donnée sous la forme explicite.
4.	M est le point d'affixe $z = \sqrt{2} - \sqrt{2i}$. Une forme trigonométrique de z est $2(cos\frac{\pi}{4} - i\ sin\frac{\pi}{4})$

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D Sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste. Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Éoncés incomplètes	Réponses	
1.	Soit une série statistique à deux variables (X,Y). Soit (D) la droite de régression de x en y d'équation $x = ay + b$.	A	$a = -cov\ (X, Y)$
		B	$a = \frac{cov(X,Y)}{V(y)}$
		C	$a = \frac{cov(X,Y)}{V(x)}$
		D	$a = \frac{cov(X,Y)}{\bar{y}}$
2.	Soit f la définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$	A	$f'(x) = 2(x+1)f(x)$
		B	$f'(x) = f(x)$
		C	$f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$
		D	$f'(x) - 2f(x) = 0$
3.	On considère trois suites $(u_n), (v_n)\ et\ (w_n)$ qui vérifient la propriété suivante : « pour tout entier naturel strictement positif, $u_n \leq v_n \leq w_n$ ». si pour *tout* $n > 0, u_n = \frac{2n^2-1}{n^2}\ et\ w_n = \frac{2n^2+3}{n^2}$, on peut en déduire que :	A	$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$
		B	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
		C	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$
		D	(v_n) n'a pas de limite
	La translation de vecteur u d'affixe $-1 + 2i$ a pour écriture complexe :	A	$z' = z - (-1 + 2i)$
		B	$z' = z - 1 + 2i$
		C	$z' = (-1 + 2i)z$
		D	$z' = -z - 1 + 2i$

EXERCICE 3

La location annuelle initiale d'une maison se monte à 7000 francs. Le locataire s'engage à louer durant 7 années complètes. Le propriétaire lui propose deux contrats:

1. <u>Contrat n°1:</u>

Le locataire accepte chaque année une augmentation de 5 % du loyer de l'année précédente

a) Si u_0 est le loyer initial de la 1ère année, exprimer le loyer u_n de la nième année en fonction de n.

b) Calculer le loyer de la 7ème année.

c) Calculer la somme payee, au total, au bout de 7 années d'occupation.

2. <u>Contrat n°2:</u>

Le locataire accepte chaque année une augmentation forfaitaire de 400 francs.

a) Si v_0 est le loyer initial de la 1ère année, exprimer le loyer v_n de la nième année en fonction de n.

b) Calculer le loyer de la 7ème année.

c) Calculer la somme payée, au total, au bout de 7 années d'occupation.

3. Conclure: quel contrat est le plus avantageux?

EXERCICE 4

L'évolution du prix, en F CFA, du kilogramme d'une certaine variété de riz est donnée par le tableau suivant :

Années	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rangs de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix (y_i)	235	260	270	290	295	300	320	360

(On arrondira les résultats au millième près).

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

- Sur l'axe des abscisses, on choisira 2 cm pour 1 rang.
- Sur l'axe des ordonnées, on choisira 1 cm pour 10 F CFA.

On graduera l'axe des ordonnées à partir de 230.

1. a) Représenter le nuage de points de cette série statistique double

b) Calculer les coordonnées du point moyen G puis placer le point G dans le repère.

2. a) Démontrer que le coefficient de corrélation linéaire est $r = 0{,}968$.

b) Un ajustement affine peut-il être envisagé ? Pourquoi ?

c) Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est $(D): y = 15{,}119x + 223{,}215$.

d) Construire la droite (D).

3. Madame Soli et sa famille ont une consommation d'une tonne de cette variété de riz par an. Quel est le budget annuel alloué à l'achat de ce riz par Madame Soli pour l'année 2015 ?

EXERCICE 5

I. On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0;\ +\infty[\ par\ g(x) = e^x + 2lnx$

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\quad et\quad \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Calculer $g'(x)$.

c) Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha\ sur\ ]0;\ +\infty[$.

b) Vérifier que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

c) Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0;\ \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

II. On considère la fonction f définie sur $[0:\ +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = e^x + 2xlnx - 2x \quad si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\ \ et\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats.

2. a) Étudier la continuité de f en 0.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$.

c) La fonction f est- elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

d) Interpréter graphiquement le résultat de la question 2. b).

3. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a) Démontrer que :$\forall x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[\ ; f'(x) = g(x)$.

b) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 2]. (On prendra $\alpha = 0{,}45$ et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6).

EXERCICE 6

Lors d'une expérience pendant le cours de chimie dans une classe de TD d'un lycée, un gaz se répand accidentellement dans le laboratoire. L'évolution du taux de gaz dans l'air peut se modéliser par la fonction f définie sur$[0\ ;5]$ par $\boldsymbol{f(x) = (x-2)e^{-x}}$ où x est le nombre minutes écoulées depuis le début de l'incident et $f(x)$ est le taux du gaz dans l'air exprimé en ppm (parties pour millions). Le gaz a un effet irritant pour la gorge 3 minutes après que son taux ait atteint sa valeur maximale dans le laboratoire.

Les élèves n'ont pu évacuer le laboratoire avant les 5 minutes qui suivent le début de l'incident. Inquiet, le chef de l'établissement veut urgemment savoir si les élèves ont été affectés par le gaz et sollicite le meilleur élève de ta classe que tu es, pour obtenir une réponse.

À l'aide de tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du chef de l'établissement.