FICHE N°3 DE PREPA BAC 2024 MATHS SERIE D

Année Scolaire
2023 -2024
Prof. : M. TEHUA
0546234613

EXERCICE 1

En 1990, un pays avait une population de 50 millions d'habitants. Par accroissement naturel, sa population augmente de 1,5% l'an. Par ailleurs, on constate une augmentation de 450.000 habitants par an due à l'immigration. *L'unité est le million d'habitants*

On note : $u_0 = 50$, le nombre d'habitant en 1990 (exprimé en million d'habitants) et u_n le nombre d'habitant en $1990 + n$.

1. a. Calcule u_1 et u_2.
   b. Exprime u_{n+1} en fonction de u_n.
2. On admet que le modèle d'évolution se poursuivre de la même façon jusqu'à en 2010. On pose $v_n = u_n + 30$.
   a. Démontre que la suite (v_n) ainsi définie est une géométrique de dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprime v_n puis u_n en fonction de n.
   c. En-déduire la population de ce pays en l'an 2010.
3. Détermine en quelle année la population dépassera les 100 millions d'habitants

ETUDE DE FONCTION

On considère la fonction numérique f definie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{1-x} - x + 1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est le centimètre.

1. On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
   Interprète graphiquement ces résultats.
2. a- Calcule la limite de f en $-\infty$.
   b- Justifie que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
3. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{1-x} + 1$.
   On admet qu'il existe un nombre réel α élément de l'intervalle $[-0{,}4\ ;\ -0{,}2]$ tel que $g(\alpha) = 0$ et

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\alpha[,\ g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[,\ g(x) > 0 \end{cases}$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a- Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -g(x)$.
   b- Étudie le sens de variation de f.
   c- Dresse le tableau de variation de f.

4. On admet que (C) est au-dessus de (D) sur $[-1\,;+\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty\,;-1]$.
   Construis (C) (Tu prendras : $\alpha = -0{,}3$ et : $f(\alpha) = 3{,}9$).
5. a- Interprète graphiquement l'intégrale K tel que : $K = \int_0^1 (f(x) - (-x+1))\,dx$.
   b- Justifie, à l'aide d'une intégrale par parties, que : $K = 2e - 3$.

SITUATION COMPLEXE

Sur une chaîne de production de pièces métalliques, on sait que si on produit trop peu de pièces à la minute (cadence faible) on perd de l'argent et si on produit trop de pièces à la minute (cadence élevée), les machines chauffent et usent plus rapidement. On a réussi à modéliser la courbe de rentabilité de la chaîne par la fonction f définie par :

$f(x) = 24\ln(x) - \frac{4}{5}x$, definie sur $]0\,;200]$ où x désigne le nombre de pièces produites à la minute. Le Directeur de l'usine veut accroître la rentabilité de la chaîne de production.

N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande déterminer le nombre de pièces par minute à produire pour avoir la rentabilité maximale.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances en mathématiques, aide le Directeur à répondre à sa préoccupation.