EPREUVES PREPA BAC 2024 MATHEMATIQUES TS$_2$ PARTIE 2

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé R (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Résoudre dans C, l'équation : $z^2 + 2\sqrt{3}\ z + 4 = 0$

2) On considère l'équation (E) : $z^3 + 2(\sqrt{3} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z - 8 = 0$.
   a) Vérifier que 2 est une solution de (E)
   b) Résoudre dans C l'équation (E)

3) On considère A(z_1) B(z_2) avec $z_1 = 2$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ et I =A*B
   a) Ecrire z_2 sous la forme trigonométrique puis placer A et B dans le repère R.
   b) Montrer que OAB est un triangle isocèle et en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right)$
   c) Calculer OI et en déduire la forme trigonométrique de Z_I.
   d) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 2e^{i\theta}$ (avec $\theta \in$ IR)
   b) En déduire les solutions de l'équation $z^{10} + 2\sqrt{3}\ z^5 + 4 = 0$

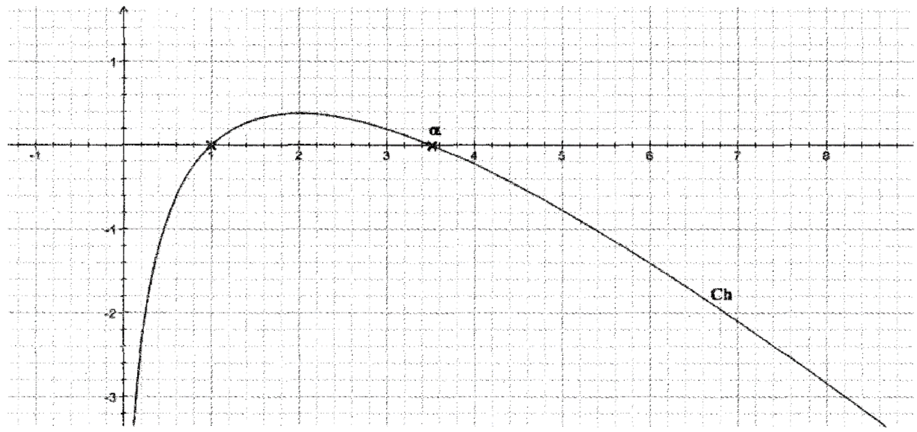
EXERCICE 2

La figure ci-dessous, montre la courbe représentative Ch , dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$,de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 1 - x + 2lnx$

1- a) Montrer par calcul que : $3{,}51 < \alpha < 3{,}52$
   b) Donner, en utilisant le graphique, le signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$

2- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 + 2lnx}{x^2}$
   a) Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{4lnx}{x^3}$
   b) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$

3- Soit (I_n)la suite définie, pour $n \geq 4$ par $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$
   a) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $[4, +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$
   b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 4,\ 0 \leq I_n \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ et déterminer la limite de la suite (I_n)
   c) Montrer que pour tout $n \geq 4$ on a $0 \leq I_4 + I_5 + ... + I_n \leq ln(n+1) - \ln 4$.



EXERCICE 3

A)

1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1).$$

a) On admet le résultat suivant : $\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0.$

En déduire la limite de g lorsque x tend vers 1.

b) Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

c) Résoudre l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à $]1\,;\,+\infty[$.

d) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

e) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique notée α, dans l'intervalle $[e+1\,;\,e^3+1]$ puis étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$

a) Calculer $\lim_{x \to 1} \varphi(x)$ et prouver que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ a le même signe que $g(x^2)$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1\,;\,\sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty[$

B) On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1) Vérifier que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \varphi(e^x)$.

2) En déduire :

a) La limite de f lorsque x tend vers 0 ;

b) La limite de f lorsque x tend vers $+\infty$;

c) Le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3) Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.