

MATHEMATIQUES : FICHE 5



EXERCICE 1

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J) , la courbe (C) ci-dessous représente la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par : $f(x) = \frac{9}{6-x}$.

1. a) construis la courbe (C) et de droite (D) d'équation $y = x$, placer les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe (OI) . Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite (u_n) ?
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.
3. On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b) exprimer v_n et u_n en fonction de n .
 - c) Calculer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n) .

ETUDE DE FONCTION

Partie A

Soit la fonction g définie sur $] -1 ; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de g
2. Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B

f est la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x} + \ln(x + 1)$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . unité graphique : 4 cm.

1. Calculer les limites de f en -1 et $+\infty$.
2. a) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour tout x de $] -1 ; +\infty[$.
- b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation
3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $-1 < \alpha < 0$.
- b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. Tracer (C)

Partie C

Soit $I = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$.

1. Interpréter graphiquement I .
2. Calculer I à l'aide d'une intégration par partie. (On pourra remarquer que : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).
3. Démontrer que : $I = \alpha - 1 + (\alpha + 2)e^{-\alpha}$