



MATHÉMATIQUES : FICHE 8

ETUDE DE FONCTION

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Partie A

Soit la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- b) en déduire le sens de variation de la fonction g .
2. calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$.

Partie B

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}.$$

1. on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$
2. Sachant que la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b .

Partie C

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}.$$

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
- b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a) Vérifier que, $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- b) Établir le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- c) En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. On considère la droite (D) d'équation $y = x - 1$.
 - a) Justifier que la droite (D) est asymptote à la courbe (C) .
 - b) Étudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D) .
 - c) Tracer la droite (D) et la courbe (C) .

Partie D

On note A la mesure, exprimée en cm^2 , de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe (C) , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$
 - a) Calculer $H'(x)$
 - b) En déduire une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer A et donner sa valeur arrondie au mm^2 près.