



MATHEMATIQUES : FICHE 12

SITUATION COMPLEXE

Les pertes d'une entreprise due à la pandémie à coronavirus s'expriment par : $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ où x est la quantité de marchandise mise sur le marché en millions de tonnes. Le chef d'entreprise veut estimer la quantité de marchandise qu'il doit éviter de mettre sur le marché, car occasionnant une perte maximale. Il te sollicite pour l'aider et te promet de t'octroyer une bourse mensuelle de 30.000 F CFA. A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du chef d'entreprise.

ETUDE DE FONCTION

Partie A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$

1. Démontrer que g est une solution de l'équation (E).

2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.

a) Démontrer qu'une fonction φ est une solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est une solution de (F).

b) Résoudre l'équation différentielle (F).

c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques $OI = 2$ cm ; $OJ = 4$ cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3. a) Soit f' la fonction dérivée de f . Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

b) Etudier les variations de f .

b) Dresser le tableau de variation de f .

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

5. Etudier les positions relatives de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et (C).

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_0^1 xe^{-x} dx$

2. a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.