BY TEHUA

# PREPA BAC 2025

## MATHS

Fomesoutra.com
ça soutra !

# MATHEMATIQUES

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 1**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. |
| 2 | La fonction : $x \longmapsto \ln x$ est positive sur $]0;+\infty[$. |
| 3 | Soit $h$ une fonction définie en 0. Si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{h(x)-h(0)}{x} = +\infty$ alors la courbe représentative de $h$ admet au point de coordonnées $(0, h(0))$ une demi – tangente verticale. |
| 4 | Une équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrées à pour équation : $y = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}x + \left(\bar{x} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\bar{y}\right)$. |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont un seul est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | Soit $f$ une fonction dérivable sur $[2;5]$ et telle que $1 \leq f'(x) \leq 4$, pour tout $x$ élément de $[2;5]$, alors : | A | $2 \leq f'(x) \leq 5$ |
| | | B | $2 \leq f(5) - f(2) \leq 5$ |
| | | C | $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$ |
| 2 | Si deux événements E et F d'un univers sont tels que : P(E) = 0,2 ; P(F) = 0,4 et P($E \cup F$) = 0,52 alors E et F sont : | A | Indépendants |
| | | B | Incompatibles |
| | | C | Impossibles |
| 3 | L'écriture trigonométrique de $1 - i$ est : | A | $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ |
| | | B | $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ |
| | | C | $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ |
| 4 | $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ est : | A | La formule d'Euler |
| | | B | La formule de De Moivre |
| | | C | Le binôme de Newton |

### EXERCICE 3 (4 points)

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population qui semble en voie de disparation.
En l'an 2000, l'effectif était égal à mille (1000).
L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approcher par une fonction f.
Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000;+\infty[$ et est solution de l'équation différentielle : $(E_1)$: $y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$

Soit $h$ la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $[2000;+\infty[$ par : $h(t)=\frac{200}{t}$.

1) Vérifier que $h$ est solution de $(E_1)$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(E_2)$: $y'(t)+\frac{1}{200}y(t)=0$.

3) a- Démontrer qu'une fonction g est solution de $(E_1)$ si et seulement si g $-h$ est solution de $(E_2)$.

b- Déduis – en les solutions de $(E_1)$.

c- Sachant que : $f(2000)=1000$, vérifier que : $\forall t\in[2000;+\infty[, f(t)=999{,}9e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)}+\frac{200}{t}$.

d- Déterminer le nombre d'individus de cette population animale en 2020.

Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

## EXERCICE 4 (4 points)

Soit la suite définie $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases}\mathrm{U_0}=0\\ \mathrm{U_{n+1}}=\frac{1}{2}\mathrm{U_n}+1\end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\leq 2$.
2. En utilisant la question 1, étudier le sens de variation de la suite $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$.
3. La suite $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ est – elle convergente ? Pourquoi ?
4. Soit la suite $(\mathrm{V_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}, \mathrm{V_n}=\mathrm{U_n}-2$.
   a) Démontrer que la suite $(\mathrm{V_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer $\mathrm{V_n}$ puis $\mathrm{U_n}$ en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$.

5.On pose : $\mathrm{S_n}=\mathrm{V_0}+\mathrm{V_1}+\cdots+\mathrm{V_n}$ et $\mathrm{T_n}=\mathrm{U_0}+\mathrm{U_1}+\cdots+\mathrm{U_n}$

a) Exprimer $\mathrm{S_n}$ en fonction de n.

b) En déduire que $\mathrm{T_n}=2(n+1)-4\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

6. Soit $f$ la fonction definie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x+1$. (C) désigne la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J). **Unité graphique : 2cm**

a) Tracer la courbe (C) et la droite (D) d'équation y = x.

b) Utiliser (C) et (D) pour représenter sur l'axe (OI) les termes $\mathrm{U_0}$ ; $\mathrm{U_1}$ ; $\mathrm{U_2}$ et $\mathrm{U_3}$ de la suite $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$.

c) Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ ?

## EXERCICE 5 (4 points)

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : g(x) = $-1+(2-2x)e^{-2x+3}$.

1. Le tableau de variation de la fonction g est donné ci – dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ |

   a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée $\alpha$.
   b) Vérifier que : 0,86$<\alpha<0{,}87$.
   c) Justifier que : $\forall x\in]-\infty;\alpha[, g(x)>0$ et $\forall x\in]\alpha;+\infty[, g(x)<0$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, J, J), (unité graphique : 2 cm).
   On considère la fonction $f$ derivable et definie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$.
   On note $(C)$ la courbe représentative de $f$.
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.
   b) En déduire que $(C)$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

3. On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et la droite (D) d'équation $y=-x$ est une asymptote oblique à $(C)$ en $+\infty$. Etudier la position de $(C)$ par rapport à (D).

4. Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$.
   a) Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=g(x)$.
   b) En déduire les variations de $f$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$. On ne calculera pas $f(\alpha)$.

5. Construire (D) et $(C)$sur le même graphique. On précisera les points de $(C)$ d'abscisses : 0 ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{3}{2}$ ; 4.
   On prendra : $\alpha = 0{,}865 \ \ et\ f(\alpha) = 0{,}4$.
6. Soit $t$ un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire en $cm^2$ de la partie du plan limitée par la courbe $(C)$, la droite (D) et les droites d'équations$x = \frac{3}{2} \ \ et\ x = \ t$.
   On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3} dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifier que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}$.

b) En déduire $\mathcal{A}(t)$ et calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathcal{A}(t)$.

**EXERCICE 6 (4 points)**

Lors d'une période de sècheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau $(en\ m^3)$ utilisee par son exploitation depuis le premier jour et donne le tableau suivant :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de jours écoulés $x_i$ | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 |
| Volume utilisé en $(m^3)$ $y_i$ | 2,25 | 4,3 | 8 | 17,5 | 27 |

L'agriculteur vient te voir et te demande à combien peut – il estimer le volume d'eau utilisé le 20e jour si la tendance s'est maintenue par la suite.
Utilise tes connaissances de terminale D sur les statistiques pour répondre à la préoccupation de l'agriculteur.

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 2**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | La fonction exponentielle est la dérivée de la fonction logarithme népérien. |
| 2 | A et B sont deux réels et $f$ la fonction définie de $]a;b[\to\mathbb{R}$; si $f$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, M est un réel positif tel que : $\forall x\in\,]a;b[$, $\lvert f'(x)\rvert\leq M$, alors $\lvert f(b)-f(a)\rvert\leq M\lvert b-a\rvert$. |
| 3 | L'ensemble de définition de la fonction $h$ définie par : $h(x)=\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)$ est l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$. |
| 4 | Pour $0<x<2$, la fonction $x\longmapsto(2-x)^x$ est équivalente à la fonction $x\longmapsto e^{x\ln(2-x)}$ |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | Si A et B sont deux événements indépendants de probabilités non nulles, alors : | A | $A\cap B=\emptyset$ |
| | | B | $P_A(B)=P(B)$ |
| | | C | $P(A\cup B)=P(A)\times P(B)$ |
| 2 | Si $(U_n)$ est une suite arithmétique de raison $-0{,}5$ et si $U_2=7$, alors $U_n$ est égal à : | A | $8-0{,}5n$ |
| | | B | $7-0{,}2n$ |
| | | C | $7-0{,}5n$ |
| 3 | La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-1+2i$ a pour écriture complexe : | A | $z'=z-1+2i$ |
| | | B | $z'=-z-1+2i$ |
| | | C | $z'=(-1+2i)z$ |
| 4 | Toute similitude directe de rapport $\boldsymbol{k}$ multiplie : | A | les distances par $\boldsymbol{k^2}$ et les aires par $\boldsymbol{k}$. |
| | | B | les distances par $\boldsymbol{k}$ et les aires par $\boldsymbol{k^3}$. |
| | | C | les distances par $\boldsymbol{k}$ et les aires par $\boldsymbol{k^2}$. |

### EXERCICE 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) ; **unité graphique : 2 cm.**
On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation P défini par : $P(z)=z^3-2iz^2+(4+4i)z+16+16i$

1) a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation de (E) : $z^2+(-2-2i)z+8+8i=0$.
   b- Justifie que $\forall z\in\mathbb{C}, P(z)=(z+2)[z^2+(-2-2i)z+8+8i]$
   c- Déduis – en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $P(z)=0$.
2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-2$ ; $4i$ $et$ $2-2i$.
   a- Place dans le repère (O, I, J) les points A, B et C.
   b- Justifie que : $MES\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=-\frac{\pi}{2}$.
   c- Déduis – en la nature du triangle ABC.
3) Soit D le point d'affixe $4+2i$ tel que ABCD soit un carré et S la similitude directe de centre A

qui transforme B en D.

a- Détermine l'écriture complexe de S.
b- Détermine les éléments caractéristiques de S.
c- Détermine les affixes des points C' et T tel que C' image de C par S et T antécédent de A par S.
d- Construis le point E image par S du point K, milieu du segment $[AD]$.

## EXERCICE 4 (4 points)

***Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.***

**PARTIE A**

En vue de sélectionner des joueurs pour un tournoi international de football, une fédération nationale met à la disposition de l'entraineur un certain nombre de joueurs évoluant au pays et hors du pays. Parmi eux, il y a des joueurs professionnels et des joueurs non professionnels. Ces joueurs se répartissent comme suit :

- 75% des joueurs évoluant au pays.
- 60% des joueurs évoluant au pays sont professionnel.
- 80% des joueurs évoluant hors du pays sont professionnels.

On choisit au hasard un joueur pour subir un test antidopage.
On désigne par A l'événement : « le joueur choisi évolue au pays »,
On désigne par B l'événement : « le joueur choisi est professionnel »,
On désigne par C l'événement : « le joueur choisi évolue au pays et est professionnel ».

1. a) Traduis l'énoncé par un arbre de probabilité.
   b) Donne $P_A(B)$, la probabailite de B sachant A.
   c) Démontre que la probabilité de l'événement C est égale à 0,45.
2. Calcule la probabilité de B.

**PARTIE B**

Un entraineur doit sélectionner des joueurs parmi ceux mis à sa disposition. Pour ce faire, il soumet d'abord chaque joueur à test qui consiste à faire trois tirs au but successifs à partir du point de penalty. Est retenu à l'issue de ce premier test, tout joueur qui réussit au moins deux de ses trois tirs. On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un joueur donné réussisse un tir est égale à $\frac{3}{4}$.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis par un joueur donné à l'issue de l'épreuve de trois tirs au but successifs.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'espérance mathématique de E(X) de X et la variance V(X) de X.
2. Démontre que la probabilité qu'un joueur donné soit retenu est égale $\frac{27}{32}$.

## EXERCICE 5 (4 points)

**PARTIE A :** Soit g la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Etudie les variations de g.
2. Détermine le signe de g.

**PARTIE B :** $f$ est la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = e^{-x} + \ln(x+1)$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). **Unité graphique : 4 cm.**

1. Calcule les limites de $f$ en $-1$ et en $+\infty$.
2. a- Démontre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   b- Déduis -en les variations de $f$ sur $]-1\,;\,+\infty[$. Dresse son tableau de variation.
3. a- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]-1\,;\,+\infty[$ tel que : $-0{,}9 < \alpha < 0$.
   b- Donne une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.
4. Trace (C).

**PARTIE C :** Soit $I = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx$.

1. Interprète graphiquement I.
2. Calcule I à l'aide d'une intégration par parties. (On pourra remarquer que : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).
3. Démontre que : $I = \alpha - 1 + (\alpha + 2)e^{-\alpha}$.

## EXERCICE 6 (4 points)

Pour réduire le nombre d'accidents de la circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes, la gendarmerie nationale utilise un nouvel alcootest. Après un essai, dans une population composée de 8% de personnes ivres, la gendarmerie recueille les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test.
- 95% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test.

Le commandant de brigade de la gendarmerie de ta localité voudrait savoir le nombre minimal d'automobilistes à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure à 0,99.
Il te sollicite pour trouver ce nombre.
En utilisant tes connaissances en mathématiques ; réponds à la préoccupation du commandant de brigade.

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 3**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

## EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | La fonction g définie sur ℝ par : $g(x) = \begin{cases} 3 + x \, si \, x < -1 \\ x^2 + x \, si \geq -1 \end{cases}$ est continue en $-1$. |
| 2 | Les racines carrées du nombre complexe $-8 - 6i$ sont $1 - 3i$ et $-1 + 3i$. |
| 3 | Pour tous réels $a$ et $b$ et toute fonction continue $f$ sur ℝ telle que : $\int_a^b (1 + 2f(t))dt = b - a + 2\int_a^b f(t)dt$ |
| 4 | Pour tout nombre réel, $\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = 1$ |

## EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

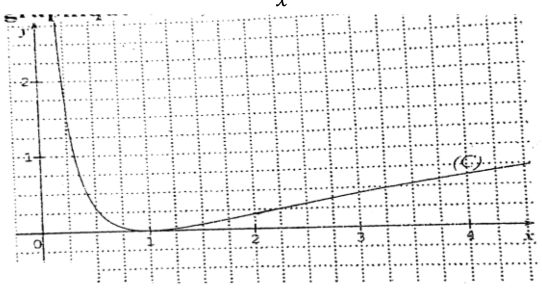
| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | Le plus petit entier naturel $n$ tel que $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0{,}95$ est …. | A | 2 |
| | | B | 4 |
| | | C | 3 |
| 2 | Une corrélation parfaite entre deux caractères d'une série statistiques double se traduit par un coefficient de corrélation linéaire $r$ tel que : | A | $\|r\| > 0$ |
| | | B | $\|r\| < 0{,}87$ |
| | | C | $\|r\| = 1$ |
| 3 | Si $f$ et g sont deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$ telles que g ne s'annule pas. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$ | A | 1 |
| | | B | On ne peut pas conclure |
| | | C | $+\infty$ |
| 4 | On donne : $COV(X,Y) = 240{,}15$ ; $V(X) = 45$ ; $\bar{X} = 17$ et $\bar{Y} = 23$. La droite (D) de régression de $y$ en fonction de $x$ est la droite passant par la point moyen $G(\bar{X}; \bar{Y})$. Une équation de cette droite est : | A | $y = 5{,}33x - 67{,}61$ |
| | | B | $y = 6{,}33x - 78{,}13$ |
| | | C | $y = 5{,}33x + 67{,}61$ |

## EXERCICE 3 (4 points)

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \ln x \, dx$.

2. La courbe représentative suivante est celle de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$ dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm).

2. a) On note Δ la partie du plan délimitée par (C) et les droites x = 1 , x = e et y = 0.
   b) Faire apparaitre Δ sur la figure.
   c) Calculer en $cm^2$, l'aire A de Δ.



**EXERCICE 4 (4 points)**

Soit u la suite numérique définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+4}{3} \end{cases}$

1. a) Calcule $u_1$ et $u_2$.
   b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $u_n \geq 2$.
   c) Démontre que la suite $(u_n)$ est décroissante.
   d) Déduis – en que la suite $(u_n)$ est convergente. Puis détermine sa limite.
2. On pose que pour tout nombre entier naturel, $v_n = u_n - 2$.
   a) Montre que $(v_n)$ est une suite geometrique de raison $\frac{1}{3}$.
   b) Exprime $u_n$, puis $v_n$ en fonction de n.
   c) En déduis la limite de la suite $(u_n)$.
3. Calcule la somme S= $v_3 + v_4 + \cdots + v_{19}$

**EXERCICE 5 (4 points)**

On se propose d'étudier la fonction *f* définie sur ]0; +∞[ par : $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère (O ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$).

**Partie A :**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle ]0 ;+∞[ par : $g(x) = -4\ln x + x^2 + 6$ et on donne ci-dessous son tableau de variation.

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $g(\sqrt{2})$ | ↗ | $+\infty$ |

1. Calcule $g(\sqrt{2})$.
2. Montre que pour tout x de ]0 ; +∞[ ; $g(x) > 0$.

**Partie B :**

1. Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   Déduis-en l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
2. *a*) Montre que pour tout *x* de ]0 ; +∞[ ; $f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$.
   *b*) Déduis le sens de variation de *f* sur ]0 ; +∞[ et dresse son tableau de variation.
3. *a*) Démontre que (*Δ)* la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x$ est une asymptote à la courbe (C) en *+∞.*
   *b*) Etudie la position relative de (C) et (*Δ)* sur ]0 ; +∞[.
4. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
5. a) Démontre qu'il existe un seul réel $\alpha$ de l'intervalle $[1 ; 2]$ tel que *f* (*α*) = 0.
   b) Tracer (C), (T) et les asymptotes à la courbe (C).
6. a) Soit $k$ la fonction définie par : $k(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. *Calcule* $k'(x)$.
   b) Déduis-en une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle ]0 ; +∞[.

**EXERCICE 6 (4 points)**

Un pâtissier commercialise des glaces d'un même type très prisées par les consommateurs.

Il peut en produire entre 0 et 300 par jour dans sa petite entreprise familiale. Cette production est vendue dans sa totalité.

Lorsque $x$ représente le nombre de centaines de glaces produites, on note $B(x)$, le bénéfice réalisé par le pâtissier pour la vente des $x$ centaines de glaces.

D'après les données précédentes, l'artisan sait que :

- Pour tout $x$ de l'intervalle $[1; 3]$, on a : $B'(x) = -20x + 30$, où $B(x)$ est exprimé

en milliers de francs et B' la fonction dérivée de B.

- Pour une centaine de glaces vendue, son bénéfice est 20 milles francs.

Il te sollicite pour l'aider à déterminer le nombre de glaces qu'il devra fabriquer par jour pour que son bénéfice soit maximal et de déterminer la valeur de ce bénéfice.

**RCI – MENA – PREPA BAC**

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 4**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse. Aucune justification n'est demandée.

| N° | Affirmations |
|---|---|
| 1 | a étant un nombre réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln\left(\sqrt{a^n}\right) = \frac{n\ln a}{2}$ |
| 2 | Soit f une fonction dérivable sur $[0;5]$ et bijective de $[0;5]$ sur $[-1;3]$ telle que $f(4) = 2$.<br>Si $f'(4) = 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable en 2. |
| 3 | L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = \lvert z_B - z_A \rvert$ |
| 4 | A est un événement de $\Omega$ et $\overline{A}$ l'événement contraire de A on a : $P(\overline{A}) = P(A) - 1$ |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | Enoncés | | Réponses |
|---|---|---|---|
| 1 | Les solutions de l'équation différentielle $f'' = 25f$ sont les fonctions $f_{A,B}(x) = \cdots$ | A | $Ae^{5x} + Be^{-5x}$, où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ |
| | | B | $A\cos 5x + B\sin 5x$, où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ |
| | | C | $Ae^{25x} + Be^{-25x}$, où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ |
| 2 | La fonction $x \to \sqrt{x}$ est : | A | Continue et dérivable en 0 |
| | | B | Continue et non dérivable en 0 |
| | | C | Non continue et non dérivable en 0 |
| 3 | Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on a : E $(-2 + i)$ et F $(-4)$ l'ensemble des points M(z) tels que : $\lvert z + 2 - i \rvert = \lvert z + 4 \rvert$ est : | A | Le cercle de centre E et de rayon 4. |
| | | B | Le cercle de diamètre [EF]. |
| | | C | La médiatrice du segment [EF]. |
| 4 | La solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - e = 0$. | A | $e$ |
| | | B | $\sqrt{e}$ |
| | | C | $\frac{1}{2}$ |

### EXERCICE 3 (4 points)

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels.
Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriques en 2010.
Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous :

| Types de colliers | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Le prix de vente de collier $x_i$ | 54 | 60 | 66 | 72 | 84 | 90 | 96 | 102 |
| Le nombre de dizaine de collier vendus $y_i$ | 18 | 16 | 15 | 13 | 10 | 9 | 8 | 7 |

On désigne par : X le prix de vente de collier ; Y le nombre de dizaine de collier vendus au prix X.

1. Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage.
2. a) Calcule la variance V(X) de X.
   b) Calcule la covariance Cov(X ; Y) de la série statistique double de caractère (X ;Y).
3. Soit (D) la droite de régression de y en $x$ par la méthode des moindres carres.
   a) Démontre qu'une équation de la droite (D) est : $y = -0{,}23x + 29{,}94$.
5. Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11.500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait – elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

## EXERCICE 4 (4 points)

Lors des cérémonies de fin d'année d'un lycée, il est organisé le jeu suivant. On tire simultanément quatre jetons d'un sac en contenant 12, indiscernables au toucher. Cinq de ces jetons sont numérotés 1, quatre jetons sont numérotés 3, deux jetons sont numérotés 2 et un jeton est numéroté 0.
Pour participer à ce jeu, un élève fit une mise de 300 F et on étudie les règles de jeu suivantes : il tire simultanément quatre jetons du sac.

- Si parmi les jetons tirés il n'en figure pas en portant le chiffre 1, l'élève ne récoit rien.
- Si parmi les jetons tirés il en figure un seul portant le chiffre 1, l'élève récoit 100 F.
- Si parmi les jetons tirés il en figure deux portant le chiffre 1, l'élève récoit 300 F.
- Si parmi les jetons tirés il en figure trois portant le chiffre 1, l'élève récoit 700 F.
- Si parmi les quatre jetons tirés portent le chiffre 1, l'élève récoit 1000 F.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'élève à l'issue d'une partie.

1) Justifie que les valeurs prises par X sont $-300$ ; $-200$ ; $0$ ; $400$ et $700$.
2) a- Démontre que $P(X = -300) = \frac{7}{99}$
   b- Établis la loi de probabilité de X.
3) Détermine le gain moyen de l'élève à l'issue d'une partie.
4) Détermine et représente la fonction de répartition de X.
5) Un élève participe 5 fois de suite à ce jeu. Quelle est la probabilité qu'il perde exactement trois fois 300 F.

## EXERCICE 5 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
On considère la fonction $f$ dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1-x)$.
On note (C) la courbe représentative de $f$.

1. a) Calculer la limite de $f$ en $-\infty$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
   c) Calculer la limite de $f$ à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.
2. a) Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle$]-\infty; 1[$, calculer $f'(x)$.
   b) Démontrer que $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.
   c) Dresser le tableau de variation de $f$.
3. a) Démontrer que l'équation (E) : $x \in ]-\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$.
   b) Justifier que : $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.
4. a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) a (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.

On donne le tableau de valeurs suivant :

| x | -2 | - 1,5 | -1 | -0,75 | -0,5 | -0,25 | 0,25 | 0,5 | 0,75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arrondi d'ordre 1 de f(x) | 4,1 | 2,2 | 0,7 | 0,1 | -0,3 | -0,7 | -1,2 | -1,4 | -1,8 |

   b) Tracer (T) et (C). On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par : $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$

5. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha \; et \; x = 0$.

a) Calculer $\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\,dx$ a l'aide d'une intégration par parties.

b) Démontrer que la valeur de $\mathcal{A}$ en unîtes d'aire est : $\mathcal{A} = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$.

c) Déterminer en $cm^2$ l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de $\mathcal{A}$ pour $\alpha = -0{,}65$.

6. Soit $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$ et (C') la courbe représentative de $f^{-1}$ dans le plan muni du repère (O, I, J).

a) Calculer $f(-1)$.

b) Démontrer que le nombre dérivé de $f^{-1}$ en ln2 existe puis le calculer.

c) Construire la courbe (C') et sa tangente $(\Delta)$ au point d'abscisse ln2 sur la figure de la question 4-b).

**EXERCICE 6 (4 points)**

Une société ivoirienne de transformation de produits agricoles a acheté 5 000 tonnes de noix de cajou aux paysans en 2011. La société décide d'augmenter de 5% ses achats chaque année par rapport à l'année précédente.
Le comptable veut connaitre l'année à partir de laquelle la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10 000 tonnes.
A l'aide de tes connaissances mathématiques et d'un raisonnement cohérent et logique, aide ce comptable à déterminer l'année à partir de laquelle la quantité de noix de cajou sera supérieure à 10 000 tonnes.

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 5**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | Soit $f$ une fonction derivable sur un intervalle $[1\,;5]$ telle que, pour tout $x$ élément de $[1\,;5]$. $\lvert f'(x)\rvert \leq 0{,}5$. Alors $\lvert f(1)-f(5)\rvert \leq 2$. |
| 2 | Le point M de coordonnées $(-2\,;3)$ a pour affixe $-2+3i$. |
| 3 | Les solutions de l'équation différentielle $y'+7y=0$ sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{7x}$ $(k \in \mathbb{R})$. |
| 4 | X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et E(X) etant noté m : on appelle écart – type de X le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ tel que $\sigma(X) = \sqrt{x_1{}^2P_1 + x_2{}^2P_2 + \cdots + x_n{}^2P_n - m^2}$. |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | S'il existe deux réels m et M tel que : $x \in [a\,;b], m \leq f(x) \leq M$, alors on a : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ est | A | L'inégalité de la moyenne |
| | | B | La relation de Chasles |
| | | C | L'inégalité des accroissements finis |
| 2 | Soit r le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X, Y). Si $-1 < r \leq -0{,}87$, alors la corrélation linéaire est | A | Faible. |
| | | B | Forte |
| | | C | Normale |
| 3 | On pose : $Z = 1-i$. On note $r$ le module de Z et $\theta$ l'argument principale de Z. $r$ et $\theta$ verifient | A | $r=\sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ |
| | | B | $r=\sqrt{2}$ et $\theta = \frac{-\pi}{4}$ |
| | | C | $r=\sqrt{2}$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$ |
| 4 | Le triangle ABC est rectangle en B si | A | $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} \in i\mathbb{R}^*$ |
| | | B | $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = i \; ou - i$ |
| | | C | $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} \in \mathbb{R}^*$ |

### EXERCICE 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, **unité graphique : 2 cm.**
On considère la transformation $\mathcal{S}$ du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'd'affixe z' telle que :

z'= $\left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$z + 2$i\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. a) Soit Ω le point d'affixe 2. Vérifier que : $\mathcal{S}(\Omega) = \Omega$.

   b) Justifier que $\mathcal{S}$est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Démontrer que : $\forall z \neq 2, \frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$. En déduire que le triangle M ΩM'est rectangle en M.
3. On note $z_A, z_B, z_{A'}$ $et$ $z_{B'}$les affixes respectives des points A, B, A' et B'.

   Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$. En déduire la nature du quadrilatère AA'BB'.
4. Soit (C) un cercle de centre Ω et de rayon 3. Construire (C).

## EXERCICE 4 (4 points)

1) On considère la suite $(u_n)$ de nombres reels définie par : $\begin{cases} u_1 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}^*;\ u_{n+1} = -\frac{3}{10}u_n + \frac{4}{10} \end{cases}$ ;

$a$ est un nombre réel $(v_n)$ est une suite de nombres définie par :$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 13u_n - 4$.

a- Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique, puis déterminer sa raison k et son premier terme.

b- Exprimer $v_n$ en fonction de n et de $a$.

c- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

d- Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

2) Un élève oublie fréquemment son livre de mathématique à la maison avant d'aller en classe.

Pour tout nombre entier non nul n, on note $E_n$ l'événement :

« l'élève oublie son livre de mathématiques à la maison » ; $\overline{E}_n$l'événement contraire de $E_n$.

$p_n$ est la probabilité de l'événement $E_n$ et $q_n$ celle de $\overline{E}_n$. On note $a$ la probabilité qu'il oubli son livre le premier jour.

On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Si l'élève *n* oubli son livre, la probabilité qu'il oubli encore le jour *n* + 1 est $\frac{1}{10}$
- Si l'élève *n* n'oublie pas son livre, la probabilité qu'il oubli le jour *n* + 1 est $\frac{4}{10}$

a- Traduis cette situation aléatoire par un arbre pondéré, en indiquant les différentes probabilités

b- Déterminer en fonction de $p_n$la probabilité p$(E_n \cap E_{n+1})$ de l'événement « $E_n \cap E_{n+1}$»

c- Déterminer en fonction de $q_n$ la probabilité p$\left(\overline{E}_n \cap E_{n+1}\right)$ de l'événement « $\overline{E}_n \cap E_{n+1}$»

d- Justifier que la probabilité $p_{n+1}$ de l'événement $E_{n+1}$ est telle que $p_{n+1} = -\frac{3}{10}p_n + \frac{4}{10}$

A l'aide des résultats de la question 1) donner l'expression de $p_n$en fonction de $a$ et $n$.

## EXERCICE 5 (4 points)

Soit *f la* fonction définie et dérivable sur ℝ par : $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2e^{-\frac{x}{2}}$.

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

**(Unité graphique : 2 cm).**

1. Calculer la limite de f en$+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. a) Calculer la limite de f en$-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique des résultats.
3. a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{8}(-x^2 + 2x + 3)e^{-\frac{x}{2}}$.

   b) Etudier le sens de variation de variation de f, puis dresser son tableau de variation.
4. Justifier qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.
5. Tracer (T) et (C) dans le même repère.
6. On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_{-1}^{2}(x+1)^n e^{-\frac{x}{2}}dx$.

   a) Calculer $I_0$.

   b) Démontrer en utilisant une intégration par parties que : $I_{n+1} = \frac{-2\times 3^{n+1}}{e} + 2(n+1)I_n$ puis justifier que :$I_1 = \frac{-10}{e} + 4\sqrt{e}$.

   c) Démontrer que $I_2$ est l'aire $A$ en $cm^2$ de la partie du plan délimité par (C) ; (OI) et les droites d'équations : *x* = - 1 et *x* = 2.

   d) Calculer $A$.

**EXERCICE 6 (4 points)**

Une étude épistémologique a démontré qu'une certaine maladie M sévit chaque année dans une région R.
Cette maladie a une période de contamination massive de cinq mois. Selon cette étude, le nombre N de personnes atteintes par M, en $x$ mois passes dans la région en période de contamination massive, est donné par :

$$N = 13 + \ln\left(e^{-3} - \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)$$

La rentrée des classes ayant coïncidé avec le début de la période de contamination massive, ton proviseur, en vue de sensibiliser les nouveaux, veut connaitre :

- le nombre probable de personnes atteintes après deux mois ;
- la date du pic de la maladie et le nombre probable de personnes atteintes.

En utilisant tes connaissances mathématiques, réponds aux préoccupations de ton proviseur.

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 6**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | Soit $a$ et $b$ deux nombres réels non nuls. On a: $\ln(2ab) = \ln(a) + \ln(b)$ |
| 2 | On lance deux fois de suite un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'apparition de la face numéro 6. On a : $X(\Omega) = \{1 ; 2\}$ |
| 3 | Toute application du plan ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$ est une similitude. |
| 4 | Les solutions de l'équation $(E)$: $z^2 - z + 2$ dans $\mathbb{C}$ sont : $\frac{1-\sqrt{7}i}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{7}i}{2}$. |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | La forme algébrique de $\frac{3-4i}{7+5i}$ est | A | $\frac{1-43i}{24}$ |
| | | B | $\frac{1}{74} - \frac{43}{74}i$ |
| | | C | $\frac{41-13i}{74}$ |
| 2 | On donne : I=$\int_0^1 (2t + 3e^t)dt$. La valeur de I est : | A | 3e – 2 |
| | | B | 2 – 3e |
| | | C | 3e + 2 |
| 3 | Soit (C) la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x - 1$. On donne la droite (D) d'équation $y = x$. On suppose que : sur $]-\infty; 0[$, (C) est en dessous de (D). Alors l'aire de la partie du plan limitée par (C), (D) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = -1$ est : | A | $\mathcal{A} = -\int_{-2}^{-1} f(x)\, dx.U_a$ |
| | | B | $\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} (x - f(x))\, dx\, .U_a$ |
| | | C | $\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} (f(x) - x)\, dx\, .U_a$ |
| 4 | Les points ABCD sont cocycliques si | A | $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \div \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$ |
| | | B | $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \div \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = i \text{ ou } - i$ |
| | | C | $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \div \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in i\mathbb{R}^*$ |

### EXERCICE 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, **unité graphique : 2 cm.**
On considère l'équation différentielle (E) : $f'(x) - 2f(x) = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Soit $h$ la fonction définie par : $h(x) = 2xe^{2x} + 1$
   Démontre que $h$ est une solution de (E).

2) Résous l'équation différentielle (F) : $f' - 2f = 0$.
3) a- Montre que g est solution de (E) si et seulement si g $-h$ est solution de (F).
   b- Détermine toutes les solutions de (E).
   c) Déduis – en la solution $\varphi$ de (E) vérifiant $\varphi(0) = 0$.

**EXERCICE 4 (4 points)**

1- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2,\ z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\ et\ z_C = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
   a) Détermine le module et l'argument principal de $z_B\ et\ z_C$.
   b) Justifie que les points A, B et C sont situés sur un même cercle (C) de centre O dont on précisera le rayon R puis placer ces points dans le plan.

2- a) Montre que le triangle BOA est isocèle et justifier que $mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OI}}\right) = \frac{3\pi}{8}$
   b) Calcule l'affixe $z_I$ du point I milieu du segment $[AB]$ puis le module de $z_I$.
   c) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$ et vérifier que $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$

3- Détermine et construire l'ensemble $(\Delta)$ des points M du plan d'affixe z tel que $\left|\frac{z-2}{iz}\right| = 1$.

4- Justifie que ${z_B}^{20}$ est un nombre réel strictement négatif.

**EXERCICE 5 (4 points)**

**Partie A**

On considère la fonction g dérivable et définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : g($x$) = $2 + x - 3x\ln(x)$

1. Calculer la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$.
2. a) On désigne par g', la fonction dérivée de g.
   Calculer g'($x$) pour tout nombre réel x strictement positif.
   b) Etudie les variations de g.
   c) On donne : $g\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) = 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}$. Dresse le tableau de variation de g.
3. a) Démontre que l'équation g(x) =0 admet dans l'intervalle $\left[e^{-\frac{2}{3}}\ ;\ +\infty\right[$ une solution unique notée $\alpha$.
   b) Justifie que : $1{,}9 < \alpha < 2$.
4. Démontre que : $\forall x \in ]0\ ;\ \alpha[, g(x) > 0$ et
   $\forall x \in ]\alpha\ ;\ +\infty[, g(x) < 0$.

**Partie B**

Soit $f$ la dérivable et définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{20\ln(x)}{(x+2)^3}$

(C) désigne la courbe représentative de $f$ dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique : 5 cm.

1. a) Calculer la limite de $f$ en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
   b) Justifie que la limite de $f$ en $+\infty$ est égale à 0.
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.
   a) Démontre que : $\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[, f'(x) = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}$.
   b) Déduis – en les variations de $f$.
   c) Dresse le tableau de variation de $f$. (On ne calculera pas $f(\alpha)$)
3. Justifier qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = \frac{20}{27}x - \frac{20}{27}$
4. Tracer (T) et (C). On prendra : $\alpha = 1{,}95\ et\ f(\alpha) = 0{,}22$.

**Partie C**

On pose : $U = \int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2}dx$ et $V = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{(x+2)^3}dx$

1. On admet que : $\forall x \in ]0\,;\,+\infty[, \frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{2(x+2)^2}$

Déduis – en que : $\mathrm{U} = \frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{24}$

2. a) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\mathrm{V} = -\frac{\ln 2}{32} + \frac{1}{2}\mathrm{U}$

   b) Calcule en $\mathrm{cm}^2$ l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Donne le résultat arrondi à l'ordre 1.

## EXERCICE 6 (4 points)

Conviés à une journée carrière le vendredi 16 Avril 2021 au Lycée Classique d'Abidjan sur le thème :
**« l'entrepreneuriat, un débouché porteur pour les élèves »,** les élèves de Terminale du Lycée de Garçons de Bingerville ont décidé d'entreprendre. Ils ont noté l'affirmation de l'un des conférenciers sur le bénéfice journalier d'un bon entrepreneur, exprimé en millions de FCFA, réalisé sur $x$ années et donné par la fonction B définie sur $[2; 5]$ par : $B(x) = (x^2 - 3)e^{-x} + \frac{3}{4}$.

Regroupé en association, une entreprise a décidé de financer votre projet entrepreneurial à condition que votre bénéfice minimal journalier sur une période de deux à cinq ans soit supérieur à 700.000 FCFA.

Désigné par ton association, utilise tes connaissances mathématiques, pour convaincre cette entreprise que vous êtes en mesure de satisfaire ses exigences.

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 7**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $\ln(x-3) < 1$ est $]3\,;\,e+3[$ |
| 2 | Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors la courbe $(C_f)$ admet une demi – tangente horizontale au point d'abscisse $x_0$. |
| 3 | La covariance d'une série statistique à 2 caractères X et Y, de moyennes respectives $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ et d'effectif total N est le nombre réel note : $COV(X,Y) = \frac{1}{N}\sum \boldsymbol{x_i}\,\boldsymbol{y_i} - \bar{X}.\bar{Y}$ |
| 4 | Sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $f$ définie par : $f(x) = \ln x$ est la fonction définie par $G(x) = x\ln x - x + 2$. |
| 5 | Les racines carrées du nombre complexe $a+ib$ sont les solutions du système : $\begin{cases} x^2+y^2 = \lvert a+ib \rvert \\ x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | La forme exponentielle de $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^3$ est égale à : | A | $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ |
| | | B | $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |
| | | C | $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ |
| 2 | $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$ est égale à : | A | $\frac{1}{2}$ |
| | | B | 0 |
| | | C | $+\infty$ |
| 3 | Si $f$ est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant $x_0$ et si la dérivée seconde de $f$ s'annule en $x_0$ en changeant de signe, alors le point $(x_0\,;\,f(x_0))$ est : | A | un extremum |
| | | B | un point d'inflexion |
| | | C | un centre de symétrie |
| 4 | Une enquête dans une classe a donné les résultats résumés dans le tableau ci – dessous.<br><table><tr><td></td><td>Internes</td><td>Externes</td></tr><tr><td>Filles</td><td>12</td><td>25</td></tr><tr><td>Garçons</td><td>8</td><td>15</td></tr></table>On interroge un élève au hasard. La probabilité que ce soit un garçon sachant qu'il est interne est : | A | $\frac{2}{15}$ |
| | | B | $\frac{2}{5}$ |
| | | C | $\frac{8}{23}$ |

**EXERCICE 3 (4 points)**

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le Ministère du Plan d'un pays a diligente une enquête depuis l'an 2003. Les résultats de cette enquête sont consignes dans le tableau ci-dessous.

| Années | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang X de l'année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Nombres Y de diplômés (en milliers) | 25 | 27 | 30 | 33 | 34 | 35 | 38 | 41 | 43 |

1- Représenter le nuage de points associe à la série statistique double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : 1 cm). On prendra pour origine du graphique le point $\Omega\binom{0}{24}$.

2- Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X ; Y).

3- Justifie que :

a) la variance de X est : $\frac{20}{3}$ ;

b) la covariance de X et Y est : $\frac{44}{3}$

4- a) Sachant que la variance de Y est égale a $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

b) Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5- Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carres.

a) Déterminer une équation de (D).

b) Tracer (D).

6- On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes.
Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

**EXERCICE 4 (4 points)**

***Partie I***

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

1. a) Démontre que l'équation $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$ admet une solution imaginaire $z_0$.

   b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'equation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $P(z) = 0$.

***Partie II***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité : 5 cm.

On pose $z_0 = 2 \ \ et \ \ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_n$. On note : $A_n$ le point du plan d'affixe $z_n$.

1. a) Calculer $z_1 \ et \ z_2$.

   b) Placer les points $A_0, A_1 \ et \ A_2$ dans le plan complexe.

2. On considère la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$

   a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

   b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

   c) Exprimer $U_n$ en fonction de $n$.

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

   a) Calculer $l_n$.

   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n$.

**EXERCICE 5 (4 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.
On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par : $f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$

1. a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. a) Justifier que la droite (T) ; y = - 2$x$, est tangente à (C) au point d'abscisse zéro.
   b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (T).
4. Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D) : y = 3.
5. Tracer les droites (T) et (D) puis construire (C) avec soin.
6. On pose : $\mathrm{K_t} = \int_{\mathrm{t}}^{0} (3 - f(x))\mathrm{d}x$ ou t est un nombre reel strictement négatif.
   a) Interpréter géométriquement l'intégrale $K_t$.
   b) Calculer $K_t$.
   c) Hachurer le domaine du plan constitue de point M de coordonnées (x ; y) telles que :
   $x \leq 0$ et $f(x) \leq \mathrm{y} \leq 3$.
   Déterminer l'aire du domaine hachure.

**EXERCICE 6 (4 points)**

Afin de se faire un peu d'argent de poche le jeune Bernoulli veut participer à un jeu qui consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules d'une urne. Cette urne contient 10 boules dont 5 noires ; 3 blanches et 2 rouges. Le joueur doit miser au départ la somme de 500 frs CFA. Pour chaque boule blanche tirée il réçoit la somme de 300 frs CFA sinon il réçoit juste 100 frs CFA pour chaque boule d'une autre couleur.
Il se demande si tel jeu lui est favorable. Il sollicite ton aide afin qu'à partir de tes connaissances mathématiques tu pusses l'aider à répondre à sa préoccupation afin de se décider à jouer.

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 8**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | Si P(A) = 0,3 ; P(B) = 0,2 et P$(A \cap B) = 0{,}6$ alors les événements A et B sont indépendants. |
| 2 | On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractères X et Y, le nombre réel $r$ défini par : $r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$. |
| 3 | Pour $0 < x < 2$, la fonction $x \longmapsto (2-x)^x$ est équivalente à la fonction $x \longmapsto e^{xln(2-x)}$ |
| 4 | Le système d'équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definie par : $\begin{cases} 5lnx + 2lny = 8 \\ 4lnx - 3lny = 11 \end{cases}$ a pour solution $\left(e^2 ; \frac{1}{e}\right)$. |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | On donne la propriété suivante : $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle K. S'il existe un nombre réel M tels que pour tout $x$ élément de K, $\lvert f'(x)\rvert \leq M$, alors pour tous reels $a$ et $b$ de K, on a : $\lvert f(b) - f(a)\rvert \leq M\lvert b-a\rvert$. Cette propriété est : | A | La propriété relative à l'inégalité des accroissements finis. |
| | | B | Le théorème des valeurs intermédiaires. |
| | | C | La propriété relative à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle. |
| 2 | Soit $h$ une bijevtion d'un intervalle K sur un intervalle J et $h^{-1}$ sa bijection réciproque. Si $h$ est croissante sur K, alors | A | $h^{-1}$ est croissante sur J |
| | | B | $h^{-1}$ est constante sur J |
| | | C | $h^{-1}$ est décroissante sur J |
| 3 | La fonction $h : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa derivee $h'$ est définie par : $h'(x) =$ | A | $\frac{-1}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$ |
| | | B | $\frac{-2x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$ |
| | | C | $\frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$ |
| 4 | La primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$ sur $]-\infty; 1[$ qui a la valeur -3 en 0 est la fonction | A | $x \longmapsto \frac{x^3+3x}{x-1} + 3$ |
| | | B | $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{4}{x-1} - 7$ |
| | | C | $x \longmapsto \frac{x^3-x^2+1}{(x-1)^2}$ |

### EXERCICE 3 (4 points)

1) Soit l'intégrale : K $=\int_0^\pi e^x(cos2x)dx$. A l'aide de deux intégrations part parties, montrer que : $K = \frac{e^\pi - 1}{5}$

2) Soit A $=\int_0^{\pi} e^x(cos^2x)dx$ et B $=\int_0^{\pi} e^x(sin^2x)dx$

a- Calculer A + B et A – B.

b- En déduire les valeurs exactes de A et B.

**EXERCICE 4 (4 points)**

Dans une association sportive, $\frac{1}{4}$ des femmes et $\frac{1}{3}$ des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

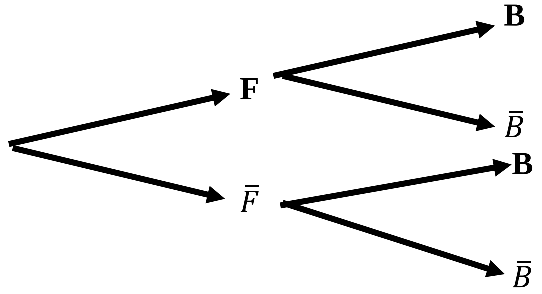
On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement : ≪ le membre choisi est une femme ≫.
- T l'évènement : ≪le membre choisi adhère à la section tennis≫

**Partie A**

1. a) Traduis les données en termes de probabilités.

b) Recopie et complète l'arbre pondéré ci – dessous par les probabilités connues :




2. Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.

3. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

**Partie B**

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b) Pour tout entier naturel non nul n, note $p_n$ la probabilité pour qu'un en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Démontrer que : $P_n = 1 - (0,7)^n$.

c) Déterminer le nombre nominal de semaines pour que : $P_n \geq 0,98$.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons : 10 sont gagnants et rapportent chacun 20.000francs les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5.000 francs puis tirer au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne. Il reçoit alors 20.000 francs par jeton gagnant.

Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5.000 francs) réalise par un jeton lors d'une partie de cette loterie.

a) Justifie que la probabilité de l'évènement E : les deux jetons tirés sont gagnants » est $\frac{1}{110}$.

b) Détermine les valeurs prises par X.

c) Détermine la loi de probabilité de X.

d) Justifie que $E(X) = -100$. Interprète le résultat obtenu.

**EXERCICE 5 (4 points)**

On considère la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2(3x-1)e^{-2x}+2 & si\ x \leq 0 \\ \frac{x\ln x}{1+x} & si\ x > 0 \end{cases}$

On note $(C_f)$ sa courbe representative dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **Unité graphique : 4 cm.**

On définit la fonction $g$ sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1. a) Calculer les limites de $g$ en 0 et en $+\infty$.
   b) Etudie le sens de variation de $g$ et dresse son tableau de variation.
2. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0; +\infty[$.
   b) Montre que $\alpha$ appartient à l'intervalle ]0,2 ; 0,3[.
   c) Déduis – en que : $\forall x \in ]0; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in ]\alpha;\ +\infty[, g(x) > 0$.
3. Etudie la continuité de $f$ en 0.
4. Etudie la dérivabilité de $f$ en 0. Donne une interprétation graphique de cette étude.
5. Calcule les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
6. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprete le resultat obtenu.
7. Etudie le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$. (on montrera que pour tout $x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$).
8. Montre que $f(\alpha) = -\alpha$ et détermine les coordonnées du point d'intersection de $(C_f)$ avec l'axe $(Ox)$.
9. Dresse le tableau de variation de $f$.
10. Construis la courbe $(C_f)$.

**EXERCICE 6 (4 points)**

En vue de préparer leur prochain devoir, deux élèves d'une classe de Terminale D du lycée de Gagnoa font des recherches à la bibliothèque dudit lycée. Ils découvrent dans le livre de Mathématiques dans la collection **''LE VALIDEUR''**, l'exercice suivant :

On considère le plan $(P)$ muni d'un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation

(E) : $z \in \mathbb{C},\ z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = 0$.

Cette équation admet une solution réelle pure $a.$ $b\ et\ c$ sont les autres solutions de l'équation (E) telle que $Im(b) = 0\ et\ Im(a) > Im(c)$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a, b\ et\ c$.

Ces deux élèves affirment que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

Donne un avis sur l'affirmation de ces deux élèves.

# MATHEMATIQUES

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 9**

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | La fonction ln est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. |
| 2 | La fonction ln est la primitive $]0\,;+\infty[$ de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. |
| 3 | On considère la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ <br> La suite $u$ est une suite arithmétique. |
| 4 | Soit $f$ une fonction numerique derivable sur un intervakke K. $a$ et $b$ sont deux elements de K tels que $a < b$. <br> S'il existe deux reels $m$ et $M$ tel que pour tout $x$ élément de $[a; b]$, on a : <br> $\mathrm{m} \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$. |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | Si $f$ et g sont deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$ telles que g ne s'annule pas. <br> Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{g}(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} =$ | A | 1 |
| | | B | On ne peut pas conclure |
| | | C | $+\infty$ |
| 2 | On donne : $COV(X,Y) = 240{,}15$ ; $V(X) = 45$ ; $\bar{X} = 17$ et $\bar{Y} = 23$. <br> La droite (D) de régression de $y$ en fonction de $x$ est la droite passant par la point moyen $G(\bar{X};\ \bar{Y})$. Une équation de cette droite est : | A | $y = 5{,}33x - 67{,}61$ |
| | | B | $y = 6{,}33x - 78{,}13$ |
| | | C | $y = 5{,}33x + 67{,}61$ |
| 3 | La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-1 + 2i$ a pour écriture complexe : | A | $z' = z - 1 + 2i$ |
| | | B | $z' = -z - 1 + 2i$ |
| | | C | $z' = (-1 + 2i)z$ |
| 4 | Si $(U_n)$ est une suite arithmétique de raison $-0{,}5$ et si $U_2 = 7$, alors $U_n$ est égal à : | A | $8 - 0{,}5n$ |
| | | B | $7 - 0{,}2n$ |
| | | C | $7 - 0{,}5n$ |

### EXERCICE 3 (4 points)

Une société ivoirienne de transformation de produits agricoles a acheté 5 000 tonnes de noix de cajou aux paysans en 2011. La société décide d'augmenter de 5% ses achats chaque annee par rapport à l'année précédente.
On note, pour tout entier naturel $n$, $Q_n$ la quantite en tonnes de noix de cajou achetee en l'an $(2011 + n)$.
On a : $Q_0 = 5\,000$.
1. Justifie que la quantité de noix de cajou achetée en 2012 est de 5 250 tonnes.
2. Démontré que $(Q_n)$ est une suite geometrique de raison 1,05.
3. a) Justifie que : $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, Q_n = 5\,000 \times (1{,}05)^n$.
   b) détermine la quantité de noix de cajou qu'achètera cette société en 2020.

Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

4. a) Détermine l'année où la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10 000 tonnes.
   b) Détermine la quantité totale de noix de cajou achetée par cette société de 2011 à fin 2020.
   Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

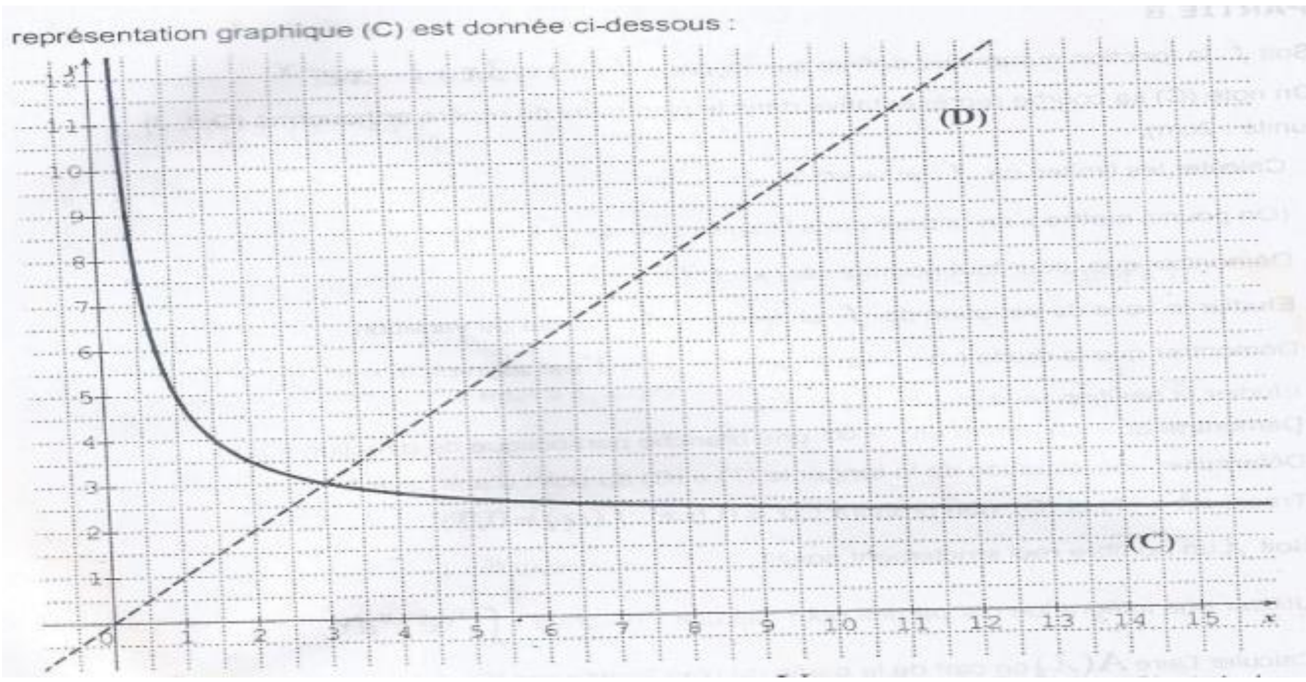
## EXERCICE 4 (4 points)

Soit la suite numérique U définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n}$

1- Soit $f$ la fonction définie sur$]0; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ et dont la représentative graphique (C) est donnée ci-dessous :
   a) Représenter sur l'axe (OI), les termes de la suite U à l'aide de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.
   b) Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite U ?

2-
   a) Démontrer que $f([1; 5]) \subset [1; 5]$
   b) En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq 5$.

3- Soit V la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n-3}{U_n+1}$
   a) Démontrer que V est une suite géométrique de raison$-\frac{1}{3}$.
   b) En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3^n}\right)$
   c) Exprimer $U_n$en fonction de $V_n$.




   d) En déduire la limite de la suite U.

## EXERCICE 5 (4 points)

***PARTIE A***

Soit la fonction $h$ derivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$. On admet que :

- $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 3$ et $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$
- Pour tout nombre réel $x, h'(x) = (2-x)e^{-x}$

1. Etudie les variations de $h$ et dresse son tableau de variation.
2. a) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$.
   b) Justifie que : $-1 < \alpha < 0$.
3. Démontre que : $\forall x \in\ ]-\infty\,;\ \alpha[, h(x) < 0$ et que : $\forall x \in\ ]\alpha\,;\ +\infty[, h(x) > 0$.

***PARTIE B***

Soit la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : : $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$.
(C) désigne la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 2 cm.
1. Détermine les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontre que pour tout nombre réel, $f'(x) = h(x)$.
3. a) Etudie les variations de $f$.
   b) Dresse le tableau de variations de $f$.

4. Démontre que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
5. Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
6. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

**EXERCICE 6 (4 points)**

A la fin de chaque mois, une nouvelle entreprise de fabrication de boisson gazeuse fait le bilan de ses recettes du mois écoulé.
Un expert en finances et ami du chef de l'entreprise, ayant obtenu des chiffres sur l'évolution financière de cette entreprise, fait une modélisation des recettes par la fonction $k$ telle que : pour tout $x \geq 1, k(x) = 3x - x \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$ où $x$ désigne le nombre de mois d'existence de l'entreprise et $k(x)$ est exprimee en millions de francs CFA.
Le chef, pour surmonter d'éventuelles difficultés que pourrait connaitre son entreprise, voudrait savoir le mois à partir duquel une baisse des recettes son enregistrée, en vue d'accroitre le capital d'investissement.
Il te sollicite. Réponds à la préoccupation du chef de l'entreprise.

**Coefficient : 4**
**Durée : 4h**
**SUJET 10**

# MATHEMATIQUES

## SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

| N° | AFFIRMATIONS |
|---|---|
| 1 | Si $\forall x \in ]0\,;\,+\infty[$, $\frac{2}{x^2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} + 2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ |
| 2 | La probabilité de X est définie pour tout entier k avec $0 \leq k \leq n$, par : $P(X = k) = C_k^n p^n (1-p)^{n-k}$ |
| 3 | L'équation d'une tangente à $(C_f)$ au point d'abscisse $x_0$ est (T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ |
| 4 | Soit $r$ le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X, Y). Si $0{,}87 \leq \lvert r \rvert \leq 1$, on considère que la corrélation linéaire est parfaite. |

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont un seul est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

| N° | AFFIRMATIONS | REPONSES | |
|---|---|---|---|
| 1 | $f$ étant une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{-1}$ sa bijection réciproque, $f$ est derivable sur $]0;+\infty[$, $f'(2) = 0$ et $f(2) = \frac{1}{2}$, alors | A | $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ |
| | | B | $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ |
| | | C | $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ |
| 2 | On pose : $Z = -\sqrt{3} + i$. On note $r$ le module de Z et $\theta$ l'argument principale de Z. $r$ et $\theta$ vérifient ….. | A | $r = 2$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$ |
| | | B | $r = 2$ et $\theta = \frac{-5\pi}{6}$ |
| | | C | $r = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$ |
| 3 | Soit f la fonction définie par f(x) = $\frac{1}{x^2-2x+1}$. Une primitive de f sur $I = ]1;+\infty[$ est F(x) = $\cdots$ | A | $\frac{-1}{x-1}$ |
| | | B | $\frac{-1}{(x-1)^2}$ |
| | | C | $\frac{1}{x-1}$ |
| 4 | La fonction : $x \longmapsto \cos(6x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction | A | $x \longmapsto 12\sin(6x^2)$ |
| | | B | $x \longmapsto -12x\sin(6x^2)$ |
| | | C | $x \longmapsto -12\sin(6x^2)$ |

### EXERCICE 3 (4 points)

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmerie d'un Lycée auprès des élèves des classes de Terminale, on apprend que 60% des élèves sont des garçons. De plus, 15% des filles et 10% des garcons sont dispensés des épreuves physiques et sportives (EPS).
On choisit un élève au hasard. On note :
D l'événement : « l'élève choisi est dispensé » et
F l'événement : « l'élève choisi est une fille »

1. a) Faire l'arbre de probabilité décrivant cette situation.
   b) Justifie que : P(D) = 0,12.
2. On choisit au hasard 3 élèves de cette promotion.
On désigne par X le nombre probable de dispensés parmi 3 élèves choisis.
   a) Donne la loi de probabilité de X.
   b) Calcule son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).
3. Soit $n$ un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $P_n$ la probabilité pour qu'au moins un élève soit dispensé parmi $n$ élèves de cette promotion.
   a) Justifie que pour tout entier naturel $n$ superieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0{,}88)^n$.
   b) Détermine la valeur minimale de $n$ pour qu'on ait : $P_n \geq 0{,}9999$.

**EXERCICE 4 (4 points)**

On considère dans s $\mathbb{C}$ le polynôme $(E)\colon z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$.
1. a) Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle $z_0$.
   b) Détermine les nombres complexes $a$ et $b$ tels que : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - z_0)(z^2 + az + b)$.
   c) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E).
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct 5O, I, J). **(Unité graphique : 2 cm).**
On donne les points A, B et C d'affixes respectives 1 ; 2 + 2i et 1 – i.
   a) Place les points A, B et C dans le repère.
   b) Calcule le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$. Déduis – en la nature du triangle OBC.
   c) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle OBC, précise son centre Ω et son rayon r.
3. Soit S la similitude directe de centre C, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   a) Détermine l'écriture complexe de S.
   b) Détermine l'affixe du point D image du point O par S.
   c) Détermine la nature du quadrilatère OCDB. Justifie ta réponse.
   d) Détermine et construis l'image (C') du cercle (C) par S.

**EXERCICE 5 (4 points)**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{1+x\ln x} \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
**(Unité graphique : 4 cm).**
1. a) Etudier la continuité de $f$ en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0.
   c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$.
   d) Démontrer que : (C) est au – dessus de (T) sur $]0;1[$ et (C) est en dessous de (T) sur $]1;+\infty[$ .
2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.
3. On suppose que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ .
   a) Démontrer que : $\forall x \in ]0;+\infty[\,,\ f'(x) = \frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$
   b) En déduire les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
4. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).
5. a) Justifier que : $\forall x \in ]0;+\infty[\,,\ f(x) \leq 1$.
   b) Démontrer que : $\forall x \in [1;e],\ 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.
6. Soit A l'aire en $cm^2$ de la partie du plan délimitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
Démontrer que : $16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$.

**EXERCICE 6 (4 points)**

La coopérative d'un village possède une forêt de 50 hectares qu'elle veut mettre en valeur à partir de 2020. Le président de la coopérative propose de mettre en valeur la première année 5 hectares et cette superficie sera augmentée de 10% chaque année par rapport à l'année précédente. Il veut savoir si cette procédure permettra de mettre les 50 hectares en valeur au plus tard en 2025. On vous demande de répondre à la préoccupation du président de la coopérative en le justifiant.