

Maths A2B

A 731

Durée : 1 heure 30 minutes

- Les deux problèmes sont obligatoires.
- Seules les traces écrites figurant sur la copie seront prises en compte.
- Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des raisonnements.
- Seules les calculatrices **non-graphiques** et **non-programmables** sont autorisées.

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte : Réalisation d'un forage pour une adduction d'eau villageoise

Le village de Tolinlin, situé dans une région semi-aride, est régulièrement confronté à des pénuries d'eau. Pour répondre à ce défi crucial, un projet d'adduction d'eau a été mis en œuvre. Le site choisi pour le forage se trouve dans une zone isolée, éloignée du village. Pour y accéder, il est prévu une piste de desserte rurale. Afin d'optimiser la construction de cette piste, l'équipe technique a proposé de la modéliser à l'aide d'une portion de la courbe représentative dans un repère orthonormé du plan, de la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = -e^{-x} + x - 3.$$

Cette modélisation permet d'analyser la forme de la piste et de prévoir d'éventuels ajustements nécessaires lors des travaux.

Sossouvi un jeune médecin originaire de Tolinlin a pris connaissance des informations relatives au projet. Il s'interroge sur l'allure de la piste et la profondeur du forage pour laquelle le pH de l'eau reste conforme aux normes de potabilité.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses relatives aux préoccupations de Sossouvi en résolvant les deux problèmes suivants.

Problème 1

- 1) a- Détermine l'ensemble de définition E de la fonction f .
- b- Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de E .
- 2) a- Précise le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
- b- Dresse le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Problème 2

Afin de s'assurer de la qualité de l'eau du forage, des mesures de son pH en fonction de la profondeur (en mètres) ont été prises. Les valeurs obtenues sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Profondeur (X)	30	40	50	60	70	80	90	100
pH de l'eau (Y)	7	7,2	7,3	7,4	7,6	7,8	8	8,2

On définit ainsi une série statistique double de variables X et Y .

- 3) Calcule la moyenne et la variance des valeurs des pH.
- 4) a- Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage de points représentant la série statistique double.
- b- Détermine une équation de la droite d'ajustement du nuage de points par la méthode de Mayer.
- c- En utilisant l'équation trouvée, donne une prédiction du pH à une profondeur de 120 m.

FIN

A 821

Durée : 1 heure 30 minutes

- Les **deux problèmes** sont obligatoires.
- Seules les traces écrites figurant sur la copie seront prises en compte.
- Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des raisonnements.
- Seules les calculatrices **non-graphiques et non-programmables** sont autorisées.

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte : Modernisation d'un jardin de jeux pour adolescents

Dans la ville de Tonagnon, le jardin de jeux pour adolescents est en pleine modernisation. Sous la supervision de Monsieur Tossou, l'équipe prévoit notamment de nouvelles zones de détente et l'installation d'un terrain de basket-ball. Avant la fermeture temporaire, 100 jeunes fréquentaient chaque semaine le centre ; à la réouverture, ce nombre restera identique la première semaine, puis augmentera de 5 visiteurs chaque semaine. L'objectif est de doubler cette fréquentation et de déterminer le nombre cumulé de visiteurs à cette date, ce qui a conduit Monsieur Tossou à modéliser l'évolution par une suite $(u_n)_{n \geq 1}$, où u_n désigne le nombre de visiteurs de la n -ième semaine.

Pour marquer la réouverture, un concours de lancer franc sera organisé. Coco, un jeune de la ville, s'y prépare activement. À cet effet, des recherches lui ont permis de savoir que la trajectoire idéale du ballon pour réussir son lancer franc est modélisée par la courbe représentative d'une fonction numérique f . Il veut étudier cette fonction et connaître la hauteur maximale atteinte par le ballon.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Tossou et Coco en résolvant les deux problèmes suivants.

Problème 1

- 1) Précise u_1 puis calcule u_2 .
- 2) a- Démontre que $u_n = 5n + 95$.
b- Détermine n pour que $u_n = 200$.
c- Détermine le nombre total de visiteurs du centre depuis la réouverture jusqu'à la fin de la semaine où l'effectif aura doublé.

Problème 2

La fonction f dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé où l'unité de longueur est $1m$, modélise la trajectoire d'un lancer franc idéal est définie par :

$$f(x) = -0,6x^2 + 3x + 2.$$

- 3) a- Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x .
- b- Étudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- c- Dresse le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.
- 4) Détermine alors la hauteur maximale atteinte par la balle lors d'un lancer idéal.

FIN

R 202

Durée : 4 heures

- Les **trois problèmes** sont obligatoires.
- Seules les traces écrites figurant sur la copie seront prises en compte.
- Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des raisonnements.
- Seules les calculatrices **non-graphiques** et **non-programmables** sont autorisées.

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte : Rénovation de la statue du roi Emanwolè

La majestueuse statue du roi Emanwolè, figure emblématique de l'histoire de la ville de ICHEDJA, a récemment été rénovée pour restaurer son éclat et préserver ce monument chargé de symboles.

La rénovation s'est déroulée en deux phases distinctes :

- les travaux essentiels, comprenant la structure et la sécurité ;
- les travaux secondaires, liés à la décoration et à l'esthétique.

Exprimés en millions de francs CFA, le coût des travaux essentiels (a) dépasse de 42 (millions) celui des travaux secondaires (b). Pour garantir une gestion optimale et une organisation harmonieuse des travaux, les coûts a et b doivent également satisfaire la contrainte suivante : $PPCM(a, b) = 720$.

Les travaux liés à la structure ont porté, entre autres, sur le socle de la statue, dont la base a la forme d'un quadrilatère $PQRS$.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, les affixes z_P, z_Q, z_R et z_S des points P, Q, R et S sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec :

$$P(z) = z^4 - (3 - 3i)z^3 + (2 - 8i)z^2 + (6 + 6i)z - 12 - 4i,$$

et soumises aux conditions :

- z_P est un nombre réel,
- z_Q et z_R sont opposés,
- $\text{Im}(z_R) < 0$

Afin de préserver la statue et la mettre en valeur, une barrière transparente a été érigée tout autour du socle, respectant une hauteur minimale pour protéger l'œuvre tout en permettant une bonne visibilité. Une décoration lumineuse a également été installée pour illuminer le site et le rendre encore plus attrayant.

Lors de l'inauguration, Bashiri, un élève fasciné par les mathématiques, s'intéresse aux problèmes liés au projet tels que la nature et l'aire du quadrilatère représentant la base du socle, le coût total du projet, la hauteur minimale de la barrière, les modèles mathématiques employés dans la conception de la barrière transparente et la décoration lumineuse.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Bashiri en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1) Soit z_0 un nombre complexe.

Calcule $P(z_0) - P(-z_0)$.

Déduis-en z_Q et z_R .

2) Détermine z_P puis z_S .

3) Démontre que le quadrilatère $PQRS$ est un trapèze rectangle et calcule son aire.

4) a- Détermine PGCD(720,42).

b- Détermine le coût total du projet.

Problème 2

La barrière a été réalisée à l'aide de quatre poteaux implantés en des endroits spécifiques assimilés aux points notés A, B, C et O . Ces piquets marquent les sommets d'une figure géométrique régulière qui délimite le périmètre autour du monument.

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J, K) convenablement choisi, on a : $A(2; 0; 2)$, $C(-1; 0; 1)$. Le point B est l'image du point A par la réflexion s de plan (Q) qui transforme O en C .

La hauteur de la barrière est OH où H est l'image de O par l'application g de l'espace qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{OI} \wedge (\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}.$$

- 5) Justifie qu'une équation cartésienne de (Q) est : $x - z + 1 = 0$.
- 6) a- Détermine l'expression analytique de la réflexion s .
b- Détermine les coordonnées du point B .
- 7) a- Vérifie que les points O, A, B et C sont coplanaires.
b- Justifie que le quadrilatère $OABC$ est un rectangle.
- 8) Détermine la nature de g puis la hauteur de la barrière.

Problème 3

La décoration lumineuse est inspirée de deux courbes (T_1) et (T_2) . Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe (T_1) est la réunion de la représentation graphique de la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = (x - 1)\sqrt{1 - \ln x}$ et de son symétrique par rapport à la droite d'équation : $y = \frac{5}{e}x - 5$; et (T_2) est l'ensemble des points M du plan tels que $ME + MF = 3$ où on a : $E(2; -1)$ et $F(1; -3)$.

- 9) a- Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
b- Étudie la dérivabilité de f sur D_f puis calcule $f'(x)$ en tout x de D_f où f est dérivable.
- 10) On considère la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par : $u(x) = -2x \ln x + x + 1$.
a- Étudie les variations de u .
b- Démontre que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a et que $2 < a < 2,1$.
c- Déduis-en le signe de $u(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
- 11) Achève l'étude des variations de f .
- 12) Démontre que (T_2) est une ellipse dont tu préciseras le centre, le grand axe, le petit axe et l'excentricité.
- 13) Représente (T_1) et (T_2) dans le même repère.

FIN

R 312

Durée : 4 heures

- Les **trois** problèmes sont obligatoires.
- Seules les traces écrites figurant sur la copie seront prises en compte.
- Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des raisonnements.
- Seules les calculatrices **non-graphiques** et **non-programmables** sont autorisées.

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte : « EcoTognon, la ville écologique »

Le conseil municipal de Tognon s'est lancé dans un projet pilote baptisé « EcoTognon », visant à faire de la ville un exemple d'optimisation de la gestion des déchets à l'aide d'outils technologiques et mathématiques de pointe. Trois axes d'innovation ont guidé ce projet :

- La cartographie des points de dépôt.
- La prévision et la maîtrise des coûts de collecte.
- L'automatisation du centre de recyclage avec une grue robotisée.

Les zones de collecte sont assimilées aux points A , B , C et D et le futur centre de recyclage au point E .

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les affixes z_A , z_B , z_C et z_D des points A , B , C et D sont les racines du polynôme complexe :

$$P(z) = 4z^4 + (-4 + 9i)z^3 + (-23 + 2i)z^2 + (12 - 14i)z + 36 - 52i,$$

et soumises aux conditions : $z_A \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Re}(z_C) < \operatorname{Re}(z_D) < \operatorname{Re}(z_B)$.

Le point E quant à lui est l'image du point B par la rotation σ de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Afin de moderniser le circuit des camions, la municipalité a développé un modèle de *coût de collecte* en fonction de la distance parcourue et le centre de recyclage a été équipé d'une grue capable de déplacer les déchets non recyclables. Dans ce centre, la trajectoire de la grue modélise une portion d'une droite (Δ) .

Kodjo, le fils du maire, amateur de sciences et de nouvelles technologies, est impressionné par le projet. Il se préoccupe :

- de connaître la position des points de collecte et le centre de recyclage ;
- de l'optimisation du coût de la collecte ;
- de la trajectoire suivant laquelle la grue robotisée doit se déplacer.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Kodjo en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

- 1) a- Calcule : $P(2)$, $P(-2)$ et $P(2 - 2i)$.
b- Détermine le polynôme Q du second degré tel que pour tout nombre complexe z , $P(z) = [z^2 - (4 - 2i)z + 4 - 4i]Q(z)$.
c- Calcule : $(4 + 7i)^2$.
d- Déduis-en la résolution dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation : $P(z) = 0$.
- 2) a- Justifie que les points A, B, C et D ont respectivement pour affixes 2 , $2 - 2i$, $-2 - i$ et $-1 + \frac{3}{4}i$.
b- Place les points A, B, C et D dans le plan muni d'un repère, puis justifie que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.
- 3) a- Détermine l'écriture complexe de la similitude σ .
b- Construis le point E sur la figure.

Problème 2

Pour optimiser le circuit des camions, la municipalité a élaboré un modèle de coût mensuel de collecte en fonction de la distance parcourue. Un programme informatique permet de suivre en temps réel l'évolution des coûts, grâce à l'analyse des données collectées par les capteurs installés sur les véhicules. L'objectif est de garantir que le budget de 500 000 francs CFA alloué à la collecte ne soit pas dépassé. La fonction f modélisant ce coût est la la solution de l'équation différentielle

$$(E): y'' - 2y' + y = -x + 8$$

vérifiant $f(3) = 3$ et $f'(3) = 0$.

$f(x)$ (en centaines de milliers de francs CFA) en fonction de la distance x (en centaines de km) parcourue par les camions.

On désigne par (C_f) , la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- 4) a- Justifie que la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = -x + 6$ est solution de (E) .
b- Démontre qu'une fonction g dérivable sur \mathbb{R} est solution de (E) , si et seulement si, $g - \varphi$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.
c- Déduis-en les solutions de l'équation (E) .
d- Justifie que la fonction f est définie par : $f(x) = (x - 3)e^{x-3} - x + 6$.
- 5) a- Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x élément de \mathbb{R} .
b- Étudie les variations de la fonction f' .
c- Démontre que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique que tu préciseras.
d- Détermine le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
e- Achève l'étude des variations de f .

- 6) a- Étudie les branches infinies de la courbe (C_f) .
 b- Construis (C_f) .
 c- Précise le coût minimal du traitement des déchets et la distance parcourue par les camions correspondant à ce coût.
 d- En utilisant la courbe (C_f) , indique l'intervalle dans lequel se situe la distance à parcourir par les camions pour que le budget ne soit pas dépassé.

Problème 3

Dans le nouveau centre de recyclage, la grue se déplace dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct.

- La droite (D) de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$
 est la trajectoire empruntée par des tapis roulants amenant les déchets vers la zone de tri.
- la droite (D') de système d'équations cartésiennes :
$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
 est la trajectoire suivant laquelle les conteneurs sont rechargés.

Pour des raisons d'ergonomie et d'optimisation énergétique, la direction de la grue doit être choisie de sorte qu'elle soit perpendiculaire aux droites (D) et (D') .

7) Démontre que les droites (D) et (D') sont non coplanaires.

8) a- Justifie qu'une équation cartésienne du plan (P) contenant la droite (D) et parallèle à la droite (D') est : $13x + 5y - z - 3 = 0$.

b- Justifie qu'une équation cartésienne du plan (P') contenant la droite (D') et perpendiculaire à (P) est : $-13x + 25y - 44z + 57 = 0$.

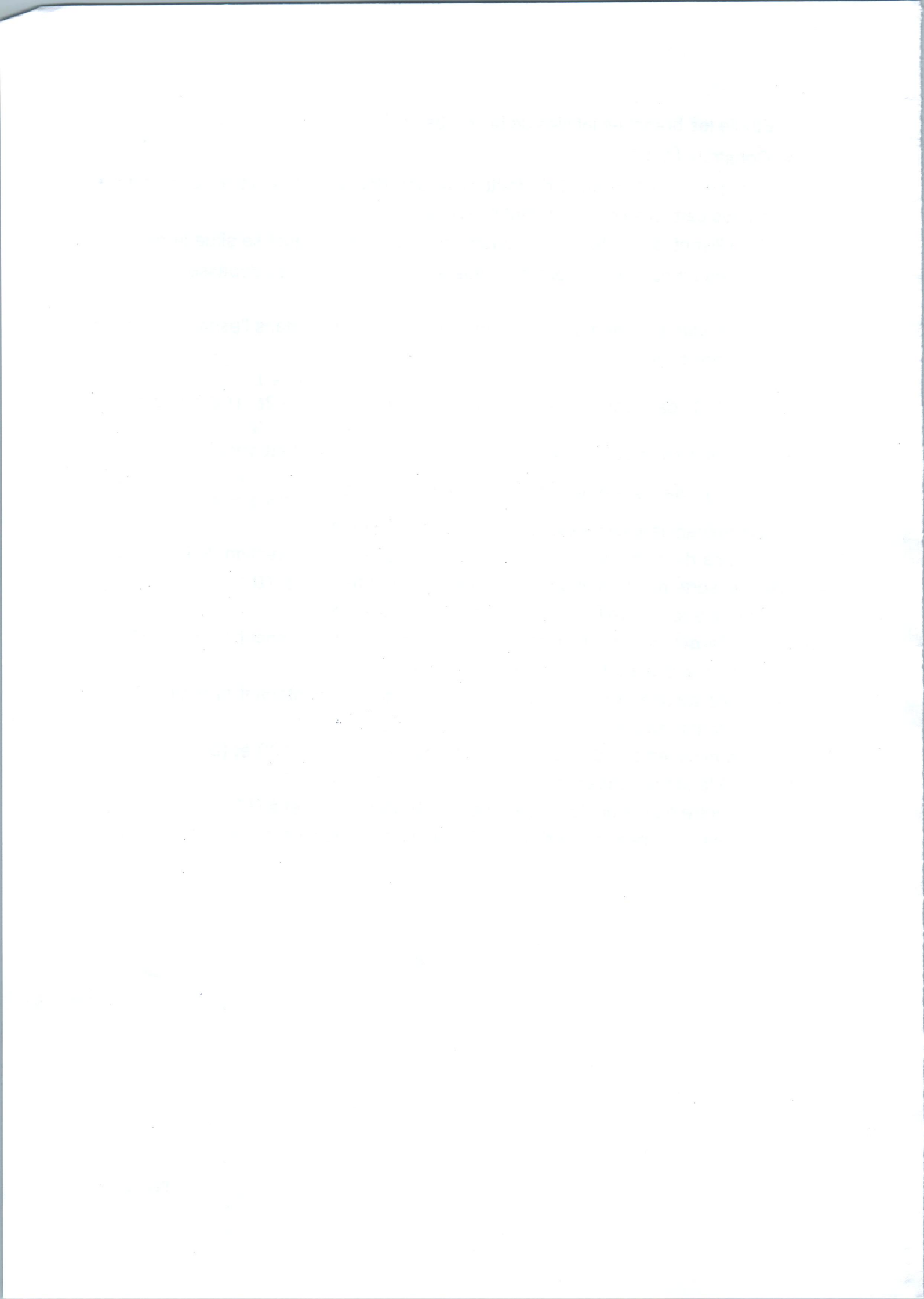
c- Détermine les coordonnées du point d'intersection I de (P') et (D) .

9) Soit (D_1) la droite passant par le point I et orthogonale à (P) .

a- Démontre que la droite (D_1) est perpendiculaire à (D) et à (D') .

b- Précise un repère de la droite (Δ) indiquant la direction du mouvement de la grue.

FIN



R 632Durée : 4 heures

- Les **deux exercices et le problème** sont obligatoires.
- Seules les traces écrites sur la copie seront prises en compte.
- Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des raisonnements.
- Seules les calculatrices **non-graphiques** et **non-programmables** sont autorisées.

Exercice 1

Une usine est réputée dans la fabrication d'une pièce de rechange d'un moteur de voiture. Une étude a révélé que chaque pièce produite par cette usine pouvait avoir deux types de défaut : un défaut de forme avec une probabilité égale à $\frac{5}{100}$ et un défaut de masse avec une probabilité égale à $\frac{3}{100}$.

L'étude a aussi précisé que les deux défauts sont indépendants. Une pièce est dite défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts.

- 1) On choisit au hasard une pièce dans un lot de pièces fabriquées.
 - a- Détermine la probabilité que la pièce ait un et un seul défaut.
 - b- Justifie que la probabilité que la pièce soit défectueuse est égale à 0,0785.
- 2) Une entreprise a reçu de l'usine n pièces, n étant un entier naturel non nul. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces non défectueuses parmi les n pièces.
 - a- Détermine la probabilité p_n d'avoir toutes les pièces non défectueuses.
 - b- Détermine la grande valeur de n pour laquelle $p_n > 0,6$.

Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) On considère la transformation f_1 qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$, associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels tels que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x \end{cases}$$

- a- Détermine l'écriture complexe de f_1 .

- b- Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de f_1 .
- 2) f_2 est la similitude plane directe de centre Ω d'affixe $1 + 2i$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
- a- Démontre f_2 a pour écriture complexe : $z' = (1 + i)z + 2 - i$.
- b- Détermine l'expression analytique de $s = f_2 \circ f_1$.
- c- Détermine la nature de la bijection réciproque s^{-1} de s .
- 3) Soit (Γ) la courbe d'équation $(x + y - 1)^2 + 4\sqrt{2}(x - y - 3) = 0$.
- a- Détermine une équation cartésienne de l'image (γ) de (Γ) par s^{-1} .
- b- Détermine la nature et les caractéristiques de (γ) .
- Déduis-en la nature de (Γ) .

Problème

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = e^{-x} \ln(2 + e^x)$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit u la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$u(x) = \frac{e^x}{2+e^x} - \ln(2 + e^x).$$

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_u de la fonction u .
 - 2) Justifie que $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\ln 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty$.
 - 3) Étudie les variations de u .
 - 4) Détermine le signe de $u(x)$ pour tout x de D_u .
 - 5) Justifie que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}u(x)$.
 - 6) Achève l'étude des variations de f .
 - 7) a- Étudie les branches infinies de la courbe (C_f) .
 - b- Construis (C_f) .
 - 8) Justifie que l'équation $f(x) = 1$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α .
 - 9) a- Démontre que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I à préciser.
- On note g cette bijection et g^{-1} sa bijection réciproque.
- b- Démontre que g^{-1} est dérivable en 1 et exprime $(g^{-1})'(1)$ en fonction de e^α uniquement.
- c- Construis la courbe (γ) de g^{-1} dans le même repère que (C_f) .

FIN

R 452Durée : 3 heures

- Les **deux exercices et le problème** sont obligatoires.
- Seules les traces écrites figurant sur la copie seront évaluées.
- Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des raisonnements.
- Seules les calculatrices **non-graphiques et non-programmables** sont autorisées.

Exercice 1

On pose $P(z) = z^3 + (-2 - i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i$, où z est un nombre complexe.

On considère l'équation $(\Sigma) : P(z) = 0$.

- 1) a- Justifie que $z_0 = 1 + i$ est une solution de (Σ) .
 b- Détermine le polynôme Q de degré deux tel que pour tout nombre complexe z , $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.
 c- Résous alors l'équation (Σ) dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.
- 2) Dans le plan complexe, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $i, 1 + i$ et $1 - i$.
 a- Détermine la nature du triangle ABC .
 b- Détermine une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (Γ) désigne l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $4x^4 - 24x^2 - y^4 + 36 = 0$.

- 1) Développe et réduis l'expression $(2x^2 + y^2 - 6)(2x^2 - y^2 - 6)$.
- 2) Dédus-en que l'ensemble (Γ) est la réunion d'une ellipse (E) et d'une hyperbole (H) dont tu préciseras les équations réduites.
- 3) a- Précise les sommets de (E) et son excentricité.
 b- Détermine les équations des asymptotes de (H) .
 c- Prouve que le point $B(2; -\sqrt{2})$ appartient à (H) puis détermine une équation de la tangente à la courbe (H) en B .

Problème

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = -e^{-x+1} + \ln(x+1) - \frac{3}{2}x + 3.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Partie A :

On considère la fonction u définie sur $] -1; +\infty[$ par : $u(x) = e^{-x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}$.

- 1) a- Détermine $u'(x)$ pour tout x élément de $] -1; +\infty[$.
b- Justifie que pour tout x élément de $] -1; +\infty[$, on a : $u'(x) < 0$.
c- Déduis-en le sens de variation de u .
- 2) a- Calcule $u(1)$.
b- Déduis-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x appartenant à l'intervalle $] -1; +\infty[$.

Partie B :

- 3) a- Détermine l'ensemble de définition E de la fonction f .
b- Calcule les limites de f aux bornes de E .
- 4) a- Détermine $f'(x)$ pour tout élément x de E .
b- Achève l'étude des variations de f et dresse son tableau de variations.
- 5) a- Étudie les branches infinies de la courbe (C).
b- Construis la courbe (C).
- 6) a- À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_0^1 \ln(x+1) dx$.
Tu pourras remarquer que : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.
b- Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

FIN

R 642

Durée : 4 heures

- Les **deux exercices et le problème** sont obligatoires.
- Seules les traces écrites figurant sur la copie seront prises en compte.
- Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des raisonnements.
- Seules les calculatrices **non-graphiques et non-programmables** sont autorisées.

Exercice 1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$ et

$$v_n = u_n + k \text{ avec } k = -\int_1^e \frac{6 \ln x}{x} dx.$$

- 1) Justifie que $k = -3$.
- 2) Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique puis précise sa raison et son premier terme.
- 3) Exprime u_n en fonction de n .
- 4) Calcule $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2025}$.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'équation $(E) : z^3 - 8z^2 + 32z - 64 = 0$.

On désigne par A, B et C les points du plan complexe dont les affixes respectives a, b et c sont les solutions de l'équation (E) avec $\text{Im}(a) \leq \text{Im}(b)$ et $c \in \mathbb{R}$.

Soit (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telle que : $|z + c| = \sqrt{5} \text{Re}(z)$.

- 1) a- Vérifie que 4 est une solution de l'équation (E) .
b- Résous dans \mathbb{C} , l'équation (E) puis justifie que $a = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $b = 2 + 2i\sqrt{3}$.
- 2) a- Écris sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{a-c}{b-c}$.
b- Déduis-en la nature du triangle ABC .

3) a- Démontre que $M \in (H) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - y^2 - 8x - 16 = 0 \end{cases}$

b- Justifie que (H) est une portion d'une hyperbole (Γ) dont tu préciseras l'excentricité.

c- Construis (H) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Problème

Le nombre e désigne la base de la fonction logarithme népérien. On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{ex}{u(x)}$, où u est la solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' - y = -x$ vérifiant : $u'(0) = 2u(0) = 2$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1) Vérifie que la fonction $g : x \mapsto x$ est une solution de (E_1) .

2) Résous l'équation différentielle $(E_2) : y'' - y = 0$.

3) a- Démontre qu'une fonction h dérivable sur \mathbb{R} est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $(h - g)$ est une solution de (E_2) .

b- Dédus-en que pour tout nombre réel x , $u(x) = x + e^x$.

4) a- Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une unique solution α telle que $-1 < \alpha < 0$.

b- Dédus-en l'ensemble de définition de f .

5) Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variations.

6) Précise les asymptotes de (C) .

7) Construis (C) dans le repère orthonormé (O, I, J) . Tu prendras $-0,57$ pour valeur approchée.

FIN