COURS D'APPUI | ANNEE SCOLAIRE 2020-2021

Classe : TleC | Date : Vendredi 11 JUIN 2021

Prof : M.NASSA | Durée : 4h

EXAMEN DE MATHEMATIQUES

EXERCICE1(4pts)

On pose $a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $b = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $c = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Partie A

1) Exprimer a^6 , b^6 et c^6 sous forme algébrique.
2) En déduire une solution de l'équation (E) : $z \in C, z^6 = -8i$
3) Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
a) Vérifier que $j^3 = 1$
b) Démontrer que jb *et* j^2b sont aussi des solutions de (E).
c) En déduire toutes les solutions de (E). Les écrire sous forme algébrique.

Partie B

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :
$$\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$$

2) Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant les deux propositions suivantes :
- a^n est un nombre réel
- b^n est un nombre imaginaire pur.

EXERCICE2(4pts)

L'unité de longueur est le centimètre.

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$.

G_1 est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3)

G_2 est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; -3).

1. a) Construire les points G_1 et G_2

   b) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$

   c) Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{3}$

2. Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$

S la similitude directe qui applique A sur B et C sur D

a) Construire les points C et D

b) Calculer le rapport de S .

c) Justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$

. On note Ω le centre de S .

a) Démontrer que Ω appartient à (Γ) et à (E). Placer Ω.

b) Démontrer que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{-2\pi}{3}$.

c) En déduire que les points A , C , D et Ω appartiennent à un même cercle (C).

Construire (C).

PROBLEME(12pts)

Soit, pour tout entier naturel k non nul, la fonction f_k définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f_k(x) = x - k - \frac{k\ln x}{x}$.
La représentation graphique de f_k dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormal est notée (C_k).
Unité graphique : 2 cm.

Partie A

1. Soit pour tout entier naturel k, la fonction g_k définie par : $g_k(x) = x^2 - k + k\ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g_k ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique notée $\propto_k$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[1\ ;3]$.

2. Établir que, pour x élément de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f_k'(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$.

Étudier le signe de $g_k(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k.

3. a) Étudier les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = x - k$ est asymptote à la courbe (C_k).

c) Étudier la position de (C_k) par rapport à (D_k).

Partie B

Étude des cas particuliers k = 1 et k = 2.

1- $\propto_k$ étant le nombre défini en **A-1**, montrer que : $\propto_1 = 1$ et $1{,}2 < \propto_2 < 1{,}3$.

2. a) Montrer que : $f_2(\propto_2) = 2\propto_2 - 2 - \frac{2}{\propto_2}$.

b) Utiliser l'encadrement de $\propto_2$ pour donner un encadrement de $f_2(\propto_2)$.

3. Donner les tableaux de variation de f_1 et f_2.

4. Représenter dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2).

5. Calculer en cm^2, la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = 2$ et $y = x - 1$.

Partie C

1. Pour tout entier k non nul et pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, calculer $f_{k+1}(x) - f_k(x)$.
Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a) Étudier le sens de variation de h ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0\ ;1[$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $f_k(\beta) = \beta$.

3. a) A l'aide des résultats obtenus dans les questions **1** et **2** de cette partie **C**, établir que toutes les courbes (C_k) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_{k+1}) et (C_k).

FIN !