PREPA BAC FICHE 2 MATHEMATIQUES

Exercice1

Pour chacune des proposition suivantes, dis si elle est vraie (V) ou fausse (F) .

Exemple : $\boldsymbol{5 - V}$.

1. S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]a; +\infty[$ tels que :

   $\forall x \in]0; +\infty[\,, |f(x) + l| \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

2. L'équation $x^3 + x - 7 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution.
3. Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a; +\infty[$, alors, on a : $f([a; +\infty[) = [f(a); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$.
4. La fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{8-2x}{\sqrt{x}-2}$ admet un prolongement par continuité en 4.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 9x - 2} = +\infty$.

Exercice2

Pour chacune des propositions suivantes, indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse. ***Exemple :*** $\boldsymbol{5 - c}$.

	Enoncé	a	b	c
1.	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$. On a :	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$	$f'(x) = \frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$	$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$
2.	Soit g une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et g^{-1} sa bijection réciproque. Si $g(-2) = 3$ et $g'(-2) = \frac{1}{4}$, alors $(g^{-1})'(3)$ est égale à	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	4
3.	F et f sont deux fonctions continues sur un intervalle K. Si f est une primitive de F sur K, alors on a :	$F'(x) = f(x)$	$f'(x) = F(x)$	$F'(x) = f'(x)$.
4.	Une primitive F sur $]1; +\infty[$ de la fonction f telle que : $f(x) = \ln x$ est définie par :	$F(x) = xlnx - x$	$F(x) = x\ln x + x$	$F(x) = \ln x - 1$
5.	u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K. Une primitive sur K de $u'u^r$ (avec $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$) est :	u^{r+1}	ru^{r-1}	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$

PREPA BAC FICHE 2 MATHEMATIQUES

Exercice 3

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x|x^2 - 1|$.

1. Ecris h sans symbole de valeur absolue.
2. Etudie la dérivabilité de h en -1.
3. On considère g la restriction de h à $[0; 1]$.
   a. Justifie que : $\forall t \in [0; 1], \quad -2 \leq g'(t) \leq 1$.
   b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que :
   $\forall x \in [0; 1], \quad -2x \leq g(x) \leq x$.

Exercice 4

Sur un dé cubique non pipé l'une des faces est numérotée 1, n faces $(0 \leq n \leq 5)$ sont numérotées 2 et les faces restantes sont numérotées 3.
Les faces d'un second dé cubique non pipé sont numérotées 1; 2 ; 2; 3; 4 et 4.
Les deux dés sont lancés simultanément .
Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la somme des points marqués sur les faces supérieures.

1. Démontre que : $p(X = 6) = \frac{n+5}{36}$.
2. On suppose que $n = 2$.
   b. Détermine la loi de probabilité de X.
   c. Justifie que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 5.
   d. Calcule l'écart-type de X.

Exercice 5

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-1-x\ln x}{x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $2cm$.

1. Calcule la limite de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
2. a. Calcule les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.
   b. Interprète graphiquement les résultats.
3. a. Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1-x}{x^2}$.
   b. Détermine le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4. a. Démontre que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en deux points
   A et B d'abscisses respectives α et β tels que : $\alpha < \beta$.

   b. Justifie que : $6{,}3 < \beta < 6{,}4$.
5. On prendra : $\alpha = 0{,}3$ et $\beta = 6{,}35$.
   Trace (C) dans le repère (O, I, J).
6. Soit g la restriction de f à $]0; 1]$.
   a. Démontre que g est une bijection de $]0; 1]$ sur intervalle K que tu détermineras.
   b. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g. Dresse le tableau de variation de g^{-1}.

Exercice 6

Pour réduire le nombre d'accidents de la circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes, la gendarmerie nationale utilise un nouvel alcootest. Après un essai, dans une population composée de 8% de personnes ivres, la gendarmerie recueille les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test.
- 95% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test.

Le commandant de brigade de la gendarmerie de ta localité voudrait savoir le nombre minimal d'automobilistes à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure à 0,99.
Il te sollicite pour trouver ce nombre.
Utilise tes connaissances de terminale D pour répondre à la préoccupation du commandant.