

Exercice 01

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \ln(2-x) + \ln(x+3)$; 2) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

3) $f(x) = \frac{\ln x}{1-\ln x}$; 4) $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$; 5) $f(x) = \sqrt{2-\ln x}$

Solution :

1) $f(x) = \ln(2-x) + \ln(x+3)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2-x > 0 \text{ et } x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 2 \text{ et } x > -3$$

Donc: $D_f =]-\infty; 2[\cap]-3; +\infty[=]-3; 2[$

2) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

On résoudre l'équation $x^2 - 5x + 6$

$$\Delta = 1 > 0 \text{ donc } x = 2 \text{ ou } x = 3$$

On dresse le tableau de signe de $x^2 - 5x + 6$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	0	0	+

Donc: $D_f =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1 - \ln x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e$$

Donc: $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

4) $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \ln x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } (x \neq 0 \text{ ou } \ln x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1$$

Donc: $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

5) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 2 - \ln x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \leq e^2$$

Donc $D_f =]-\infty; e^2[\cap]0; +\infty[=]0; e^2[$

Exercice 02

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

(E₁): $\ln(x-1) = 0$; (E₂): $3 - \ln x = 0$

(E₃): $\ln(x^2 + x + 1) = 0$; (E₄): $(x+2) \ln(x-3) = 0$

(E₅): $\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$; (E₆): $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$

Solution :

(E₁): $\ln(x-1) = 0$

On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Donc: $D_E =]1; +\infty[$

$$\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

On note par S l'ensemble des solutions de l'équation

Donc: $S = \{2\}$

(E₂): $3 - \ln x = 0$

$$x \in D_E \Leftrightarrow x > 0$$

Donc: $D_E =]0; +\infty[$

$$3 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3$$

Donc $S = \{e^3\}$

$$(E_3): \ln(x^2 + x + 1) = 0$$

On note par D_f l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$$

$$\text{Donc: } D_f = \mathbb{R} ;$$

$$\text{car } (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 > 0 ; \Delta = -3 < 0$$

$$\ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{Donc: } S = \{0; -1\}$$

$$(E_4): (x + 2) \ln(x - 3) = 0$$

On note par D_f l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\text{Donc: } D_f =]3; +\infty[$$

$$(x + 2) \ln(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ ou } \ln(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2 \notin D_f \text{ ou } x = 4$$

$$\text{Donc: } S = \{4\}$$

$$(E_5): \ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc: } D_f =]0; +\infty[$$

$$\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 + \ln(x) - 2 = 0$$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

$$(E_5) \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0 \text{ Avec } X = \ln(x)$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

$$X = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2}$$

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = -2$$

$$\ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -2$$

$$x = e \quad \text{ou} \quad x = e^{-2}$$

$$\text{Donc: } S = \{e; e^{-2}\}$$

$$(E_6): \ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$$

Ensemble de définition :

$$x - 3 > 0 \text{ et } 9 - x > 0 \quad \text{donc } x > 3 \text{ et } x < 9$$

L'équation est définie sur l'intervalle $]3; 9[$.

$$\text{Donc: } D_f =]3; 9[.$$

$$\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0 \Leftrightarrow \ln[(x - 3)(9 - x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x - 3)(9 - x)] = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(9 - x) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$$

$$x = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition $]3; 9[$.

$$\text{Donc: } S = \{6 - 2\sqrt{2}; 6 + 2\sqrt{2}\}$$

Exercice 03

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$(I_1): \ln(x) - 1 \geq 0 \quad ; \quad (I_2): \ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$$

$$(I_3): \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0 \quad ; \quad (I_4): \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$$

Solution :

$$(I_1): \ln(x) - 1 \geq 0$$

On note par D_f l'ensemble de définition de l'inéquation

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc: } D_f =]0; +\infty[$$

$$\ln(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow x \geq e$$

$$\Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$$

$$\text{Donc: } S = [e; +\infty[\cap]0; +\infty[= [e; +\infty[.$$

$$(I_2): \ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$$

L'inéquation est définie si : $3-x > 0$ et $x+1 > 0$

Donc $x < 3$ et $x > -1$

L'inéquation est définie sur $]-1; 3[$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(3-x) \leq \ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 3-x \leq x+1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x$$

L'ensemble solution est donc $]-1; 3[\cap [1; +\infty[$

Donc $S = [1; 3[$.

$$(I_2): \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0$$

L'inéquation est définie si $1 - \frac{2}{x} > 0$; Donc $\frac{x-2}{x} > 0$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	0	+	+
x-2	-	-	0	+
$\frac{x-2}{x}$	+	-	0	+

Donc : $D_f =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} > 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

L'ensemble solution est donc $]-\infty; 0[\cap (]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[)$

Donc $S =]-\infty; 0[$.

$$(I_4): \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc: } D_f =]0; +\infty[$$

> Résoudrons l'équation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

$$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \quad ; \text{ avec } X = \ln(x)$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$$

$$X = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{3 + \sqrt{1}}{2}$$

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = 2$$

$$\ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 2$$

$$x = e \quad \text{ou} \quad x = e^2$$

> Tableau de signe de $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = (\ln x - 1)(\ln x - 2)$

x	0	e	e^2	$+\infty$	
$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2$	+	0	-	0	+

> Donc les solution de l'inéquation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$

est $S =]e; e^2[$

Exercice 04

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \quad ; \quad (S_2): \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

Solution :

$$(S_1): \begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \quad ; (S_1) \text{ est défini si } x > 0 \text{ et } y > 0$$

1^{ère} méthode:

$$\begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4 - 7\ln y}{3} \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7\ln y}{3} \\ 2\frac{4-7\ln y}{3} + 5\ln y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7\ln y}{3} \\ 8-14\ln y + 15\ln y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7\ln y}{3} \\ \ln y + 8 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7\ln y}{3} \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7}{3} \\ \ln y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1} \\ y = e \end{cases}$$

Donc : $S = \{(e^{-1}; e)\}$

2^{ème} méthode :

On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$ donc

$$\begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + 7Y = 4 \\ 2X + 5Y = 3 \end{cases}$$

Par la méthode de déterminant on a :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$$

$$D_X = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$$

$$\text{Donc } X = \frac{D_X}{D} = -1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{D_Y}{D} = 1$$

$$\text{Donc } \ln(x) = -1 \quad \text{et} \quad \ln(y) = 1$$

$$\text{Donc } x = e^{-1} \quad \text{et} \quad y = e$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-1}; e)\}$$

$$(S_2): \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} ; (S_2) \text{ est défini si } x > 0 \text{ et } y > 0$$

1^{ère} méthode :

On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$ donc

$$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = -10 \\ X + Y = 3 \end{cases}$$

Rappel :

Pour déterminer deux réels x et y tels que

$x + y = S$ et $x \times y = P$ avec S et P donnés

On résout l'équation $t^2 - St + P = 0$

Donc on résout l'équation $t^2 - 3t - 10 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49$$

$$X = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{3 + \sqrt{49}}{2}$$

$$X = -2 \quad \text{et} \quad Y = 5$$

$$\ln x = -2 \quad \text{et} \quad \ln y = 5$$

$$x = e^{-2} \quad \text{et} \quad y = e^5$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$$

2^{ème} méthode :

$$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\ln y - \ln^2 y + 10 = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 y - 3\ln y - 10 = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln y + 2)(\ln y - 5) = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = -2 \text{ ou } \ln y = 5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \text{ ou } y = e^5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ \ln x = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ \ln x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ x = e^5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ x = e^{-2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$$

Exercice 05

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln(\sqrt{x})}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$
 g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x + \frac{1}{x})$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$; k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$

Solution :

Rappel (F.I): $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty$.

b) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

c) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a, comme limite d'un

quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$

d) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 \ln x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^2 \ln x = 1 + 0 = 1$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{2} x \ln x} = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$; $0 < x < 1 \Rightarrow \ln(x) < 0$

f) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln \left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right)}{x} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2) + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} - 1 \right]$$

$$= -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} = 0$$



j) Il s'agit d'une forme indéterminée de type $^+\infty, 0^+$.

On pose $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$;

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X)$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

Car $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt{x^2})^2}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

On pose $X = \sqrt{x}$ donc $x = X^2$;

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln X}{X} \right)^2$$

$$= 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X} = 0$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x})^3 (\ln(\sqrt[3]{x})^3)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x})^3 (3 \ln \sqrt[3]{x})^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})^3$$

On pose $X = \sqrt[3]{x}$ donc $x = X^3$;

or $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X \rightarrow 0^+} (3 X \ln X)^3 = 0$$

; (car $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$)

Exercice 06

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \ln x$

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f)
- 2) Étudier la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta): y = -x$
- 3) Déterminer les variations de la fonction f
- 4) Étudier la convexité de la fonction f .
- 5) Tracer (D) et (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution :

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x + \ln x$$

$$= -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x+\ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \ln(x) + x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant la droite (Δ) d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$

2) Étudier la position relative de (Cf) et la droite (Δ): $y = -x$

$$\begin{aligned}f(x) - (-x) &= 1 - x + \ln(x) + x \\ &= 1 + \ln(x)\end{aligned}$$

Cherchons le signe de $1 + 2 \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$

$$\begin{aligned}1 + 2 \ln(x) &= 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \\ \Leftrightarrow x &= e^{-1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x) + x$		-	0
Position relative	(Cf) est en dessous de (Δ)	Point d'intersection $A\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$	(Cf) est en dessus de (Δ)

3) Sur $]0 ; +\infty[$ f est dérivable et, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1[$ et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			0	
			$\nearrow$	$\searrow$
			$-\infty$	$-\infty$

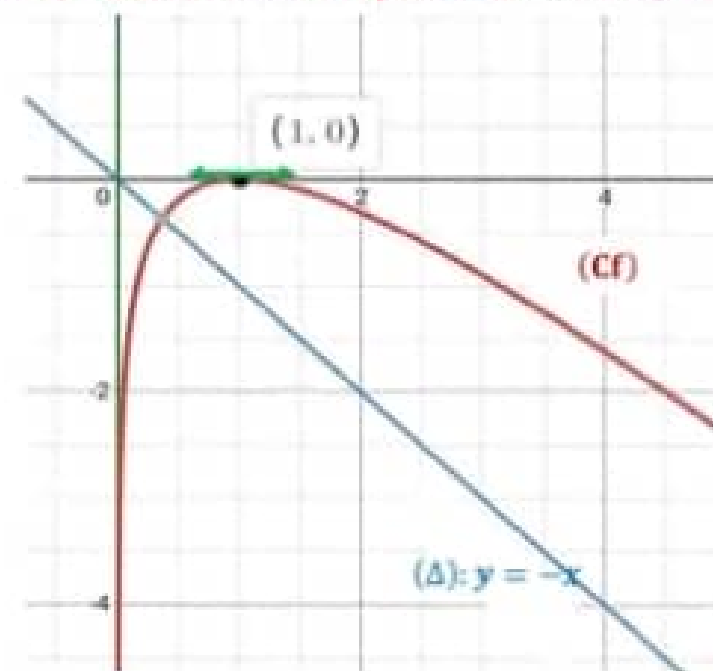
$$f(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$$

4) Sur $]0 ; +\infty[$, on a f' est dérivable de plus :

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{-1 \times x - (1-x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{-x - 1 + x}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0\end{aligned}$$

On en déduit que (Cf) la courbe de f est concave sur $]0 ; +\infty[$.

5) Tracer (Δ) et (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



Exercice 08

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 2) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau des variations de g
- 3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

B) f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + \frac{1+\ln(x)}{x}$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométrique
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

3)a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point A(1;1)

4) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$; (On prend $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$)

6) Tracer (T) et (Cf) et (Cf^{-1}) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution :

B) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln(x) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

2) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau des variations de g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x-1$.

On a $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

On en déduit que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a 1 est une valeur minimale de g sur $]0; +\infty[$

Donc $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$

donc $g(x) > 0$

B) f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométrique

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) + 1 + \ln(x)}{x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

3)a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme des fonctions dérivable sur $]0, +\infty[$

Rappel : $(\ln x)' = \frac{1}{x} ; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} ; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x - 1 + 1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}\end{aligned}$$

b) Dresser le tableau de variation de f

On a : $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		$+\infty$

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point A(1 ; 1)

(T): $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$y = 1 \times (x - 1) + 1$

(T): $y = x$

4) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

> f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$

> La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $J = f(]0, +\infty[)$

$J = f(]0, +\infty[)$

$= \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$

$=]-\infty, +\infty[$

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$: (On prend $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$)

> La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ en particulier $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

> La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ on particulier sur $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

> Et on a $f(1) = 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$ donc $f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

6) Tracer (T) et (Cf) et (Cf^{-1}) dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}, \vec{j}$)

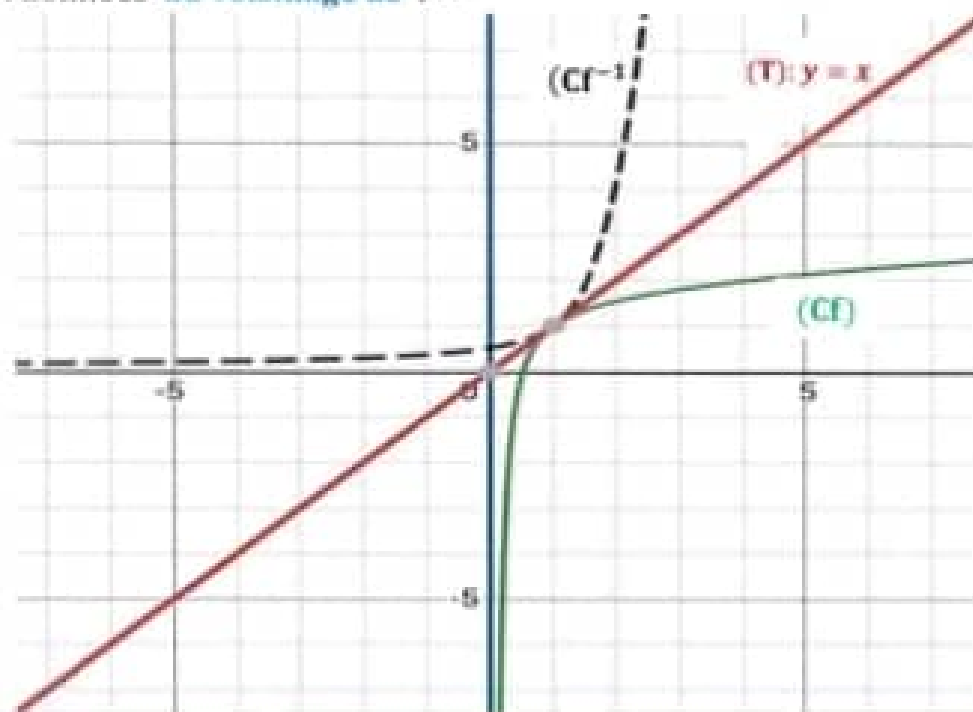
(Cf) et (Cf^{-1}) sont symétrique par rapport à la droite (T): $y = x$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptotes verticale à (Cf) La

droite d'équation $y = 0$ est asymptotes horizontale à (Cf^{-1})

a) une courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$; donc

a) une courbe (Cf⁻¹) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$



Exercice 09

Soit la fonction f définie sur $]-2; 1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

1)a) Montrer que $D_f =]-2; 1[$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ puis interpréter les deux résultats géométriquement

2)a) Montrer que f est dérivable sur $]-2; 1[$

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$

4) Tracer la courbe représentative de f .

Solution :

1)a) $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} > 0$; On dresse le tableau de signe de $\frac{x+2}{1-x}$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$1-x$	+		+	0	-
$\frac{x+2}{1-x}$	-	0	+		-

$$D_f =]-2; 1[$$

b) Par composition de limites, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2^+ \\ x > -2}} \frac{x+2}{1-x} = 0^+ \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -2^+ \\ x > -2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1^- \\ x < 1}} \frac{x+2}{1-x} = +\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1^- \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

La courbe de fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations : $x = -2$ et $x = 1$.

2)a) la fonction $u: x \mapsto \frac{x+2}{1-x}$ est dérivable sur $]-2; 1[$ car c'est une fonction rationnelle elle est toujours dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition qui est $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
Donc la fonction f est dérivable sur $]-2; 1[$

b) Soit : $]-2; 1[$

$$u'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{\frac{x+2}{1-x}}$$

u est strictement positive sur $]-2; 1[$ et $\frac{3}{(1-x)^2} > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Et donc la fonction f est strictement croissante sur $]-2; 1[$.

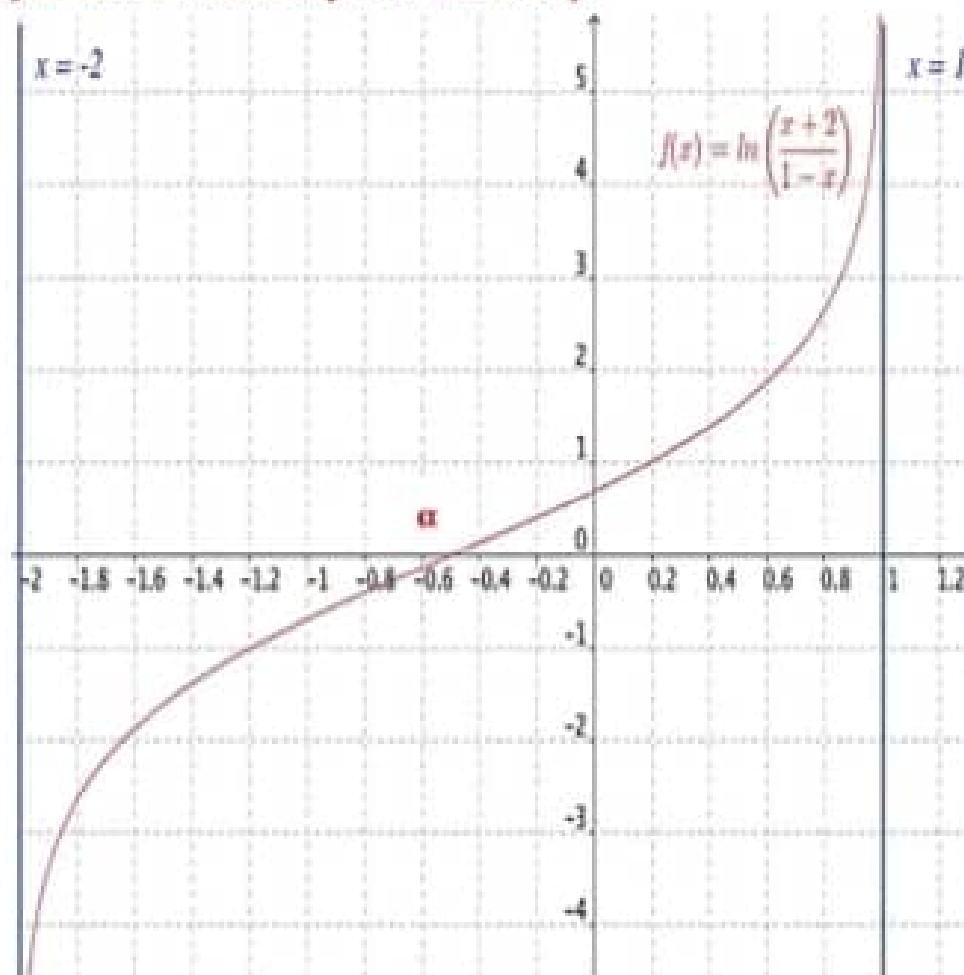
x	-2		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$



3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$

- La fonction f est continue sur $]-2; 1[$ en particulier $[-1, 0]$
 - La fonction f est strictement croissante sur $]-2; 1[$ en particulier sur $]-1, 0[$
 - Et on a $f(-1) = -\ln 2$ et $f(0) = \ln 2$ donc $f(-1) \times f(0) < 0$
- Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$

4) Tracer sa courbe représentative de f .



Exercice 10

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2)a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$. (On donne $g(\frac{1}{5}) \approx -0,4$)

3) Déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

B) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géom

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \alpha]$

d) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$ et dresser le tableau de variations de f

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x \ln x)}{x(x+1)^3}$

b) Etudier le signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

4) Tracer (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 0,25$)

C) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie f à déterminer

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $(h^{-1})'(0)$.

B) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x + \ln x = -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x + \ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2)a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et on a ;

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$. (On donne $g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4$)

On a g est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc elle est continue sur $]0; +\infty[$

Et on a g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\text{De plus } g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty; +\infty[$$

Donc $0 \in g(]0; +\infty[)$

D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

Vérifions que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$

On a g est continue sur $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

Et g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

$$\text{ET : } g\left(\frac{1}{5}\right) = -0,4 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} = \ln(e) - \ln 2 + \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{Donc : } g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$$

3) Dédurre le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

On distingue deux cas : $x \in]0; \alpha[$ et $x \in [\alpha; +\infty[$

Soit : $x \in]0; \alpha[$

$x \in]0; \alpha[\Rightarrow x \leq \alpha$ et g est str croissante sur $]0; \alpha[$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0$$

Soit : $x \in [\alpha; +\infty[$

$x \in [\alpha; +\infty[\Rightarrow \alpha \leq x$ et g est str croissante sur $[\alpha; +\infty[$

$$\Rightarrow g(\alpha) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x)$$

On dresse le tableau de signe de g sur $]0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

B) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2cm)

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x \ln x}{1+x} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc f est continue à droite de 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{1+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{\frac{1}{x} + 1} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x \ln x}{1+x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{1+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x(\frac{1}{x} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} \times \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 0
 \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géom

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4x \ln x}{1+x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \ln x}{1+x} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

la courbe (Cf) admet une demi tangente verticale au point

A(0 ; 0) dirigée vers le bas

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

On la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} ; (uv)' = u'v + uv' ; (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(4 \ln x + 4x \times \frac{1}{x}\right)(x+1) - (4x \ln x \times 1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4 \ln x + 4)(x+1) - 4x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x \ln x + 4 \ln x + 4x + 4 - 4x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 \ln x + 4x + 4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$$

D'où pour tout $x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Dédire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \alpha]$

On a : pour tout $x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$ et $(x+1)^2 > 0$

Donc le signe de f' est le signe de g sur $]0; +\infty[$

Et on a d'après la partie A) le signe de g sur $]0; +\infty[$

x	0		α	$-\infty$
g(x)		-	0	+

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \alpha]$

d) Montrons que $f(\alpha) = -4\alpha$

On a : $f(\alpha) = \frac{4\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha}$

Et d'après la partie A) le α est solution de l'équation $g(x) = 0$

Donc $g(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha + \ln(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha = -\ln(\alpha)$

Donc : $f(\alpha) = \frac{4\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha} = \frac{4\alpha \ln \alpha}{-\ln(\alpha)} = -4\alpha$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0		-4α	$+\infty$

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[: f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x \ln x)}{x(x+1)^3}$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(u^n)' = nu' u^{n-1}$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

On a : $f'(x) = \frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2}$

Donc $f''(x) = \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1)^2 - 4(\ln x + x + 1) \times 2 \times 1 \times (x+1)^1}{(x+1)^4}$

Donc $f''(x) = \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1)^2 - 8(\ln x + x + 1)(x+1)}{(x+1)^4}$

Donc $f''(x) = \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1) - 8(\ln x + x + 1)}{(x+1)^3}$

Donc : $f''(x) = \frac{\frac{4(1+x)^2}{x} - 4\left(\frac{2x \ln x + 2x^2 + 2x}{x}\right)}{(x+1)^3}$

Donc : $f''(x) = \frac{4[x^2 + 2x + 1 - (2x \ln x + 2x^2 + 2x)]}{x(x+1)^3}$

Donc : $f''(x) = \frac{4[x^2 + 2x + 1 - 2x \ln x - 2x^2 - 2x]}{x(x+1)^3}$

Donc : $f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x \ln x)}{x(x+1)^3}$

b) Etudier le signe de $1-x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

Il est clair que le signe de f'' dépend de signe de $1-x^2-2x \ln x$

1^{ère} méthode

On a : $1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Et on a : $-2x \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

on dresse le tableau de signe de $1-x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$1-x^2$	+	0	-
$-2x \ln x$	+	0	-

Soit $x \in]0; 1]$

Donc $1-x^2-2x \ln x \geq 0$

Donc $f''(x) \geq 0$

Soit $x \in [1; +\infty[$

Donc $1-x^2-2x \ln x \leq 0$

Donc $f''(x) \leq 0$

D'où la fonction f' s'annule et change de signe en 1

Donc le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

2^{ème} méthode

$x \in]0; 1] \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow 1-x^2 \geq 0$

$x \in]0; 1] \Rightarrow -2x \leq 0$ et $\ln(x) \leq 0 \Rightarrow -2x \ln x \geq 0$

Donc $\forall x \in]0; 1] : 1-x^2-2x \ln x \geq 0$

$x \in [1; +\infty[\Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow 1-x^2 \leq 0$

$x \in [1; +\infty[\Rightarrow -2x \leq 0$ et $\ln(x) \geq 0 \Rightarrow -2x \ln x \leq 0$

Donc $\forall x \in [1; +\infty[: 1-x^2-2x \ln x \leq 0$

D'où la fonction f' s'annule et change de signe en 1

c) Donner l'équation de la tangente (T)

à (C_f) au point d'abscisse 1

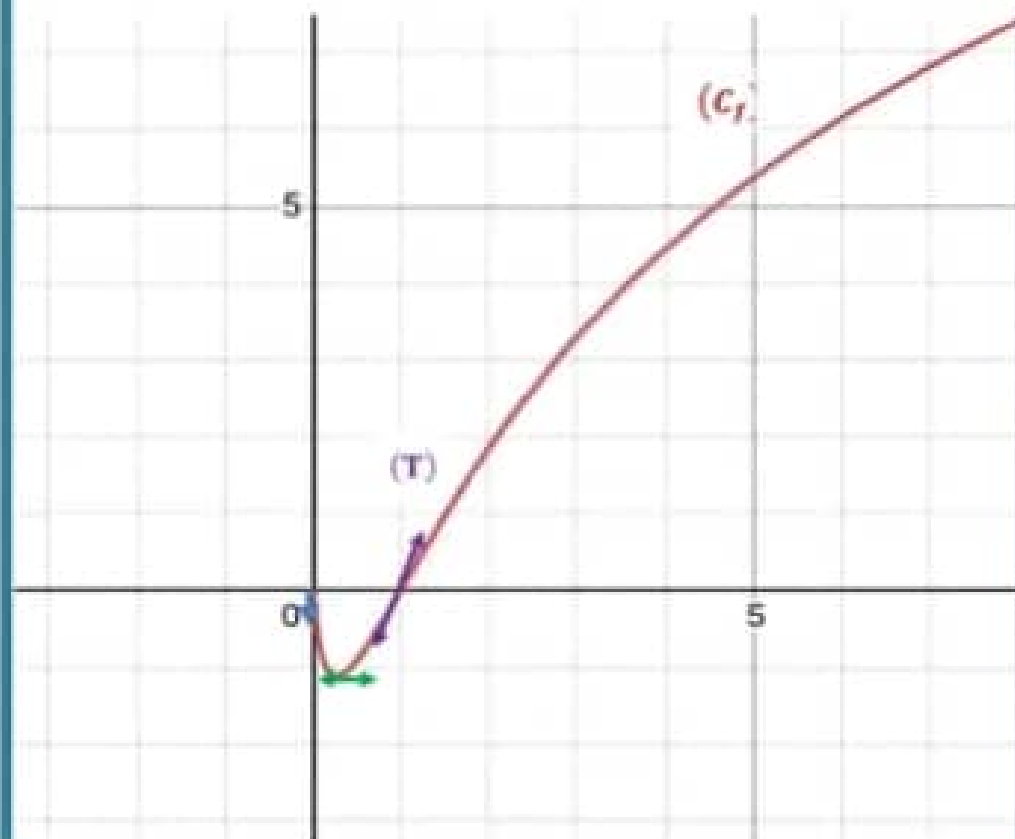
$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 2 \times (x - 1) + 0$$

$$\text{Donc } (T): y = 2x - 2$$

4) Tracer (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 0.25$)

On a $\alpha \approx 0.25$ donc $f(\alpha) = -4\alpha \approx -1$



C) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

$$\text{Donc } \forall x \in [\alpha; +\infty[: h(x) = f(x)$$

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie / à déterminer

➤ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$

On particulier sur $[\alpha; +\infty[$ donc h est continue sur $[\alpha; +\infty[$.

➤ La fonction f est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$

Donc la fonction h est str croissante sur $]\alpha, +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $J = h([\alpha; +\infty[)$

$$\begin{aligned} J = h([\alpha; +\infty[) &= [h(\alpha); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[\\ &=]-4\alpha, +\infty[\end{aligned}$$

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $(h^{-1})'(0)$.

$$\text{On a : } h(1) = 0 \text{ donc } h^{-1}(0) = 1$$

La fonction h est dérivable en 1 et on a : $h'(1) = 2 \neq 0$

Donc la fonction h^{-1} est dérivable en 0 et on a :

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{2}$$

Exercice 09

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$;

3) Dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$;

4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

B) Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) ; \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue en 0 à droite

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite puis interpréter le résultat géométriquement

4)a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

5) Etudier la convexité de la courbe (Cf)

6) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm)

C) Soit (U_n) tel que : $U_0 = \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante

3) Dédurre que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

Solution :

$$A) 1) \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

A)2) **Rappels:**

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{x}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$3) \text{ On a } \forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

0	$+\infty$	x
	-	$g'(x)$
0	$+\infty$	$g(x)$

$$4) \text{ On a } g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[\\ =]0; +\infty[$$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $g(x) \in]0; +\infty[$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

B) 1) Montrons que f est continue en 0 à droite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln(x) \\ = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = 0 \times \ln(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite de 0

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

On pose $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$; or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1+X) \\ = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Interprétation géométrique :

La droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\ = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

(Cf) la courbe de la fonction f admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le haut

4)a) Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$

➤ La fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une fonction rationnelle elle toujours dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition qui est $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

➤ Donc La fonction $x \mapsto \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

➤ La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$; (Polynome)

➤ Donc la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappels :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{et} \quad [\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = 1 \times \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\ = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}} \\ = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$

c) On a : $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) > 0$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

0	$+\infty$	x
	+	$f'(x)$
0	1	$f(x)$

5) On a $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = g(x)$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = g'(x)$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$

Donc la courbe (Cf) est concave sur $]0, +\infty[$

6) Tracer (Cf) dans $(O; i; j)$



C) 1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

> Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e-1}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

> Supposons que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$

f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; \frac{1}{e-1}]$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{e-1} \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{e-1}\right) \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$$

$$\text{Car : } f\left(\frac{1}{e-1}\right) = \frac{1}{e-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{e-1}}\right) = \frac{1}{e-1} \ln(e) = \frac{1}{e-1}$$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

$$2) u_{n+1} - u_n = u_n \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - u_n = u_n (\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - 1)$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \geq e-1 \Rightarrow \frac{1}{u_n} + 1 \geq e \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right) \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right) - 1 \geq 0 \Rightarrow u_n (\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow \text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}$$

3) Dédurre que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

• (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{e-1}$ donc convergente.

• f est continue sur l'intervalle $[0; \frac{1}{e-1}]$ car elle est dérivable sur $]0; \frac{1}{e-1}[$

$$f\left(\left[0; \frac{1}{e-1}\right]\right) = \left[f(0); f\left(\frac{1}{e-1}\right)\right] = \left[0; \frac{1}{e-1}\right] \subset \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$$

$$• u_0 = \frac{1}{e} \in \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$$

Alors la limite de (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = 0 \Leftrightarrow x (\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 + \frac{1}{x} = e \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{e-1}$$

Et on a la suite (u_n) est croissante donc la limite est $\frac{1}{e-1}$