

PRIMITIVES – FEUILLES D'EXERCICES

Un des exercices corrigés sur la chaîne **MATHS EN TÊTE**  (voir QR Code) est susceptible de tomber en évaluation. WWW.MATHSENTETE.FR

⇒ Dérivées et primitives

Exercice 1 :

Montrer que la fonction G définie par $G(x) = 2x - \frac{1}{x+3}$ est une primitive de g définie par : $g(x) = \frac{2x^2 + 12x + 19}{(x+3)^2}$.

Exercice A : VERIFIER UNE PRIMITIVE

Vérifier que $F(x) = 3x \ln x$ définie sur \mathbb{R}^{+*} est une primitive de $f(x) = 3(1 + \ln x)$.



Exercice 2 :

Deux fonctions F et G sont définies sur $] \frac{1}{3}; +\infty[$ par $F(x) = \frac{5x^2 - 7x + 9}{3x - 1}$ et $G(x) = \frac{5x^2 - 16x + 12}{3x - 1}$.

Ces fonctions F et G sont-elles des primitives de la même fonction f sur $] \frac{1}{3}; +\infty[$?

Exercice B : DEUX PRIMITIVES

Montrer que $F_1(x) = \frac{3x-1}{5x+4}$ et $F_2(x) = \frac{-27x-25}{5x+4}$ définies sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$ sont deux primitives d'une même fonction.



⇒ Recherche de primitives

Exercice 3 :

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I :

- | | | | |
|--|--------------------|---|--------------------|
| 1) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ | $I = \mathbb{R}$ | 9) $f(x) = \frac{4}{4x+1}$ | $I =]0; +\infty[$ |
| 2) $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$ | $I = \mathbb{R}$ | 10) $f(x) = \frac{1}{2x+5}$ | $I =]0; +\infty[$ |
| 3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + \frac{1}{4}x - 1$ | $I = \mathbb{R}$ | 11) $f(x) = 2(2x-3)^5$ | $I = \mathbb{R}$ |
| 4) $f(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2$ | $I = \mathbb{R}$ | 12) $f(x) = \sin 3x$ | $I = \mathbb{R}$ |
| 5) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$ | $I =]0; +\infty[$ | 13) $f(x) = 3 \cos(2x - 7)$ | $I = \mathbb{R}$ |
| 6) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$ | $I =]1; +\infty[$ | 14) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ | $I = \mathbb{R}$ |
| 7) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$ | $I =]1; +\infty[$ | 15) $f(t) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right)^3$ | $I = \mathbb{R}$ |
| 8) $f(x) = \frac{4x}{(1+2x^2)^2}$ | $I = \mathbb{R}$ | 16) $f(t) = -\sin t \cos^3 t$ | $I = \mathbb{R}$ |

Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes définies sur I .

1) $f(x) = 6x^2 + x(x-1)$

$I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = x(x^2 - 4)^3$

$I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$I =]0; +\infty[$

6) $f(x) = \frac{x^4 + 4x^2 - 2}{x^2}$

$I =]0; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{2}{x^5}$

$I =]0; +\infty[$

7) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$I =]0; \pi[$

4) $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^2}$

$I =]0; +\infty[$

8) $f(x) = \frac{3x^2}{2x^3 + 1}$

$I =]0; +\infty[$

➤ Recherche d'une primitive particulière

Exercice 5 :

Déterminer la primitive M de la fonction m définie sur \mathbb{R} par : $m(x) = 3\cos x - \sin x$ vérifiant $M(\pi) = -2$.

Exercice 6 :

- 1) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln x$.
- 2) Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

Exercice C : PRIMITIVES PARTICULIERES

- a) Déterminer la primitive F de la fonction $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ telle que $F(0) = 1$.
- b) Déterminer la primitive G de la fonction $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* telle que $G(1) = -2$.
- c) Déterminer la primitive H de la fonction $h(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ définie sur \mathbb{R} qui s'annule en 0.



Exercice 7 :

Déterminer la primitive F de f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$ telle que $F(0) = 2$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$

- 1) Vérifier que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$
- 2) Déterminer la primitive F de f sur $]1; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 2$.

Exercice D : DECOMPOSER POUR MIEUX PRIMITIVER

Soit g la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$.

- 1) Vérifier que pour tout $x > -2$, $g(x) = 3 - \frac{13}{(x+2)^2}$.
- 2) En déduire la primitive de g qui vaut 4 pour $x = 1$.

**Exercice 9 :**

Déterminer la fonction F , primitive de f sur l'intervalle I , qui vérifie la condition indiquée.

1) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 + 2)^2}$ $I =]\frac{3}{2}; +\infty[$ $F(1) = 2$

2) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $I =]0; \pi[$ $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ $I = \mathbb{R}$ $F(2) = 3$

4) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ $F(0) = 1$

5) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 1}$ $I = \mathbb{R}$ $F(0) = 0$

6) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $I =]0; +\infty[$ $F(e) = 1$