# Série d'exercice N : 4
# Les suites numériques

## Exercice 1

On considérant la suite numérique définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1}{u_n+2} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $v_n = \frac{1}{1+u_n}$

1) calculer $u_1$et $u_2$ et $v_0$ *et* $v_1$
2) calculer $v_{n+1} - v_n$ ; et deduire la narure de la suite $(v_n)_n$
3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$
4) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n ; puis en déduire l'expression de $u_n$ par autre façon
5) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $-1 \leq u_n \leq 2$

## Exercice 2

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie par $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{3u_n+8}{2u_n+5} \quad ; \quad \forall n \in N \\ u_0 = -1 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{1}{2+u_n}$

1) calculer $u_1$ ; $u_2$ ; $v_0$ ; $v_1$
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in N$ ; $u_n = -\frac{4n+1}{1+2n}$
3) Etudier la variation de $(u_n)$ sur N
4) Montrer que $\forall n \in N; -2 < u_n \leq -1$
5) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmètique et Determiné sa raison
6) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n. et deduire L'expression de $u_n$
7) calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \ldots \ldots . + v_{20}$

## Exercice 3

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie pa $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3) \\ u_0 = 4 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $v_n = u_n - 3$

1) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géometrique et Determiné sa raison et $v_0$
2) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n. et Deduire L'expression de $u_n$
3) Montrer que $\forall n \in N; 3 < u_n \leq 4$
4) Montrer que $(u_n)$ est strictement Decroissante sur N
5) soit $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \ldots \ldots . + v_n$ ; montrer que $S = 2 - \frac{1}{2^n}$

## Exercice 4

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie pa $\forall n \in N \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n-1}{u_n+3} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{1}{1+u_n}$

1. calculer $v_0$ et $u_1$et $u_2$.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in N$ ; $u_n = \frac{-n}{n+2}$
3. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmétique et Déterminer sa raison r .
4. Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n ; puis en déduire l'expression de $u_n$ par autre façon
5. Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots + v_{12}$.

## Exercice 5

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie par $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n}{2-u_n} \quad ; \quad \forall n \in N \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{u_n}{2+u_n}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in N$ ; $u_n = \frac{2^{n+1}}{3-2^n}$
2) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et Déterminé sa raison et $v_0$
3) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n. et Deduire L'expression de $u_n$
4) soit $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n$ ; montrer que $S = \frac{2^{n+1}-1}{3}$

## Exercice 6

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie pa $\forall n \in N \begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{3u_n+7} \\ u_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

1) Montrer que $\forall n \in N; u_n \geq 1 \geq$
2) Montrer que $(u_n)$ est strictement Decroissante sur N
3) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géometrique et Determiné sa raison et $v_0$
4) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n.
5) En Déduire L'expression de $u_n$

## Exercice 5

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie pa $\forall n \in N \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3) \\ u_0 = 4 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N\ ;\ v_n = u_n - 3$

1) Calculer $u_1\ ;\ u_2\ ; v_0\ ; v_1\ et\ v_2$
2) Montrer que $\forall n \in N; 3 < u_n \leq 4$
3) Etudier la variation de $(u_n)_n$
4) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géometrique et Determiné sa raison et $v_0$
5) Déterminer l'expression de $v_n$en fonction de n. et Deduire L'expression de $u_n$
6) Montrer que $(u_n)$ est strictement Decroissante sur N
7) soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \dots \dots . + u_n$ ; montrer que $S = 5 - \frac{1}{2^n} + 3n$
8) En déduire la valeur de $S_5\ \ et\ S_{10}$

## Exercice 6

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie pa $\forall n \in N \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N\ ;\ v_n = \frac{1}{1+u_n}$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in N\ ;\ -1 < u_n \leq 0$
2. calculer $v_0$ et $u_1$et $u_2$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in N\ ;\ u_n = \frac{-n}{n+2}$
4. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmétique et Déterminer sa raison r .
5. Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n ; puis en déduire l'expression de $u_n$ par autre façon
6. Montrer que $(u_n)_n$ est Strictement Décroissante sur N
7. Calculer $= v_0 + v_1 + \dots \dots \dots . + v_{12}$.

## Exercice 7

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie par $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n}{2-u_n} & ;\ \forall n \in N \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N\ ;\ v_n = \frac{u_n}{2+u_n}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in N\ ;\ u_n = \frac{2^{n+1}}{3-2^n}$
2) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et Déterminé sa raison et $v_0$
3) Déterminer l'expression de $v_n$en fonction de n. et Deduire L'expression de $u_n$
4) soit $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \dots \dots . + v_n$ ; montrer que $S = \frac{2^{n+1}-1}{3}$

## Exercice 12

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie par $\forall n \in N \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3 + u_n{}^2} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ Et

Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = u_n^2 - 1$

1)Montrer que $\forall n \in N; 0 < u_n \leq 1$

2)Montrer que $(u_n)$ est strictement croissante

3)Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et Déterminé sa raison et $v_0$

4)Exprimer $v_n$ en fonction de n. et Déduire L'expression de $u_n$

## Exercice 13

I. Soit $(u_n)_n$ et $(u_n)_n$ Deux suites tel que $\forall n \in N; u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1}$ et $u_0 = 2$ et $v_n = u_n^2 - 2$

1) Montrer que $\forall n \in N; \sqrt{2} < u_n \leq 2$
2) Montrer que $(u_n)$ est strictement décroissante
3) Montrer que $(u_n)$ est convergente et calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$
4) Montrer que $(v_n)$ est une suite Géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et calculer $v_0$
5) Exprimer $v_n$ et $u_n$ en Fonction de $n$

## Exercice 14

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie par $\forall n \in N \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{3+3^n u_n} \\ u_0 = 3 \end{cases}$ Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{1}{3^n u_n}$

1) Montrer que $\forall n \in N; u_n > 0$

2)Montrer que $(u_n)$ est strictement décroissante et En déduire qu'elle bornée

3)Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmétique et Déterminé sa raison et $v_0$

4)Exprimer $v_n$ en fonction de n. et Déduire L'expression de $u_n$

## Exercice 15

Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par $\forall n \in N^*; \begin{cases} u_{n+1} = \frac{-5u_n - 9}{1+u_n} \\ u_1 = -5 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N^*$; $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in N^*; -5 < u_n \leq 3$
2. Montrer que $\forall n \in N^*; u_{n+1} - u_n = -\frac{(3+u_n)^2}{1+u_n}$ .et en déduire la monotonie de $(u_n)$ .
3. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmétique de raison $r = 2$ .
4. Ecrire $v_n$ et $u_n$ en fonction de n
5. On pose $S_n = \frac{1}{u_1+3} + \frac{1}{u_2+3} + \frac{1}{u_3+3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{u_n+3}$ pour tout $n \in N^*$.

   Montrer que $S_n = \frac{-n(2n+1)}{4}$

# Série N 5 : Les suites numériques

## Exercice 1

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites tel que $\forall n \in N$ ; $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 8 \\ v_0 = 3 \end{cases}$

1) Calculer $u_1$ ; $u_2$ $et$ $u_3$
2) Calculer $v_1$ ; $v_2$ $et$ $v_3$

## Exercice 2

On considérant la suite numérique définie par $\forall n \in N$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1}{u_n+2} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{1}{1+u_n}$

1) calculer $u_1$et $u_2$ et $v_0$ $et$ $v_1$
2) calculer $v_{n+1} - v_n$ ; et deduire la narure de la suite $(v_n)_n$
3) Montrer par récurrence que $\forall n \in N$ ; $u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$
4) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n ; puis en déduire l'expression de $u_n$ par autre façon
5) Montrer $\forall n \in N$ ; $-1 \leq u_n \leq 2$

## Exercice 3

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie par $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{3u_n+8}{2u_n+5} \quad ; \quad \forall n \in N \\ u_0 = -1 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{1}{2+u_n}$

1) calculer $u_1$ ; $u_2$ ; $v_0$ ; $v_1$
2) Montrer que $\forall n \in N; -2 < u_n \leq -1$
3) Montrer par récurrence que $\forall n \in N$ ; $u_n = -\frac{4n+1}{1+2n}$
4) Etudier la variation de $(u_n)$ sur N
5) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmètique et Determiné sa raison
6) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n. et déduire L'expression de $u_n$
7) calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \ldots \ldots . + v_{20}$

## Exercice 4

Soit $(u_n)$ la suite définie par $\forall n \in N ; u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{u_n^2+1}$ $et$ $u_0 = \frac{3}{2}$

1. Montrer que $\forall n \in N; u_n > 1$
2. Etudier la variation de $(u_n)_n$
3. Montrer que $(u_n)_n$ convergente
4. Montrer que $\forall n \in N; 0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$
5. En déduire que $\forall n \in N; 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

## Exercice 8

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{3u_n+7} \\ u_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

1) Montrer que $\forall n \in N; 1 \geq u_n$
2) Montrer que $(u_n)$ est strictement Decroissante sur N
3) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géometrique et Determiné sa raison et $v_0$
4) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n .
5) En Déduire L'expression de $u_n$

## Exercice 9

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ Deux suites numériques définies pa $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n-4}{u_n+5} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $v_n = \frac{1}{u_n+2}$

1) Montrer que $\forall n \in N; u_n \geq -2$
2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$ .que peut-on déduire
3) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmetique et Determiné sa raison et $v_0$
4) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n .
5) En Déduire L'expression de $u_n$
6) Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$ Et $T_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \times v_i$
   a) Montrer que $S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$
   b) Montrer que $T_n = \frac{1-n^2}{3}$

## Exercice 10

Soit $(u_n)$ et $(p_n)$ Deux suites numériques telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$p_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots\dots\dots \times u_n = 2^{n^2+n}$

1. calculer $u_0$ et $u_1$ et $u_2$.
2. Déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$
3. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Géométrique de raison $q$ à Déterminera.
4. Montrer que $(u_n)_n$ est Strictement croissante
5. Calculer $= v_0 + v_1 + \dots\dots\dots + v_{10}$

## Exercice 11

Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots\dots\dots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

# Corrigé des série N : 4 les suite Numérique

## Exercice 1

On à $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1}{u_n+2} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $v_n = \frac{1}{1+u_n}$

### 1) calculer $u_1$ et $u_2$ et $v_0$ *et* $v_1$

Calculer $u_1$

On a $u_1 = \frac{-1}{u_0+2} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$

$\boxed{\text{Donc } u_1 = \frac{-1}{4}}$

Calculer $u_2$

On a $u_2 = \frac{-1}{u_1+2} = \frac{-1}{\frac{-1}{4}+2} = \frac{-1}{\frac{7}{4}} = \frac{-4}{7}$

$\boxed{\text{Donc } u_2 = \frac{-1}{4}}$

Calculer $v_0$

On a $v_0 = \frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

$\boxed{\text{Donc } v_0 = \frac{1}{3}}$

Calculer $v_1$

On a $v_1 = \frac{1}{1+u_1} = \frac{1}{1+\frac{-1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

$\boxed{\text{Donc } v_1 = \frac{4}{3}}$

### 2) calculer $v_{n+1} - v_n$ ; et deduire la narure de la suite $(v_n)_n$

On a $v_{n+1} = \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{-1}{u_n+2}} = \frac{1}{\frac{u_n+1}{u_n+2}} = \frac{u_n+2}{u_n+1}$

Donc $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+2}{u_n+1} - \frac{1}{1+u_n} = \frac{u_n+1}{u_n+1} = 1$

Donc $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison 1

### 3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$

Pour n=0

On a $\frac{-3\times 0+2}{3\times 0+1} = \frac{2}{1} = u_0$ donc vraie pour n=0

Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on suppose que $u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$

On montrer que $u_{n+1} = \frac{-3n-1}{3n+4}$

On a $u_{n+1} = \frac{-1}{u_n+2} = u_{n+1} = \frac{-1}{\frac{-3n+2}{3n+1}+2} = \frac{-1}{\frac{3n+4}{3n+1}} = \frac{-3n-1}{3n+4}$

Donc d'après principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$

### 4) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n

On a $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3} + n \times 1$

$\boxed{\text{Donc } v_n = \frac{3n+1}{3}}$

## Exercice 5

Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n}{2-u_n} \quad ; \quad \forall n \in N \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{u_n}{2+u_n}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in N$ ; $u_n = \frac{2^{n+1}}{3-2^n}$

Pour n=0

On a $\frac{2^{0+1}}{3-2^0} = \frac{2}{2} = 1 = u_0$ donc vraie pour n=0

Soit $n \in N$ ; on suppose que $u_n = \frac{2^{n+1}}{3-2^n}$ et On montrer que $u_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{3-2^{n+1}}$

On a $u_{n+1} = \frac{4u_n}{2-u_n} = \frac{4\frac{2^{n+1}}{3-2^n}}{2-\frac{2^{n+1}}{3-2^n}} = \frac{\frac{2^2\times 2^{n+1}}{3-2^n}}{\frac{6-2^{n+1}-2^{n+1}}{3-2^n}} = \frac{2^2\times 2^{n+1}}{2(3-2^{n+1})} = \frac{2\times 2^{n+1}}{3-2^{n+1}}$

Donc $u_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{3-2^{n+1}}$

Donc d'après principe de récurrence on a $\forall n \in N$ ; $u_n = \frac{2^{n+1}}{3-2^n}$

2) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et Déterminé sa raison et $v_0$

On a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2+u_{n+1}} = \frac{\frac{4u_n}{2-u_n}}{2+\frac{4u_n}{2-u_n}} = \frac{\frac{4u_n}{2-u_n}}{\frac{4+2u_n}{2-u_n}} = \frac{4u_n}{4+2u_n} = \frac{4}{2}\left(\frac{u_n}{2+u_n}\right) = 2v_n$

Donc $v_{n+1} = 2v_n$

Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ est $v_0 = \frac{u_0}{2+u_0} = \frac{1}{3}$

3) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n

On à $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3}\times 2^n$ Donc $\forall n \in N; v_n = \frac{2^n}{3}$

Déduire L'expression de $u_n$

On a $v_n = \frac{u_n}{2+u_n}$ Donc $\frac{1}{v_n} = \frac{u_n+2}{u_n} = 1 + \frac{2}{u_n}$

Donc $\frac{2}{u_n} = \frac{1}{v_n} - 1 = \frac{1-v_n}{v_n}$ Donc $u_n = \frac{2v_n}{1-v_n} = \frac{2\frac{2^n}{3}}{1-\frac{2^n}{3}} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3}}{\frac{3-2^n}{3}} = \frac{2^{n+1}}{3-2^n}$

Donc $\forall n \in N$; $u_n = \frac{2^{n+1}}{3-2^n}$

4) soit $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n$ ; montrer que $S = \frac{2^{n+1}-1}{3}$

*On a* $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \dots\dots + v_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \times v_0$

*Donc* $S = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \times \frac{1}{3} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{n+1}-1}{3}$

*D'où* $S = \frac{2^{n+1}-1}{3}$

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie pa $\forall n \in N \begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{3u_n+7} \\ u_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

1) Montrer que $\forall n \in N; u_n \geq 1$

Pour n=0

On a $u_0 = \frac{7}{3} \geq 1 \Rightarrow$ donc vraie pour n=0

Soit $n \in N$ on suppose que $u_n \geq 1$ et on montrer que $u_{n+1} \geq 1$

On a $u_{n+1} - 1 = \frac{7u_n+3}{3u_n+7} - 1 = \frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7} = \frac{7u_n+3-3u_n-7}{3u_n+7} = \frac{4u_n-4}{3u_n+7}$

Donc $u_{n+1} - 1 = \frac{4(u_n-1)}{3u_n+7}$

On a $u_n \geq 1$ donc $u_n - 1 \geq 0$ et $3u_n + 7 > 0$

Donc $\frac{4(u_n-1)}{3u_n+7} \geq 0$ Donc $u_{n+1} - 1 \geq 0$ Donc $u_{n+1} \geq 1$

Donc d'après raisonnement par récurrence on a $\forall n \in N; u_n \geq 1$

2) Montrer que $(u_n)$ est strictement Décroissante sur N

On a $u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n+3}{3u_n+7} - u_n = \frac{7u_n+3-3u_n^2-7u_n}{3u_n+7} = \frac{3(1-u_n^2)}{3u_n+7}$

On a $\forall n \in N; u_n \geq 1$ Donc $u_n^{\,2} \geq 1$ D onc $0 \geq 1 - u_n^{\,2}$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

*Donc $(u_n)$ est une suite décroissante sur N*

3) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géometrique et Determiné sa raison et $v_0$

On a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-1}{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}+1} = \frac{\frac{4u_n-4}{3u_n+7}}{\frac{10u_n+10}{3u_n+7}} = \frac{4u_n-4}{10u_n+10} = \frac{4}{10}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right) = \frac{2}{5} v_n$

Donc $v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n$

*Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ est* $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{\frac{7}{3}-1}{\frac{7}{3}+1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{2}{5}$

4) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n.

On à $v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

*Donc* $\forall n \in N; v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

5) En Déduire L'expression de $u_n$

On a $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ donc $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$

Donc $v_n u_n + v_n = u_n - 1$ Donc $1 + v_n = u_n - v_n u_n = u_n(1 - v_n)$

Donc $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n} = \frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{5^{n+1}+2^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{5^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}+2^{n+1}}{5^{n+1}-2^{n+1}}$

*Donc* $\forall n \in N; u_n = \frac{5^{n+1}+2^{n+1}}{5^{n+1}-2^{n+1}}$

On a $u_{n+1} = -\frac{3u_n+8}{2u_n+5} = -\frac{3(-\frac{4n+1}{1+2n})+8}{2(-\frac{4n+1}{1+2n})+5} = \frac{\frac{-12n-3}{1+2n}+8}{\frac{-8n-2}{1+2n}+5} = \frac{\frac{-12n-3+16n+8}{1+2n}}{\frac{-8n-2+10n+5}{1+2n}}$

Donc $u_{n+1} = \frac{\frac{4n+5}{1+2n}}{\frac{2n+3}{1+2n}} = -\frac{4n+5}{3+2n}$

Donc d'après principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n = -\frac{4n+1}{1+2n}$

## 3) Etudier la variation de $(u_n)$ sur N

*On a* $u_n = -\frac{4n+1}{1+2n}$ *et* $u_{n+1} = -\frac{4n+5}{3+2n}$

*Donc* $u_{n+1} - u_n = -\frac{4n+5}{3+2n} + \frac{4n+1}{1+2n} = \frac{(-4n-5)(2n+1)+(4n+1)(2n+3)}{(3+2n)(1+2n)}$

*Donc* $u_{n+1} - u_n = \frac{-8n^2-4n-10n-5+8n^2+12n+2n+3}{(3+2n)(1+2n)} = \frac{-2}{(3+2n)(1+2n)} < 0$

Donc $u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ donc $(u_n)$ est une suite strictement croissante

## 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; -2 < u_n \leq -1$

On à $u_n = -\frac{4n+1}{1+2n} = -\frac{2(2n+1-1)+1}{2n+1} = -\frac{2(2n+1)-2+1}{2n+1} = -\frac{2(2n+1)}{2n+1} - \frac{-2+1}{2n+1}$

Donc $u_n = -2 + \frac{1}{2n+1}$

On à $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq 0 \Rightarrow 2n \geq 0 \Rightarrow 2n+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+1} \leq 1$

$\Rightarrow -2 < -2 + \frac{1}{2n+1} < -1 \Rightarrow -2 < u_n \leq -1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}; -2 < u_n \leq -1$

## 5) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmètique et Determiné sa raison

On à $v_n = \frac{1}{2+u_n}$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2+u_{n+1}} = \frac{1}{2+-\frac{3u_n+8}{2u_n+5}} = \frac{1}{\frac{4u_n+10-3u_n-8}{2u_n+5}} = \frac{2u_n+5}{2+u_n} = \frac{2(u_n+2-2)+5}{2+u_n}$

Donc $v_{n+1} = \frac{2(u_n+2)+}{2+u_n} + \frac{-4+5}{2+u_n} = 2 + \frac{1}{2+u_n} = 2 + v_n$

Donc $v_{n+1} = v_n + 2$

Donc $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r=2

## 6) l'expression de $v_n$ en fonction de n

On a $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r=2

Donc $v_n = v_0 + nr = 1 + 2n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = 1 + 2n$

- **Déduire L'expression de $u_n$**

On a $\forall n \in N\,;\ v_n = \frac{1}{2+u_n}$ Donc $2 + u_n = \frac{1}{v_n}$

Donc $u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{1}{2n+1} - 2 = \frac{1-4n-2}{2n+1} = \frac{-4n-1}{2n+1} = = -\frac{4n+1}{2n+1}$

Donc $\forall n \in N\,; u_n = -\frac{4n+1}{2n+1}$

7) calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \ldots \ldots . + v_{20}$

*On a* $S = u_0 + u_1 + \ldots \ldots \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

*Donc pour n=20 on a* $u_{20} = 1 + 2 \times 20 = 41$

*On a* $S = u_0 + u_1 + \ldots \ldots \ldots + u_{20} = \frac{(20+1)(u_0+u_{20})}{2} = \frac{21(1+41)}{2} = \frac{21\times 42}{2}$

*Donc* $S = 441$

## Exercice 3

Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par $\forall n \in N \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3) \\ u_0 = 4 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in N\,;\ v_n = u_n - 3$

1) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géometrique et Determiné sa raison et $v_0$

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(u_n + 3) - 3 = \frac{u_n+3}{2} - \frac{6}{2} = \frac{u_n-3}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2} v_n$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ est $v_0 = u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

2) l'expression de $v_n$ en fonction de n

On à $v_n = v_0 \times (\frac{1}{2})^n = 1 \times \frac{1}{2^n}$

Donc $\forall n \in N; v_n = \frac{1}{2^n}$

Déduire L'expression de $u_n$

On a $v_n = u_n - 3$ donc $v_n + 3 = u_n$

Donc $\forall n \in N; u_n = \frac{1}{2^n} + 3$

3) Montrer que $\forall n \in N; 3 < u_n \leq 4$

On a $u_n = \frac{1}{2^n} + 3$

On a $u_n - 3 = \frac{1}{2^n} + 3 - 3 = \frac{1}{2^n} > 0$

Donc $u_n > 3$

Et on à $u_n - 4 = \frac{1}{2^n} + 3 - 4 = \frac{1}{2^n} - 1 = \frac{1-2^n}{2^n} \leq 0$

Donc $u_n \leq 4$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}; 3 < u_n \leq 4$

4) Montrer que $(u_n)$ est strictement Decroissante sur N

On a $u_n = \frac{1}{2^n} + 3$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + 3$

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} + 3 - \left(\frac{1}{2^n} + 3\right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{-1}{2^{n+1}} < 0$

***Donc $(u_n)$ est suite strictement décroissante sur N***

5) $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \ldots \ldots + v_n$ ; on montrer que $S = 2 - \frac{1}{2^n}$

*On a* $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \ldots \ldots + v_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \times v_0$

*Donc* $S = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \times 1 = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \times 2 = 2 - \frac{1}{2^n}$

*D'où* $S = 2 - \frac{1}{2^n}$

## Exercice 4

Soit $(u_n)_n$ la suite numerique definie pa $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Et Soit $(v_n)_n$ une suite numerique definie par $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $v_n = \frac{1}{1+u_n}$

1. En calculer $u_1$ et $u_2$ et $v_0$

On a $u_1 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{0-1}{0+3} = \frac{-1}{3}$

Donc $u_1 = \frac{-1}{3}$

On a $u_2 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 3} = \frac{\frac{-1}{3} - 1}{\frac{-1}{3} + 3} = \frac{\frac{-4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$

Donc $u_2 = \frac{-1}{2}$

On a $v_0 = \frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{1+0} = 1$

Donc $v_0 = 1$

2. On Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n = \frac{-n}{n+2}$

Pour n=0

On a $-\frac{0}{0+2} = -\frac{0}{2} = 0 = u_0$ donc vraie pour n=0

Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on suppose que $u_n = \frac{-n}{n+2}$

On montrer que $u_{n+1} = \frac{-(n+1)}{n+3}$

On a $u_{n+1} = u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = u_{n+1} = \frac{\frac{-n}{n+2} - 1}{\frac{-n}{n+2} + 3} = \frac{\frac{-n-n-2}{n+2}}{\frac{-n+3n+6}{n+2}} = \frac{-2n-2}{2n+6} = \frac{2(-n-1)}{2(n+3)}$

Donc $u_{n+1} = \frac{-(n+1)}{n+3}$

Donc d'après principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n = \frac{-n}{n+2}$

3. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite Arithmétique et Déterminer sa raison r .

On a $v_{n+1} = \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{u_n-1}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{u_n+3+u_n-1}{u_n+3}} = \frac{u_n+3}{2(u_n+1)}$

Donc $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3}{2(u_n+1)} - \frac{1}{1+u_n} = \frac{u_n+1}{2(u_n+1)} = \frac{1}{2}$

Donc $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

4. Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n

On a $v_n = v_0 + nr = 1 + \frac{n}{2} = \frac{n+2}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{n+2}{2}$

En déduire l'expression de $u_n$ par autre façon

On a $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ Donc $1 + u_n = \frac{1}{v_n}$

Donc $u_n = \frac{1}{v_n} - 1 = \frac{1}{\frac{n+2}{2}} - 1 = \frac{2}{n+2} - 1 = \frac{2-n-2}{n+2} = \frac{-n}{n+2}$

Donc $\forall n \in N$ ; $v_n = \frac{-n}{n+2}$

5. En Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots + v_{12}$.

On a $S = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots + v_{12} = \frac{(12+1)(v_0+v_{12})}{2}$

On a $v_{12} = \frac{12+2}{2} = 7$

Donc $S = \frac{13(1+7)}{2} = \frac{13\times 8}{2} = 52$

Donc $S = 52$

## Exercice 6

## En déduire l'expression de $u_n$ par autre façon

On a $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ *Donc* $u_n + 1 = \frac{1}{v_n}$ *Donc* $u_n = \frac{1}{v_n} - 1$

Donc $u_n = \frac{1}{\frac{3n+1}{3}} - 1 = \frac{3}{3n+1} - 1 = \frac{3-3n-1}{3n+1} = \frac{-3n+2}{3n+1}$

Donc $u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$

## 5) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $-1 \leq u_n \leq 2$

On a $u_n = \frac{3}{3n+1} - 1$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $n \geq 0$ Donc $3n \geq 0$ Donc $3n+1 \geq 1 > 0$

Donc $0 < \frac{1}{3n+1} \leq 1$ Donc $0 < \frac{3}{3n+1} \leq 3$ Donc $-1 < \frac{3}{3n+1} - 1 \leq 2$

*Donc* $\forall n \in N$ ; $-1 \leq u_n \leq 2$

## Exercice 2

## 1) calculer $u_1$ et $u_2$ et $v_0$ *et* $v_1$

Calculer $u_1$

On a $u_1 = -\frac{3u_0+8}{2u_0+5} = -\frac{-3+8}{-2+5} = -\frac{5}{3}$

$\boxed{\text{Donc } u_1 = \frac{-5}{3}}$

Calculer $u_2$

On a $u_2 = -\frac{3u_1+8}{2u_1+5} = -\frac{3\times\left(\frac{-5}{3}\right)+8}{2\times\left(\frac{-5}{3}\right)+2} = -\frac{-5+8}{\frac{-10}{3}+2} = -\frac{3}{\frac{-4}{3}} = \frac{9}{4}$

$\boxed{\text{Donc } u_2 = \frac{4}{4}}$

Calculer $v_0$

On a $v_0 = \frac{1}{2+u_0} = \frac{1}{2+(-1)} = \frac{1}{1} = 1$

$\boxed{\text{Donc } v_0 = 1}$

Calculer $v_1$

On a $v_1 = \frac{1}{2+u_1} = \frac{1}{2+\frac{-5}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

$\boxed{\text{Donc } v_1 = 3}$

## 2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n = -\frac{4n+1}{1+2n}$

Pour n=0

On a $-\frac{4\times0+1}{1+2\times0} = -\frac{1}{1} = -1 = u_0$ donc vraie pour n=0

Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on suppose que $u_n = -\frac{4n+1}{1+2n}$

On montrer que $u_{n+1} = -\frac{4n+5}{3+2n}$