Sujets de bac : Complexes

Sujet n°1 : extrait d'Asie – juin 2002

1) Dans le plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3 ; $4i$; $-2+3i$ et $1-i$. Placer les points A, B, C et D dans un plan.
2) On considère les équations dans $\mathbb{C}$

$$z^2-(1+3i)z-6+9i=0 \quad (E_1) \quad \text{et} \quad z^2-(1+3i)z+4+4i=0 \quad (E_2)$$

   a. Montrer que l'équation (E_1) admet une solution réelle z_1 et l'équation (E_2) une solution imaginaire pure z_2.
   b. Développer $(z-3)(z+2-3i)$ puis $(z-4i)(z-1+i)$.
   c. En déduire les solutions de l'équation $(z^2-(1+3i)z-6+9i)(z^2-(1+3i)z+4+4i)=0$
   d. On note z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0.
   e. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixe z_0^n soient sur la droite d'équation $y=x$.
3) On note f l'application qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z'=z^2-(1+3i)z-6+9i$$

   a. On pose $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $z'=x'+iy'$ avec $x',y'\in\mathbb{R}$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b. Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

Sujet n°2 : extrait de Centres étrangers – juin 2006

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera en un contre-exemple.

1) Si $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ alors z^4 est un nombre réel.
2) Si $z+\bar{z}=0$ alors $z=0$.
3) Si $z+\frac{1}{z}=0$ alors $z=i$ ou $z=-i$.
4) Si $|z|=1$ et si $|z+z'|=1$ alors $z'=0$

Sujet n°3 : France – septembre 2007

Soit les nombres complexes : $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$, $z_2=2+2i$ et $Z=\frac{z_1}{z_2}$.

1) Écrire Z sous forme algébrique.
2) Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
4) Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Sujet n°4 : extrait de Nouvelle Calédonie – novembre 2005

On considère le plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.
A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f telle que

$$z'=\frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$$

1) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+2i$; $z_B=1$ et $z_C=3i$.

Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par f.
Placer A, B, C, A', B' et C'.

2) On considère $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
3) Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x$.

Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?

4) On considère un point M quelconque et M' son image par f. Montrer que M' appartient à (D).

5) Montrer que pour tout complexe z,

$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\bar{z}}{6} + \frac{i(z-\bar{z})}{3}$$

En déduire que $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

<u>Sujet n°5 : extrait de France – juin 2007</u>

On considère l'équation $(E) : z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$ où $z \in \mathbb{C}$.

1) Démontrer que le nombre complexe i est solution de l'équation.
   Ou : Déterminer une solution de (E) imaginaire pur.
2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-1)(az^2 + bz + c)$$
3) En déduire les solutions de (E).

<u>Sujet n°6 : Antilles Guyane – juin 2004</u>

QCM :

On considère le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) La forme algébrique de z^2 est

   $a)\ 2\sqrt{2}$ $\qquad b)\ 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ $\qquad c)\ 2+\sqrt{2}+i\left(2-\sqrt{2}\right)$ $\qquad d)\ 2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

2) z^2 s'écrit sous forme exponentielle

   $a)\ 4e^{\frac{i\pi}{4}}$ $\qquad b)\ 4e^{-\frac{i\pi}{4}}$ $\qquad c)\ 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $\qquad d)\ 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

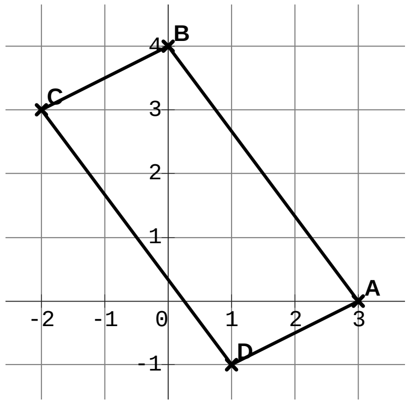
3) z s'écrit sous forme exponentielle

   $a)\ 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ $\qquad b)\ 2e^{i\frac{\pi}{8}}$ $\qquad c)\ 2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ $\qquad d)\ 2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4) $\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et les sinus de

   $a)\ \frac{7\pi}{8}$ $\qquad b)\ \frac{5\pi}{8}$ $\qquad c)\ \frac{3\pi}{8}$ $\qquad d)\ \frac{\pi}{8}$

Correction



Sujet n°1 : extrait d'Asie – juin 2002

1) Voir la figure
2)
   a. On cherche un réel x solution de (E_1) :

$x^2-(1+3i)x-6+9i=0 \Leftrightarrow (x^2-x-6)+i(-3x+9)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6=0 \\ -3x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ ou } x=3 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Donc $\boxed{3 \text{ est la solution réelle de } (E_1).}$

On cherche une solution de (E_2) de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$:

$(iy)^2-(1+3i)\times iy+4+4i=0 \Leftrightarrow -y^2-iy+3y+4+4i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2+3y+4=0 \\ -y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \text{ ou } y=-1 \\ y=4 \end{cases}$

Donc $\boxed{4i \text{ est la solution imaginaire pure de } (E_2).}$

   b. Pour $z \in \mathbb{C}$:

$(z-3)(z+2-3i)=z^2+2z-3iz-3z-6+9i=\boxed{z^2-(1+3i)z-6+9i}$

$(z-4i)(z-1+i)=z^2-z+iz-4iz+4i-4i^2=\boxed{z^2-(1+3i)z+4+4i}$

   c.

$(z^2-(1+3i)z-6+9i)(z^2-(1+3i)z+4+4i)=0$

$\Leftrightarrow z^2-(1+3i)z-6+9i=0 \text{ ou } z^2-(1+3i)z+4+4i=0$

$\Leftrightarrow (z-3)(z+2-3i)=0 \text{ ou } (z-4i)(z-1+i)=0$

$\Leftrightarrow z=3 \text{ ouz}=-2+3i \text{ ou } z=4i \text{ ou } z=1-i$

Donc $\boxed{S=\{3;-2+3i;4i;1-i\}}$

   d. On a donc $z_0=1-i$.

$|z_0|=|1-i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$z_0=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$ donc $\arg(z)=-\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$ à l'aide d'un cercle trigonométrique

Finalement $\boxed{z_0=\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}$

   e. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$M_n \in D_{y=x} \Leftrightarrow \arg(z_0^n)=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow n\times\arg(z_0)=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow n\times\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow n=-1-4k$

Or on veut que $n \geq 0$ donc $-1-4k \geq 0 \Leftrightarrow 4k \leq -1 \Leftrightarrow k \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow k \leq 0$ car k est un entier.

Donc les solutions sont $\boxed{\{4k-1\,;k \in \mathbb{N}\}}$

3)
   a.

$z'=z^2-(1+3i)z-6+9i \Leftrightarrow x'+iy'=(x+iy)^2-(1+3i)(x+iy)-6+9i$

$\Leftrightarrow x'+iy'=x^2+2ixy-y^2-x-iy-3ix+3y-6+9i \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x'=x^2-y^2-x+3y-6 \\ y'=2xy-y-3x+9 \end{cases}}$

par identification des parties réelles et imaginaires.

   b.

$f(M) \in (O;\vec{v}) \Leftrightarrow Re(z')=0 \Leftrightarrow x'=0 \Leftrightarrow \boxed{x^2-y^2-x+3y-6=0}$

Sujet n°2 : extrait de Centres étrangers – juin 2006

1) $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos(\theta)=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta)=\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc un argument de z est $\frac{3\pi}{4}$.

$\arg(z^4)=4\arg(z)=4\times\frac{3\pi}{4}=3\pi=\pi\quad[2\pi]$ donc z est bien un réel. $\boxed{VRAI}$

2) $\boxed{FAUX}$: en effet, si $z=i$ alors $z+\bar{z}=i-i=0$ et pourtant $z \neq 0$.
3) $z+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow z^2+1=0$ et $z \neq 0 \Leftrightarrow z=i$ ou $z=-i$ donc $\boxed{VRAI}$
4) $\boxed{FAUX}$: si on prend $z=1$ et $z'=-2$, on a $|z|=1$ et $|z+z'|=|1-2|=1$ et pourtant $z' \neq 0$.

Sujet n°3 : France – septembre 2007

1)

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i}=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}+2i\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{2^2+2^2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

2) $|z_1|^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{6}^2=2+6=8$ donc $\boxed{|z_1|=2\sqrt{2}}$

En notant θ_1 l'argument de z_1 : $\cos(\theta_1)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta_1)=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{\theta_1=\frac{\pi}{3}}$

$|z_2|^2=2^2+2^2=8$ donc $\boxed{|z_2|=2\sqrt{2}}$

En notant θ_2 l'argument de z_2 : $\cos(\theta_2)=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta_2)=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\theta_2=\frac{\pi}{4}}$

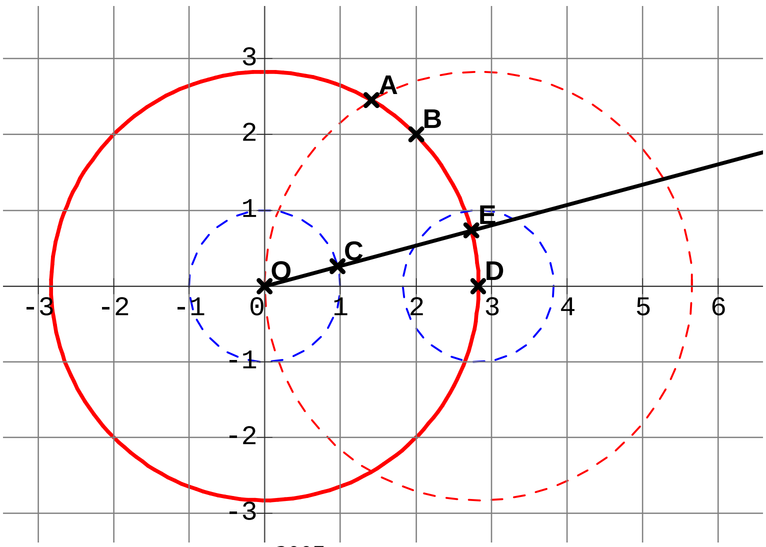
$$|Z|^2=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2+2\sqrt{12}+6+6-2\sqrt{12}+2}{16}=1 \text{ donc } \boxed{|Z|=1}$$

$$\arg(Z)=\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{12}}$$

3) $Re(Z)=|Z|\cos(\theta)$ en notant $\theta=\arg(Z)$ donc : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

$Im(Z)=|Z|\sin(\theta)$ donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

4) Pour placer A : On trace un cercle de centre O passant par B. Son rayon est donc $OB=|z_2|=2\sqrt{2}$. Ce cercle coupe l'axe des réels en deux points. Si on note D le point d'abscisses positives, on trace ensuite l'arc de cercle de centre D et de rayon $2\sqrt{2}$ pour placer A.
Pour placer C : on reporte l'écart entre A et B, grâce au compas, à partir du point D. On obtient ainsi un point E tel que $(\vec{u};\overrightarrow{OE})=\frac{\pi}{12}$. On trace ensuite le cercle de centre O et de rayon 1. Il ne reste plus qu'à placer C à l'intersection de ce cercle et de la demi-droite $[OE)$.



5) $Z^{2007}=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{2007}=\left(e^{i\theta}\right)^{2007}=e^{i\theta\times 2007}=\cos(2007\theta)+i\sin(2007\theta)$

Or $2007\theta=2007\times\frac{\pi}{12}=(83\times 24+15)\frac{\pi}{12}=83\times 2\pi+\frac{5\pi}{4}$

Donc : $\cos(2007\theta)=\cos\left(83\times 2\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(2007\theta)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Finalement $\boxed{Z^{2007}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}}$

Sujet n°4 : extrait de Nouvelle Calédonie – novembre 2005

1) $z'_A=\frac{(3+4i)(1+2i)+5(1-2i)}{6}=\frac{3+6i+4i-8+5-10i}{6}=\boxed{0}$

$$z'_B=\frac{(3+4i)+5}{6}=\boxed{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i}$$

$$z'_C = \frac{(3+4i)\times 3i + 5\times(-3i)}{6} = \frac{9i-12-15i}{6} = \boxed{-2-i}$$

2) $z' = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} = \frac{3x+3iy+4ix-4y+5x-5iy}{6} = \boxed{\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + i\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right)}$

3) On considère un point M invariant par f. On a alors $z' = z$ et donc

$$z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y = x \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow M \in (D)$$

La droite (D) passe par les points A', B' et C'.

4) $z' = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + i\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$: on peut donc remarquer que : $Im(z') = \frac{1}{2}Re(z')$ et donc $M' \in (D)$.

5)

$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{1}{1+2i}\times\left(\frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6} - z\right) = \frac{1-2i}{5}\times\frac{(3+4i)z+5\bar{z}-6z}{6}$$
$$= \frac{(3+4i)z+5\bar{z}-6z-2i(3+4i)z-10i\bar{z}+12iz}{30} = \frac{3z+5\bar{z}-6z+8z}{30} + i\times\frac{4z-6z-10\bar{z}+12z}{30}$$
$$= \boxed{\frac{z+\bar{z}}{6} + i\times\frac{z-\bar{z}}{3}}$$

Par ailleurs $z = x+iy$ et $\bar{z} = x-iy$ donc $z+\bar{z} = 2x \in \mathbb{R}$ et $z-\bar{z} = 2iy$ et donc $i(z-\bar{z}) = -2y \in \mathbb{R}$.

$\frac{z'-z}{z_A}$ est donc une somme de deux réels et est réel.

<u>Sujet n°5 : extrait de France – juin 2007</u>

1) On considère un nombre imaginaire pur donc de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$.

iy solution de $(E) \Leftrightarrow (iy)^3 - (4+i)\times(iy)^2 + -(13+4i)\times(iy) - 13i = 0$

$\Leftrightarrow -iy^3 - (4+i)\times(-y^2) + (13+4i)iy - 13i = 0$

$$\Leftrightarrow -iy^3 + 4y^2 + iy^2 + 13iy - 4y - 13i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 - 4y = 0 \\ -y^3 + y^2 + 13y - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = 1 \\ -y^3 + y^2 + 13y - 13 = 0 \end{cases}$$

Seule la solution $y = 1$ convient également pour la seconde équation donc le nombre $\boxed{z = i}$ est solution de (E).

2) Pour tout complexe z,

$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2+bz+c)$

$\Leftrightarrow z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = az^3 + (b-ia)z^2 + (c-ib)z - ic$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -4 - i \\ c - ib = 13 + 4i \\ -ic = -13i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases} \text{ donc } z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = \boxed{(z-i)(z^2-4z+13)}$$

3)

$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2-4z+13) = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 - 4z + 13 = 0$

Pour la seconde équation : $\Delta = 4^2 - 4\times 13 = -36$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$ et $z_2 = 2-3i$.

Finalement $\boxed{S = \{i; 2+3i; 2-3i\}}$

<u>Sujet n°6 : Antilles Guyane – juin 2004</u>

1) $z^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\times\left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) + \left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

$= 2+\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} = \boxed{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}$ donc $\boxed{\text{réponse } b}$

2) $|z^2| = |2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = 4$ et en notant θ un argument de z^2 :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ donc à l'aide d'un cercle trigonométrique, $\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc $\boxed{z^2 = 4e^{-\frac{i\pi}{4}}}$ et $\boxed{\text{réponse } b}$

3) $|z^2| = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$ car $|z| \geq 0$.

$$\arg(z^2) = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \Leftrightarrow 2\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{8} + k \times \pi$$

Concrètement, il y a deux possibilités pour l'argument de z : $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$. Or la partie réelle de z est négative, ce qui ne peut pas être le cas pour $-\frac{\pi}{8}$ donc $\arg(z) = \frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$ et $\boxed{z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}}$ et donc $\boxed{\text{réponse } a}$

$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{Re(z)}{|z|} = \cos(\theta) = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et de même $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ donc $\boxed{\text{réponse } a}$