

Fiche d'exercices 8 : Nombres complexes

Ecriture algébrique

Exercice 1

1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = \frac{1+i}{i}$ b. $z_2 = \frac{1}{1-i}$ c. $z_3 = \frac{-2+i}{2+i}$

2. On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = 5 - 2i$$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

a. $z_1 + z_2$ b. $z_1 - z_2$ c. $z_1 - 2z_2$

d. $z_1 \times z_2$ e. $\frac{z_1}{z_2}$ f. $\frac{z_2}{z_1 - z_2}$

3. Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité :

$$z = (x + 2i)(1 - xi)$$

a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z .

b. Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre réel ?

c. Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre imaginaire pur ?

Exercice 2

Ecrire sous forme algébrique : $z_1 = \frac{7+i}{3-2i}$

$$z_2 = \frac{-3}{(1+i)(2-i)}$$

Exercice 3

Déterminer le conjugué du nombre complexe suivant et l'écrire sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}$$

Résolution d'équations

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $3z + iz = 0$

b. $z + 2iz = i$

d. $\frac{z-5}{z-i} = i$

e. $2iz - 3 = z + 1$

g. $\frac{z-1}{iz+3} = 4i$

g. $3z(z+i) = -iz$

h. $-\frac{z}{iz+1} + \frac{3z}{z-1} = 3+i$

c. $z + 2 - i(z+1) = 0$

f. $3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz$

Exercice 5

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations suivantes

1. $(2 + 3i)z - (5 + 2i) = 3z + 4i$.

2. $(7 - i)\bar{z} = 3$.

3. $iz + 2\bar{z} = i - 1$.

Exercice 6

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$

3. $z^2 - 5z + 9 = 0$

4. $z^2 - 3z + 4 = 0$

6. $z^2 - 4z - 1 = 0$

5. $z^2 - z + 10 = 0$

Exercice 7

On considère sur $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(E) \quad (z-2)(z^2 + az + b) = 0$$

2. Résoudre l'équation (E)

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$$

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z , $f(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

Exercice 9

1. Dans $\mathbb{C}$ on considère le polynôme $z^2 + 6z + 25$; déterminer ses racines.

2. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe a et b définis par :

$$a = (1+2i)^2 \quad ; \quad b = (1-2i)^2$$

3. En déduire les solutions de l'équation :

$$z^4 + 6z^2 + 25 = 0$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \bar{z} + \frac{1}{4} = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 11

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

- Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z , $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$.
- En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P .

Exercice 12

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i$.

- Calculer $P(i)$.
- Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z - i)(z^2 + pz + q)$.
- Montrer que les solutions de $P(z) = 0$ sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Exercice 13

Pour tout nombre complexe z différent de 1, on définit $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

- Exprimer X et Y en fonction de x et y .
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 14

Pour tout nombre complexe z différent de i , on définit $Z = \frac{z+3}{z-i}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

- Exprimer X et Y en fonction de x et y .
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Forme trigonométrique et exponentielle

Exercice 15

Calculer le module de chacun des nombres complexes donnés :

- $z_1 = 1 + 3i$
- $z_2 = 3 - 4i$
- $z_3 = -1 + 7i$
- $z_4 = -5 - 3i$

Exercice 16

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes donnés :

- $z_1 = -1 + i$
- $z_2 = i$
- $z_3 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$
- $z_4 = (2 + 2i)(1 - i)$
- $z_5 = i(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$
- $z_6 = \frac{\sqrt{3} + i}{2i}$

Exercice 17

On considère le nombre complexe : $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

- Ecrire z^2 sous forme algébrique.
- Déterminer le module et un argument de z^2 . En déduire le module et un argument de z .

- Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{2}$
et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 18

Soit : $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2 = 1 - i$; $Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$

- Mettre Z_3 sous forme algébrique.
- Déterminer le module et l'argument de Z_1 et de Z_2 .
- Ecrire Z_3 sous forme trigonométrique. En déduire : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$