NOMBRES COMPLEXES - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

On donne $z = 3+\sqrt{3}i$ et $z' = -1+2i$

Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants : $z_1 = z - \overline{z'}$; $z_2 = z \cdot \overline{z}$; $z_3 = z^2$; $z_4 = z'^3$; $z_5 = \dfrac{z}{z'}$

Exercice n°2.

1) Calculer i^2, i^3 et i^4

2) En déduire la valeur de i^{2006} et de i^{2009}, puis les entiers naturels *n* tels que i^n est imaginaire pur

3) Déterminer les entiers naturels *n* tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif.

Exercice n°3.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) Les équations $5z+2i = (1+i)z - 3$ et $\dfrac{z-i}{z+1} = 4i$

2) Le système d'inconnues complexes z_1 et z_2 : $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1-7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$

3) Les équations $2z + i\overline{z} = 3$ et $z^2 + z \cdot \overline{z} = 0$

4) Les équations $-2z^2 + 6z - 5 = 0$ et $(z^2+2)(z^2-4z+4) = 0$

Exercice n°4.

Pour tout complexe $z = x+iy$, avec *x* et *y* réels, $z \neq -1$, on considère le complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-i}{z+1}$

1) On note $z' = x'+iy'$, avec *x*' et *y*' réels. Exprimer x' et y' en fonction de *x* et *y*

2) Déterminer l'ensemble M des points d'affixe *z* tels que z' soit réel.

Exercice n°5.

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B,C et D d'affixes respectives :

$z_A = -1-5i$, $z_B = 4-3i$, $z_C = 3+3i$ et $z_D = -2+i$

1) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

2) Déterminer l'affixe du point C', symétrique du point C par rapport à D

3) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

4) Quelle est la nature du quadrilatère A'BC'D ?

Exercice n°6.

On considère le plynôme $P(z)$ suivant : $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$

1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1

2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z-z_1)Q(z)$

3) Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

5) On note z_3 la 3ième solution de l'équation $P(z) = 0$. Démontrer que les points du plan complexe A,B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3, sont alignés

Exercice n°7.

Déterminer le module, un argument et une forme exponentielle de chacun des nombres donnés :

$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. En déduire module et argument de $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot z_3$ et $(z_2)^2$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°8.

Ecrire $1+i\sqrt{3}$ et $1-i$ sous la forme trigonométrique et simplifier : $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice n°9.

Affirmation	VRAI	FAUX
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$		
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\lvert\bar{z}\rvert=-\lvert z\rvert$		
Pour $z\in\mathbb{C}$ et $z'\in\mathbb{C}$, $z=z'\Leftrightarrow \lvert z\rvert=\lvert z'\rvert$		
Si $\text{Re}(z)<-2$, alors $\lvert z\rvert>2$		
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\lvert 1+iz\rvert=\sqrt{1+z^2}$		

Exercice n°10.

Déterminer et représenter dans chaque cas, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation donnée :

1) $\lvert z-3\rvert=\lvert z-3i\rvert$

2) $\lvert 2-3i+z\rvert=\lvert 2+3i\rvert$

3) $\lvert\bar{z}-4+i\rvert=1$

4) $\arg(\bar{z})=\arg(-z)\ (2\pi)$

Exercice n°11.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+4=0$. On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution

2) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions z_1 et z_2

3) Déterminer le module et un argument de $(z_1)^2$ et $(z_2)^2$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B,A' et B' d'affixes respectives : $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-2+2i\sqrt{3}$ et $-2-2i\sqrt{3}$

4) Déterminer la nature du quadrilatère AA'B'B

5) Démontrer que le triangle AA'B' est rectangle.

6) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\lvert z-1+i\sqrt{3}\rvert=2\sqrt{3}$.

Exercice n°12.

Pour tout nombre complexe z, on définit : $P(z)=z^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)z-8$

1) Calculer $P(2)$. Déterminer une factorisation de $P(z)$ par $(z-2)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive.

Vérifier que $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.

3) a) Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), les points :

A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I milieu de [AB]

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle.

En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OI}\right)$

c) Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°13.

On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$

1) Calculer $P\left(i\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-i\sqrt{3}\right)$. Déterminer le polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a $P(z)=\left(z^2+3\right)Q(z)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

3) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm) les points A,B,C et D d'affixes respectives : $z_A=i\sqrt{3}$; $z_B=-i\sqrt{3}$; $z_C=3+2i\sqrt{3}$ et $z_D=\overline{z_C}$

4) On note E le symétrique de D par rapport à O. Placer le point E sur le dessin. Montrer que $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et déterminer la nature du triangle BEC

Exercice n°14.

z étant un complexe, on note (S) le système $\begin{cases}|z|=|z-6|\\ \arg(z^2)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Donner le module et un argument des trois complexes suivants : $a=\sqrt{3}+i$ $b=-2+2i$ $c=3+3i$

2) Parmi les complexes *a*, *b* et *c*, lesquels sont solutions du système (S) ? (*justifier la réponse*).

3) M étant le point d'affixe *z*, et *A* étant le point d'affixe 6, traduire géométriquement les deux contraintes de (S).

4) Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

Exercice n°15.

Soit le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$

On définit dans P une suite de points $\left(M_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'affixes z_n définies par :

$z_0=8$ et pour tout entier naturel *n*, $z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n$

1) Calculer z_n en fonction de *n*.

2) Pour tout entier naturel *n* , calculer le rapport $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$

En déduire la nature du triangle OM_nM_{n+1} et montrer que : $M_nM_{n+1}=kOM_{n+1}$, où *k* est un réel strictement positif à déterminer .

3) Si r_n est le module de z_n, donner la limite de r_n si n tend vers plus l'infini. Quelle interprétation géométrique peut-on donner ?

Exercice n°16.

On considère l'application *f* du plan qui à tout point M, d'affixe *z* distincte de 2*i*, associe le point d'affixe :

$z'=\dfrac{z+i}{z-2i}$

1) Pour $z\neq 2i$, on pose $z=2i+re^{i\theta}$, avec *r*>0 et $\theta\in\mathbb{R}$. Ecrire $z'-1$ à l'aide de *r* et θ

2) A est le point d'affixe 2*i*

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M pour lesquels $|z'-1|=3$

b) Déterminer l'ensemble E_2 des points M pour lesquels $\arg(z'-1)=\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$

c) Représenter les ensembles E_1 et E_2

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°17.

1) Déterminer la forme complexe de la rotation *r* de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Préciser l'image par *r* du point A d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2) Soit *t* la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = z - \sqrt{3}i$

a) Caractériser la transformation *t*

b) Donner la forme complexe de $t \circ r$

Reconnaître cette nouvelle transformation en déterminant ses éléments caractéristiques

Exercice n°18.

On définit la transformation *f* du plan par sa forme complexe :

$z' + 3 - 4i = 2(z + 3 - 4i)$

1) Quelle est la nature de l'application *f* ?

2) Déterminer l'image *C'* par *f* du cercle *C* de centre A(-2+i) et de rayon 1

Mathématiques - jgcuaz

Mathématiques - jgcuaz

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

NOMBRES COMPLEXES - CORRECTION

Exercice n°1

$z_1 = z - \overline{z'} = 3+\sqrt{3}i-(-1-2i) = 3+\sqrt{3}i+1+2i = \boxed{4+(\sqrt{3}+2)i}$

$z_2 = z\cdot\overline{z} = |z|^2 = |3+\sqrt{3}i|^2 = 3^2+(\sqrt{3})^2 \boxed{=12}$

$z_3 = z^2 = (3+\sqrt{3}i)^2 = 3^2+2\times3\times\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2 = 9+6\sqrt{3}i+(\sqrt{3})^2(i)^2 = 9+6\sqrt{3}i-3 = \boxed{6+6\sqrt{3}i}$

$z_4 = z'^3 = (-1+2i)^3 = (-1)^3+3\times(-1)^2\times(2i)+3\times(-1)^1\times(2i)^2+(2i)^3$

$= -1+6i-3\times(-4)+8i^3 = -1+6i+12+8i\times\underbrace{i^2}_{=-1} = -1+6i+12-8i = \boxed{11-2i}$

$z_5 = \dfrac{z}{z'} = \dfrac{3+\sqrt{3}i}{-1+2i} = \dfrac{(3+\sqrt{3}i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \dfrac{-3-3\times2i-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i^2}{(-1)^2-(2i)^2}$

$= \dfrac{-3-6i-\sqrt{3}i+2\sqrt{3}}{1-(-4)} = \dfrac{2\sqrt{3}-3-i(6+\sqrt{3})}{5} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5}-i\dfrac{6+\sqrt{3}}{5}}$

Exercice n°2

1) On calcule successivement $i^2 = -1$, $i^3 = i^2\times i = -1\times i = \boxed{-i}$ et $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 \boxed{=1}$

2) La division euclidienne de 2006 par 4 fournit $2006 = 4\times501+2$

Ainsi, $i^{2006} = i^{4\times501+2} = i^{4\times501}\times i^2 = (i^4)^{501}\times(-1) = (1)^{501}\times(-1) = \boxed{-1}$

La division euclidienne de 2009 par 4 fournit $2009 = 4\times502+1$

Ainsi, $i^{2009} = i^{4\times502+1} = i^{4\times502}\times i^1 = (i^4)^{502}\times i = (1)^{502}\times i = \boxed{i}$

Notons *q* et *r* le quotient et le reste de la division de *n* par 4. On a donc $n = 4q+r$ avec $0\le r\le3$

Si *r*=0, c'est-à-dire si *n*=4*q*, $i^n = i^{4\times q} = (i^4)^q = (1)^q = \boxed{1}$

Si *r*=1, c'est-à-dire si *n*=4*q*+1, $i^n = i^{4\times q+1} = i^{4\times q}\times i^1 = (i^4)^q\times i = (1)^q\times i = \boxed{i}$

Si *r*=2, c'est-à-dire si *n*=4*q*+2, $i^n = i^{4\times q+2} = i^{4\times q}\times i^2 = (i^4)^q\times i^2 = (1)^q\times(-1) = \boxed{-1}$

Si *r*=3, c'est-à-dire si *n*=4*q*+3, $i^n = i^{4\times q+3} = i^{4\times q}\times i^3 = (i^4)^q\times i^3 = (1)^q\times(-i) = \boxed{-i}$

Les entiers naturels *n* tels que i^n est imaginaire pursont donc de la forme *n*=4*q*+1 ou *n*=4*q*+3

3) Déterminons la forme trigonométrique de $1+i$: Le module de 1+*i* est $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Un argument θ de 1+*i* vérifie $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta = \dfrac{\pi}{4}\,(2\pi)$ convient

Ainsi, $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et pour tout entier naturel, $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$

$(1+i)^n$ sera un réel négatif si et seulement $n\dfrac{\pi}{4} = \pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{n = 4(2k+1), k\in\mathbb{Z}}$

Les entiers naturels *n* tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif sont donc de la forme $\boxed{n = 4(2k+1), k\in\mathbb{Z}}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°3

1)

$5z+2i=(1+i)z-3 \Leftrightarrow z(5-(1+i))=-2i-3 \Leftrightarrow z(4-i)=-2i-3$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-2i-3}{4-i}=\dfrac{(-2i-3)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=\dfrac{-8i-2i^2-12-3i}{4^2-i^2}=\dfrac{2-12-11i}{16+1}=\boxed{-\dfrac{10}{17}-\dfrac{11}{17}i}$

Ainsi, $\boxed{S=\left\{-\dfrac{10}{17}-\dfrac{11}{17}i\right\}}$

Pour $z\neq -1$,

$\dfrac{z-i}{z+1}=4i \Leftrightarrow z-i=4i(z+1) \Leftrightarrow z(1-4i)=4i+i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{5i}{1-4i}=\dfrac{5i(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}=\dfrac{5i+20i^2}{1^2-(4i)^2}=\dfrac{5i-20}{1-(-16)}=\boxed{-\dfrac{20}{17}+i\dfrac{5}{17}}$

Ainsi, $\boxed{S=\left\{-\dfrac{20}{17}+i\dfrac{5}{17}\right\}}$

2) On résout le système par combinaison :

$\begin{cases}3z_1+z_2=1-7i & L_1\\ iz_1+2z_2=11i & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6z_1+2z_2=2-14i & 2L_1\\ iz_1+2z_2=11i & L_2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(6-i)z_1=2-14i-11i & 2L_1-L_2\\ iz_1+2z_2=11i & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z_1=\dfrac{2-25i}{6-i} & 2L_1-L_2\\ z_2=\dfrac{11i-iz_1}{2} & L_2\end{cases}$

On obtient donc :

$z_1=\dfrac{2-25i}{6-i}=\dfrac{(2-25i)(6+i)}{(6-i)(6+i)}=\dfrac{12+2i-150i-25i^2}{36-i^2}$

$=\dfrac{12+2i-150i+25}{36+1}=\dfrac{37-148i}{37}\boxed{=1-4i}$

puis $z_2=\dfrac{11i-i(1-4i)}{2}=\dfrac{11i-i+4i^2}{2}=\dfrac{-4+10i}{2}=\boxed{-2+5i}$

Finalement, $\boxed{S=\{(1-4i;-2+5i)\}}$

3) Si on pose $z=x+iy$, avec $x,y\in\mathbb{R}$, l'équation $2z+i\bar{z}=3$ devient équivalente à :

$2(x+iy)+i(x-iy)=3 \Leftrightarrow 2x+2iy+ix-i^2y=3$

$\Leftrightarrow 2x+y+i(2y+x)=3$

donc équivalente au système $\begin{cases}2x+y=3\\ 2y+x=0\end{cases}$, que l'on résout par substitution :

$\begin{cases}2x+y=3 & L_1\\ 2y+x=0 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-2x & L_1\\ 2(3-2x)+x=0 & L_2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3-2x & L_1\\ 6-4x+x=0 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-2x & L_1\\ x=2 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}y=-1 & L_1\\ x=2 & L_2\end{cases}}$

Ainsi $\boxed{S=\{2-i\}}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Si on pose $z=x+iy$, avec $x,y\in\mathbb{R}$, l'équation $z^2+z\cdot\bar{z}=0\Leftrightarrow z^2+|z|^2=0$ devient équivalente à :

$(x+iy)^2+x^2+y^2=0\Leftrightarrow x^2+2ixy-y^2+x^2+y^2=0\Leftrightarrow 2x^2+2ixy=0$

donc équivalente au système $\begin{cases}x^2=0\\xy=0\end{cases}$. Les solutions sont donc tous les couples $\begin{cases}x=0\\y\in\mathbb{R}\end{cases}$, c'est-à-dire tous les nombres imaginaires purs.

4) On calcule le discriminant de l'équation $-2z^2+6z-5=0$:

$\Delta=6^2-4\times(-2)\times(-5)=36-40=-4=(2i)^2$

L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-6-2i}{2\times(-2)}=\boxed{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i}$ et $z_2=\dfrac{-6+2i}{2\times(-2)}=\boxed{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i}$

$\boxed{S=\left\{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i;\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right\}}$

L'équation $\left(z^2+2\right)\left(z^2-4z+4\right)=0$ se réécrit $\left(z+i\sqrt{2}\right)\left(z-i\sqrt{2}\right)(z-2)^2=0$, et admet donc comme ensemble de solutions $\boxed{S=\left\{-i\sqrt{2};i\sqrt{2};2\right\}}$

Exercice n°4

1) Pour tout complexe $z=x+iy$, avec x et y réels, $z\neq -1$, on calcule :

$z'=\dfrac{z-i}{z+1}=\dfrac{x+iy-i}{x+iy+1}=\dfrac{(x+iy-i)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}=\dfrac{x^2+x-ixy+iyx+iy-i^2y^2-ix-i+i^2y}{(x+1)^2+y^2}$

$=\dfrac{x^2+x+y^2-y}{(x+1)^2+y^2}+i\dfrac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}$.Ainsi $\boxed{x'=\dfrac{x^2+x+y^2-y}{(x+1)^2+y^2}}$ et $\boxed{y'=\dfrac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}}$

2) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=0\Leftrightarrow\dfrac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}=0\Leftrightarrow y-x-1=0\Leftrightarrow\boxed{y=x+1}$ M appartient donc à la droite d'équation $y=x+1$

Exercice n°5

1) On calcule d'une part $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=4-3i-(-1-5i)=4-3i+1+5i=5+2i$,

Et d'autre part $z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=3+3i-(-2+i)=3+3i+2-i=5+2i$

Puisque $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$, on en déduit que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, donc que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2) Si C' est le symétrique du point C par rapport à D, alors $\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{CD}$, ce qui se traduit par $z_{\overrightarrow{DC'}}=z_{\overrightarrow{CD}}$, c'est-à-dire

$z_{C'}-z_D=z_D-z_C\Leftrightarrow z_{C'}=2z_D-z_C=2(-2+i)-(3+3i)$

$=-4+2i-3-3i=\boxed{-7-i}$

Ainsi $z_{C'}=\boxed{-7-i}$

3) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$ se traduit, au niveau des affixes, par :

$z_{\overrightarrow{DA'}}=z_{\overrightarrow{DB}}+z_{\overrightarrow{DC}}\Leftrightarrow z_{A'}-z_D=z_B-z_D+z_C-z_D$

$\Leftrightarrow z_{A'}=z_B+z_C-z_D=4-3i+3+3i-(-2+i)$

$\Leftrightarrow\boxed{z_{A'}=9-i}$

4) On calcule d'une part $z_{\overrightarrow{A'B}}=z_B-z_{A'}=4-3i-(9-i)=-5-2i$, et d'autre part $z_{\overrightarrow{DC'}}=z_{C'}-z_D=-7-i-(-2+i)=-5-2i$

Puisque $z_{\overrightarrow{A'B}}=z_{\overrightarrow{DC'}}$, on en déduit que $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{DC'}$, donc que le quadrilatère A'BC'D est un parallélogramme.

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°6

1) En réécrivant autrement le polynôme P, à savoir :
$P(z)=z^3-22z-36+i\left(9z^2+12z-12\right)=z^3-22z-36+3i\left(3z^2+4z-4\right)$, on s'apperçoit que si z_1 est une racine réelle de *P*, alors on doit avoir nécessairement $z_1^3-22z_1-36=0$ et $3z_1^2+4z_1-4=0$. Cherchons donc les racines **réelles** du polynôme $R(z)=3z^2+4z-4$ en calculant son discriminant : $\Delta=4^2-4\times3\times(-4)=16+48=64=8^2$ d'où l'existence de deux racines réelles $\frac{-4-\sqrt{64}}{2\times3}=-2$ et $\frac{-4+\sqrt{64}}{2\times3}=\frac{2}{3}$. Sur ces deux racines, seule –2 est racine du polynôme $S(z)=z^3-22z-36$. Ainsi la seule racine réelle de *P* est $\boxed{z_1=-2}$

2) Il existe donc un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z)=\left(z-(-2)\right)Q(z)\Leftrightarrow P(z)=(z+2)Q(z)$, avec $\deg Q=\deg P-1=2$, donc de la forme $Q(z)=az^2+bz+c$.

Pour trouver Q, effectuons la division euclidienne du polynôme P par *z*-2 (puisque l'égalité ci-dessus entraîne $Q(z)=\frac{P(z)}{z+2}$, pour tout $z\neq-2$)

On obtient :

$$\begin{array}{l|l}
z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12) & z+2 \\
\hline
z^3+2z^2 & z^2+(9i-2)z-6i-18 \\
(9i-2)z^2+2(6i-11)z-3(4i+12) & \\
(9i-2)z^2+2(9i-2)z & \\
(-6i-18)z-3(4i+12) & \\
(-6i-18)z-12i-36 & \\
0 &
\end{array}$$

Le polynôme Q est donc :

$\boxed{Q(z)=z^2+(9i-2)z-6(i+3)}$

3) On calcule le discriminant du polynôme Q :
$\Delta=(9i-2)^2-4\times1\times\left(-6(i+3)\right)=-81-36i+4+24i+72=-5-12i$. L'astuce est de remarquer que $-5-12i=(2-3i)^2$, ce qui permet de calculer les deux racines complexes de Q : L'une vaut $\frac{-(9i-2)-(2-3i)}{2}=\frac{-6i}{2}=-3i$ et l'autre vaut $\frac{-(9i-2)+(2-3i)}{2}=\frac{-12i+4}{2}=-6i+2$. L'équation Q(z)=0 admet donc une solution imaginaire pure : $\boxed{z_2=-3i}$

4) L'autre solution de l'équation Q(z)=0 ayant été calculée ci-dessus, et par application de la règle du produit nul,
$P(z)=0\Leftrightarrow(z+2)Q(z)=0\Leftrightarrow z+2=0$ ou $Q(z)=0$ et ainsi $\boxed{S=\{-2;-3i;-6i+2\}}$

5) Notons A le point d'affixe $z_1=-2$, B le point d'affixe $z_2=-3i$ et C le point d'affixe $z_3=-6i+2$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut $z_2-z_1=-3i+2$. Celle du vecteur $\overrightarrow{AC}$ vaut $z_3-z_1=-6i+4$

Puisque $z_3-z_1=2(z_2-z_1)$, on en déduit que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc que les points A,B et C sont alignés

Exercice n°7

Le module de z_1 vaut $\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Un argument θ de z_1 vérifie $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$. $\theta=-\frac{\pi}{6}$ convient

Ainsi, $z_1=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Le module de z_2 vaut $\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Un argument θ de z_2 vérifie $\cos\theta=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta=-\dfrac{3\pi}{4}$ convient

Ainsi, $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Pour z_3, on reconnaît directement $z_3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Le module de z_3 vaut donc 1, un argument $\dfrac{2\pi}{3}$. Une forme exponentielle est donc $z_3=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On calcule $z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}=2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{12}}$

Le module de $z_1\cdot z_2$ vaut donc 2 et un argument de $z_1\cdot z_2$ est donc $\dfrac{\pi}{12}$

On calcule $z_1\cdot z_3=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{6}}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{6}}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Le module de $z_1\cdot z_3$ vaut donc $2\sqrt{2}$ et un argument de $z_1\cdot z_3$ est donc $-\dfrac{\pi}{2}$

On calcule $\left(z_2\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times e^{-i\frac{2\times3\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\times e^{-i\frac{3\pi}{2}}=\dfrac{1}{2}\times e^{i\frac{\pi}{2}}$

Le module de $\left(z_2\right)^2$ vaut donc $\dfrac{1}{2}$ et un argument de $\left(z_2\right)^2$ est donc $\dfrac{\pi}{2}$

<u>Exercice n°8</u>

Notons $z_1=1+i\sqrt{3}$. Alors le module de z_1 est $|z_1|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Pour trouver un argument de z_1, cherchons θ tel que $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $\theta=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

De même, notons $z_2=1-i$. Alors le module de z_2 est $|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Pour trouver un argument de z_2, cherchons θ tel que $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

Le quotient $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ s'écrit donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Alors $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}e^{i\frac{20\times7\pi}{12}}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{10}e^{i\frac{140\pi}{12}}$

Comme $140=6\times24-4$, on aura $\dfrac{140\pi}{12}=\dfrac{6\times24\pi}{12}-\dfrac{4\pi}{12}=6\times2\pi-\dfrac{\pi}{3}\equiv-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

Ainsi $e^{i\frac{140\pi}{12}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Enfin, $\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{10}=2^{10}=1024$ En conclusion $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=1024\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\boxed{=512-512\sqrt{3}i}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n9

1) « Pour tout $z\in\mathbb{C}$, z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$ » est **VRAIE**. En effet ; pour tout complexe $z=x+iy$, (x et y réels), z imaginaire pur $\Leftrightarrow x=0\Leftrightarrow \bar{z}=-z=-iy$

2) « Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|\bar{z}|=-|z|$ » est **FAUX**. En effet, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|\bar{z}|=|z|$

3) « Pour $z\in\mathbb{C}$ et $z'\in\mathbb{C}$, $z=z'\Leftrightarrow |z|=|z'|$ » est **FAUX**. Exemple : deux complexes.

4) « Si $\text{Re}(z)<-2$, alors $|z|>2$ » est **VRAI**. En effet, si $z=x+iy$, (x et y réels), et si $x<-2$, alors $OM=\sqrt{x^2+y^2}>2$, c'est-à-dire $|z|>2$

5) « Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|1+iz|=\sqrt{1+z^2}$ » est **FAUX**. exemple : $z=-i$

Exercice n°10

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$,

1) Si on note A et B les points dont les affixes respectives sont 3 et 3i, et M le point dont l'affixe est noté z, l'égalité $|z-3|=|z-3i|$ se traduit par AM=BM. Le point M étant équidistant des points A et B, il appartient à la médiatrice de [AB]. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-3|=|z-3i|$ est donc la médiatrice de [AB], avec A(3) et B(3i)

2) Notons C le point dont l'affixe est –2+3i

Puisque $|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, l'égalité $|2-3i+z|=|2+3i|\Leftrightarrow |z-(-2+3i)|=\sqrt{13}$ se traduit par $CM=\sqrt{13}$

Le point M appartient donc au cercle de centre C et de rayon $\sqrt{13}$. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|2-3i+z|=|2+3i|$ est donc le cercle de centre C(–2+3i) et de rayon $\sqrt{13}$

3) Si on pose $z=x+iy$, avec $x,y\in\mathbb{R}$, l'égalité $|\bar{z}-4+i|=1$, équivalente à $|\bar{z}-4+i|^2=1^2=1$, se réécrit

$|x-iy-4+i|^2=1\Leftrightarrow |x-4-i(y-1)|^2=1\Leftrightarrow \boxed{(x-4)^2+(y-1)^2=1}$

On reconnaît là l'équation du cercle de centre D(4 ;1) et de rayon 1

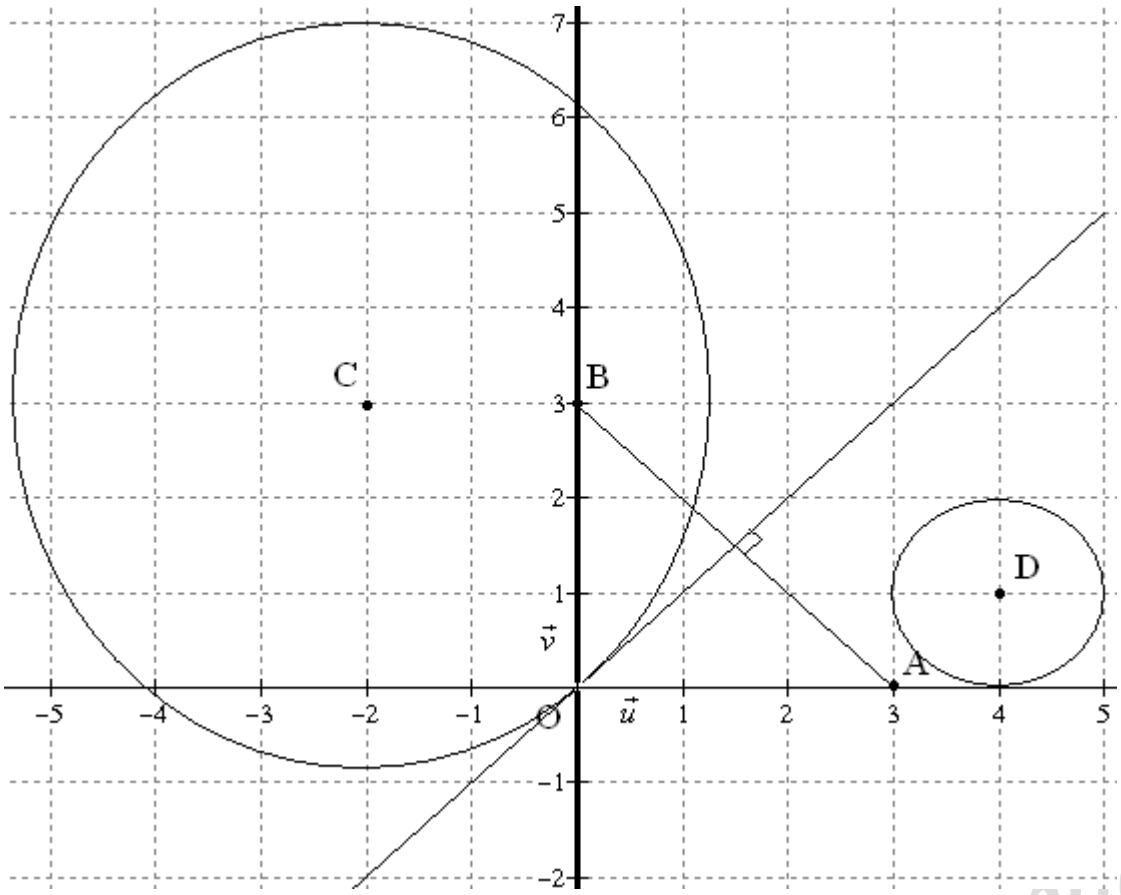
L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|\bar{z}-4+i|=1$ est donc le cercle de centre D(4+i) et de rayon 1

4) Puisque pour tout complexe z, $\arg(\bar{z})=-\arg(z)\ (2\pi)$ et $\arg(-z)=\arg(z)+\pi\ (2\pi)$, l'égalité $\arg(\bar{z})=\arg(-z)\ (2\pi)$ se réécrit $-\arg(z)=\arg(z)+\pi\ (2\pi)$, soit $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\arg(\bar{z})=-\arg(z)\ (2\pi)$ est donc l'axe des imaginaires purs, privé du point O

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com



Exercice n°11

1) Le discrimant de l'équation $z^2-2z+4=0$ vaut $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12$. L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées $z_1=\dfrac{2+i\sqrt{|12|}}{2}=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=\boxed{1+i\sqrt{3}}$ et $z_2=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=\boxed{1-i\sqrt{3}}$

2) On calcule $|z_1|=\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=\boxed{2}$ et $|z_2|=\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=\boxed{2}$.

Si on note $\begin{matrix}\theta_1=\arg(z_1)[2\pi]\\ \theta_2=\arg(z_2)[2\pi]\end{matrix}$, alors $\left.\begin{matrix}\cos(\theta_1)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta_1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\theta_1=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]}$ et $\left.\begin{matrix}\cos(\theta_2)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta_2)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\theta_2=\boxed{-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]}$

3) On calcule $(z_1)^2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=-2+2i\sqrt{3}$ et $(z_2)^2=\left(1-i\sqrt{3}\right)^2=-2-2i\sqrt{3}$.

On a alors $\left|(z_1)^2\right|=\left|-2+2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16}=\boxed{4}$ (remarque : $\left|(z_1)^2\right|=|z_1|^2$). De même $\left|(z_2)^2\right|=\boxed{4}$.

Si on note $\begin{matrix}\alpha_1=\arg\left(z_1^2\right)[2\pi]\\ \alpha_2=\arg\left(z_2^2\right)[2\pi]\end{matrix}$, alors $\left.\begin{matrix}\cos(\alpha_1)=\dfrac{-2}{4}\\ \sin(\alpha_1)=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\alpha_1=\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]}$ et $\left.\begin{matrix}\cos(\alpha_2)=\dfrac{-2}{4}\\ \sin(\alpha_2)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\alpha_2=-\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]}$

4) On calcule $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-2i\sqrt{3}$ et $z_{\overrightarrow{A'B'}}=z_{B'}-z_{A'}=-4i\sqrt{3}$. On constate que $z_{\overrightarrow{A'B'}}=2z_{\overrightarrow{AB}}$.

On en conclut que $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{AB}$, donc $(A'B')//(AB)$, donc le quadrilatère AA'B'B est un trapèze

5) On calcule respectivement : $AA'=|z_{A'}-z_A|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}$,

$A'B'=|z_{B'}-z_{A'}|=\left|-4i\sqrt{3}\right|=\sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2}=4\sqrt{3}=\sqrt{48}$ et $AB'=|z_{B'}-z_A|=\left|-3-3i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36}$

L'égalité $A'B'^2=AA'^2+AB'^2$ nous affirme que le triangle AA'B' est rectangle est rectangle en A

6) L'égalité $\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$, réécrite en $\left|z-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right|=2\sqrt{3}$, se traduit par $BM=2\sqrt{3}$. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ est donc le cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{3}$.

Mathématiques Jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°12

1) On calcule $P(2)=2^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)\times 2^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)\times 2-8=8+8\sqrt{2}-8+8-8\sqrt{2}-8=0$

On peut donc factoriser *P*(*z*) par (*z*-2). Il existe donc trois nombres *a*,*b* et *c*, tels que pour tout *z*, $P(z)=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$. Déterminons *a*,*b* et *c* par identification. Pour tout *z*, $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=az^3+bz^2+cz-2az^2-2bz-2c$. Ainsi, on aura $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=P(z)$ pour tout *z* si $=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$ et seulement si $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=2\left(\sqrt{2}-1\right) \\ c-2b=4\left(1-\sqrt{2}\right) \\ -2c=-8 \end{cases}$, ce qui nous permet d'obtenir $\begin{cases} a=1 \\ b=2\sqrt{2} \\ c=4 \end{cases}$.

Ainsi, pour tout *z*, $\boxed{P(z)=(z-2)\left(z^2+2\sqrt{2}z+4\right)}$

2) D'après la règle du produit nul, $P(z)=0$ si et seulement si z-2=0<=>z=2 ou $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$

On calcule le discriminant de cette dernière équation : $\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 4=8-16=-8=\left(2\sqrt{2}i\right)^2$

L'équation $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$ admet donc deux racines complexes conjuguées :

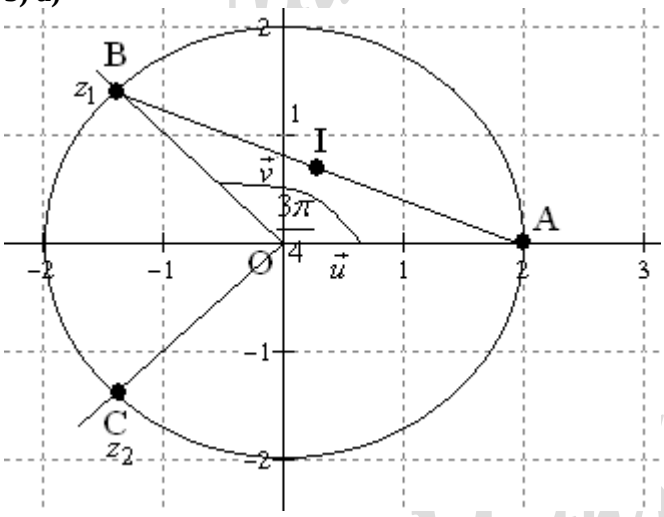
$z_1=\dfrac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ et $z_2=\dfrac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{2}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$. On vérifie que $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$.

Le module de z_1 vaut $\left|-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$

Un argument θ de z_1 vérifie $\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta=\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ convient

Puisque les racines z_1 et z_2 sont conjuguées, le module de z_2 est le même que celui de z_1, à savoir 2, et un argument de z_2 est $\theta=-\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

3) a)



Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

b) On calcule $OA=|z_A|=|2|=2$ et $OB=|z_1|=2$. Puisque OA=OB, le triangle OAB est isocèle en O.

Puisque le trianble OAB est isocèle en O, la médiane (OI) issue de O est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OI}\right)$ est donc $\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{8}$

c) Puisque I est le milieu de [AB], $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le module de z_I vaut donc $\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

d) Puisque $\left(\vec{u};\overrightarrow{OI}\right)=\frac{3\pi}{8}\ (2\pi)$, on a donc $\arg(z_I)=\frac{3\pi}{8}\ (2\pi)$

Et puisque $z_I=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit alors que $\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{|z_I|}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$, et que

$$\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{|z_I|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

Exercice n°13

1) On calcule :

$$P\left(i\sqrt{3}\right)=\left(i\sqrt{3}\right)^4-6\left(i\sqrt{3}\right)^3+24\left(i\sqrt{3}\right)^2-18\left(i\sqrt{3}\right)+63=\left(\sqrt{3}\right)^4i^4-6\left(\sqrt{3}\right)^3i^3+24\left(\sqrt{3}\right)^2i^2-18i\sqrt{3}+63$$

$$=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2\left(\underbrace{i^2}_{-1}\right)^2-6\left(\sqrt{3}\right)^2\times\left(\sqrt{3}\right)\underbrace{i^2}_{-1}\times i+24\left(\sqrt{3}\right)^2\underbrace{i^2}_{-1}-18i\sqrt{3}+63$$

$$=9+18\sqrt{3}i-72-18i\sqrt{3}+63=-63+63\boxed{=0}$$

et de même

$$P\left(-i\sqrt{3}\right)=\left(-i\sqrt{3}\right)^4-6\left(-i\sqrt{3}\right)^3+24\left(-i\sqrt{3}\right)^2-18\left(-i\sqrt{3}\right)+63=\left(-\sqrt{3}\right)^4i^4-6\left(-\sqrt{3}\right)^3i^3+24\left(-\sqrt{3}\right)^2i^2+18i\sqrt{3}+63$$

$$=\left(\left(-\sqrt{3}\right)^2\right)^2\left(\underbrace{i^2}_{-1}\right)^2-6\left(-\sqrt{3}\right)^2\times\left(-\sqrt{3}\right)\underbrace{i^2}_{-1}\times i+24\left(-\sqrt{3}\right)^2\underbrace{i^2}_{-1}+18i\sqrt{3}+63$$

$$=9-18\sqrt{3}i-72+18i\sqrt{3}+63=-63+63\boxed{=0}$$

Les complexes $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ sont donc racines sur polynôme P.

Ainsi, il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels tels que :

$P(z)=\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+i\sqrt{3}\right)Q(z)\Leftrightarrow P(z)=\left(z^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)Q(z)\Leftrightarrow P(z)=\left(z^2+3\right)Q(z)$ Pour trouver Q, on effectue une division entre polynômes : Pour tout z différent de $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$, on a

$Q(z)=\frac{P(z)}{z^2+3}$. On effectue la division : $\longrightarrow$

$z^4-6z^3+24z^2-18z+63$	z^2+3
$z^4\quad+3z^2$	$z^2-6z+21$
$-6z^3+21z^2-18z+63$	
$-6z^3\quad-18z$	
$21z^2\quad+63$	
$21z^2\quad+63$	
0	

Ainsi $\boxed{Q(z)=z^2-6z+21}$

jgcuaz@hotmail.com

2) Puisque $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$, la règle du produit nul affirme que $P(z)=0 \Leftrightarrow z^2+3=0$. Ou $z^2-6z+21=0$ Résolvons l'équation $z^2-6z+21=0 \Leftrightarrow Q(z)=0$ en calculant le discriminant du polynôme Q : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times21=36-84=-48$. Le polynôme Q admet donc deux racines complexes conjuquées $z_1=\dfrac{-(-6)+i\sqrt{48}}{2\times1}=\dfrac{6+4i\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{=3+2i\sqrt{3}}$ et $z_2=\overline{z_1}$ $\boxed{=3-2i\sqrt{3}}$. Ainsi $\boxed{S=\left\{i\sqrt{3};-i\sqrt{3};3+2i\sqrt{3};3-2i\sqrt{3}\right\}}$

3) cf fin d'exercice

4) Si E est le symétrique de D par rapport à O, alors $z_E=-z_D=-\left(3-2i\sqrt{3}\right)=-3+2i\sqrt{3}$

On calcule alors $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$

On multiplie numérateur et cénominateur de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{(-1)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2-2i\sqrt{3}}{1+3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

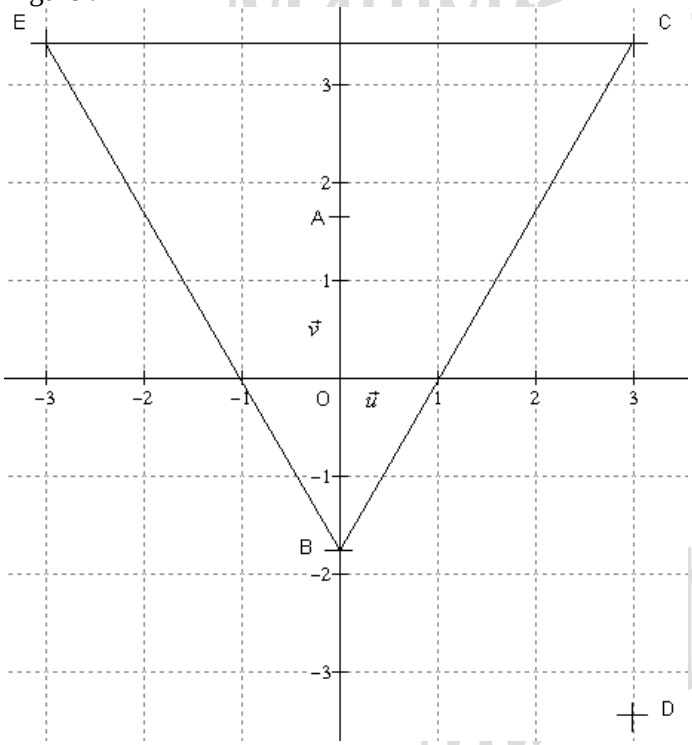
On détermine module er argument de $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

Le module de ce complexe vaut $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$. On cherche ensuite θ tel que $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $\theta=-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

De l'égalité précédente, on déduit que $\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=\left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right| \Leftrightarrow \dfrac{BC}{BE}=1 \Leftrightarrow BC=BE$, donc le triangle BEC est isocèle en B.

De plus $\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\boxed{\text{le triangle BEC est finalement équilatéral}}$

Figure :



Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°14

1) On calcule $|a|=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$. Le module de *a* vaut donc 2, et on cherche θ tel que $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$. On trouve $\theta=\frac{\pi}{6}[2\pi]$. Un argument de *a* est donc $\frac{\pi}{6}$

On calcule $|b|=|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Le module de *b* vaut donc $2\sqrt{2}$, et on cherche θ tel que $\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$. Un argument de *b* est donc $\frac{3\pi}{4}$

On calcule $|c|=|3+3i|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Le module de *c* vaut donc $3\sqrt{2}$, et on cherche θ tel que $\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta=\frac{\pi}{4}[2\pi]$. Un argument de *c* est donc $\frac{\pi}{4}$

2) La condition $\arg(z^2)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2\arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\arg(z)=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ permet déjà d'éliminer les complexes *a* et *b*. Seul le complexe *c* est candidat. On calcule $|c-6|=|3+3i-6|=|-3+3i|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Comme $|c-6|=|c|$, le complexe *c* est le seul à vérifier le système (S)

3) La contrainte $|z|=|z-6|\Leftrightarrow|z-0|=|z-6|$ se traduit par la condition géométrique $OM=AM$. La contrainte $\arg(z^2)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2\arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\arg(z)=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ se traduit par la condition géométrique $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

4) Les complexes solutions du système (S) sont les affixes des points d'intersection de la médiatrice de [OA] et de la droite formée des points M tels que $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$, cest-à-dire la 1ère bissectrice. Ces deux droites n'ayant qu'un seul point d'intersection, on en déduit que le système (S) n'admet qu'un seule solution. Cette solution est le complexe *c*, comme démontré précédemment.

Exercice n°15

1) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$

Forme exponentielle de $q=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$: $|q|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{16}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, et si on note θ un argument de *q*, à 2π près, on a $\cos(\theta)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où on reconnaît $\theta=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et ainsi $q=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(on pouvait aussi directement remarquer que $q=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$)

Ainsi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ $z_n=z_0\times q^n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

2) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, puisque $z_n\neq 0$,

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n-z_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-1}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-\frac{4}{4}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{4}\times\frac{4}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{-3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-i^2\left(\sqrt{3}\right)^2}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}i-3+3}{4}=\boxed{\sqrt{3}i}$$

En calculant module et argument de ce dernier complexe, on obtient $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right|=\left|\sqrt{3}i\right|\Leftrightarrow\frac{M_nM_{n+1}}{OM_{n+1}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow$ $\boxed{M_nM_{n+1}=\sqrt{3}OM_{n+1}}$ (le réel *k* dont parle l 'énoncé est $\sqrt{3}$.). De plus, $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=\arg\left(\sqrt{3}i\right)[2\pi]\Leftrightarrow$ $\boxed{\left(\overrightarrow{OM_{n+1}};\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]}$ donc $\boxed{\text{le triangle } OM_nM_{n+1} \text{ est rectangle en } M_{n+1}}$

3) Nous avons calculé, dans la question1), que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ $z_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$. Ainsi $\boxed{r_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n}$, et puisque $0<\frac{1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0}$, donc $\boxed{\text{le point } M_n \text{ a pour position limite le point O lorsque } n \text{ tend vers plus l'infini.}}$

Exercice n°16

1) Pour tout $z\neq 2i$, on calcule $z'-1=\frac{z+i}{z-2i}-1=\frac{z+i}{z-2i}-\frac{z-2i}{z-2i}=\frac{3i}{z-2i}$

Si on pose $z=2i+re^{i\theta}$, avec r>0 et $\theta\in\mathbb{R}$, alors $z'-1=\frac{3i}{z-2i}=\frac{3i}{2i+re^{i\theta}-2i}=\frac{3i}{re^{i\theta}}=\frac{3i}{r}e^{-i\theta}$

Enfin, on peut écrire $z'-1=\frac{3i}{r}e^{-i\theta}=\frac{3}{r}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\theta}=\boxed{\frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$

2) a) Un point M aura une affixe z vérifiant $|z'-1|=3$ si et seulement si :

$$\left|\frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right|=3\Leftrightarrow\left|\frac{3}{r}\right|\underbrace{\left|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right|}_{1}=3\Leftrightarrow\frac{3}{r}=3\Leftrightarrow\frac{1}{r}=1\Leftrightarrow\boxed{r=1}$$

Ainsi, on aura $z=z_A+e^{i\theta}\Leftrightarrow z-z_A=e^{i\theta}$, ce qui implique $|z-z_A|=\left|e^{i\theta}\right|=1\Leftrightarrow AM=1$ et $\arg\left(z-z_A\right)=\theta\ (2\pi)$.

Le point M appartient donc au cercle de centre A et de rayon 1. $\boxed{E_1 \text{ est donc le cercle de centre A et de rayon 1.}}$

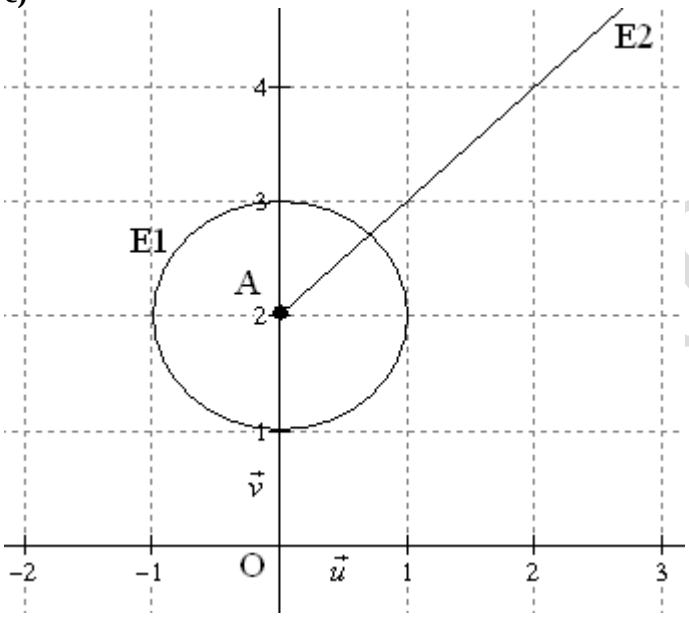
b) Puisque $z'-1=\frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$, on aura $\arg\left(z'-1\right)=\frac{\pi}{2}-\theta\ (2\pi)$. Un point M aura une affixe z vérifiant $\arg\left(z'-1\right)=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ si et seulement si : $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$. Ainsi $z-z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$. Le point M appartient donc à la demi-droite d'origine A et d'équation polaire $\theta=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$\boxed{E_2 \text{ est donc la demi-droite d'origine A et d'équation polaire } \theta=\frac{\pi}{4}}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

c)



Exercice n°17

1) La rotation *r* de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est la transformation qui, à tout *z* associe $z'=r(z)$ tel que

$z'-z_\Omega=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_\Omega)\Leftrightarrow z'+1=e^{i\frac{\pi}{3}}(z+1)\Leftrightarrow \boxed{z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z+1)-1}$, ou encore $\boxed{z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}}$

L'image par *r* du point A d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ a pour affixe $z'_A=r(z_A)=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}+1\right)-1=1+e^{i\frac{\pi}{3}}-1=\boxed{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

L'image par *r* du point A d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) a) Si on note $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $-\sqrt{3}i$, alors la transformation *t* est la translation de vecteur $\vec{w}$

b) Pour tout complexe z,

$t\circ r(z)=t(r(z))=t\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\sqrt{3}i=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}z-e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminons les éventuels points fixes de cette transformation, en résolvant l'équation :

$t\circ r(z)=z$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=z\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\Leftrightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}}z=e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow z=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

On reconnaît l'affixe du point A. L'unique point fixe de la transformation $t\circ r$ est le point A

En écrivant simultanément $t\circ r(z)=e^{i\frac{\pi}{3}}z-e^{i\frac{\pi}{3}}$ et et $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}z_A-e^{i\frac{\pi}{3}}$,

on obtient, par soustraction, $t\circ r(z)-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)$

La transformation $t\circ r$ est donc la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°18

1) Déterminons les éventuels points fixes de cette transformation, en résolvant l'équation :

$z' = z \Leftrightarrow z = 2(z+3-4i)-3+4i$

$\Leftrightarrow z = 2z+6-8i-3+4i$

$\Leftrightarrow z = -3+4i$

La transformation *f* admet un point fixe Ω, d'affixe $z_\Omega = -3+4i$.

En écrivant successivement $z' = 2z+3+4i$ et $z_\Omega = 2z_\Omega + 3 + 4i$, puis en soustrayant membre à membre, on obtient :

$z' - z_\Omega = 2(z - z_\Omega)$.

La transformation *f* est donc l'homothétie de centre Ω, d'affixe $z_\Omega = -3+4i$, et de rapport 2

2) Par l'homothétie *f* de centre Ω et de rapport 2, l'image *C'* du cercle *C* de centre A(-2+i) et de rayon 1 est le cercle de centre *f*(A) et de rayon $2 \times 1 = 2$.

On calcule :

$f(A) = 2(-2+i)+3+4i = -4+2i+3+4i = -1+6i$

L'image de *C* est le cercle *C'* de centre le point *f*(A) d'affixe –1+6i et de rayon 2.

Mathématiques - jgcuaz

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com