Nombres complexes 2020 - 2021

EXERCICE 1 :

1) Déterminer la forme algébrique de z dans chaque cas :

$z_1 = (1+i)(1-2i)$; $z_2 = (2i+1)(1+i)^2(3i-4)$

$z_3 = \frac{1-i}{2i}$; $z_4 = \frac{1+4i}{1+\sqrt{2}i}$; $z_5 = \frac{(3-2i)(5+i)}{5-i}$

$z_6 = (2+i)(-1+i)+(1+2i)$; $z_7 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^3$; $z_8 = \frac{1-3i}{3-i}$

$Z_9 = (z+2)(2z-i)$; $Z_{10} = \frac{z+1+i}{z-2}$ **en prenant** $z = x+iy$

2) Soit deux nombres complexes $z_1 = -1+2i$ **et** $z_2 = 1-i$.

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

a) $Z_1 = z_1^2 - 2z_2$; $Z_2 = z_1 z_2^2$; $Z_3 = (z_1 - 3z_2)^3$

b) $Z_1 = \frac{z_1}{z_2}$;$Z_2 = \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$; $Z_3 = \frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}$

EXERCICE 2 :

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$z_0 = 1+i$; $z_1 = -1+i\sqrt{3}$; $z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_4 = \left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{13}$; $z_5 = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9(1-i)}{(1+i)^2}$;

$z_6 = \sin\theta + i(1+\cos\theta)$ $\theta \epsilon [0;\pi[$; $z_7 = 1-e^{i\theta}$; $z_8 = 1+e^{i\theta}$

$z_9 = \frac{z_7}{z_8}$; $z_{10} = z_7 \times z_8$, $T = \frac{z_2}{z_3}$; $P = z_2 \times z_3$

EXERCICE 3 :

Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexe :

$z_1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{13}$; $z_2 = 1+i\sqrt{3}$; $z_3 = -\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9(1-i)}{(1+i)^2}$

$z_4 = \sin\alpha + i(1+\cos\alpha)$ où $\alpha \in]0 ; \pi[$

4) Soit α **un nombre réel élément de** $]0 ; \pi[$**. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :**

$z_0 = 1-e^{i\alpha}$; $z_1 = 1+e^{i\alpha}$; $Z = \frac{z_0}{z_1}$; $T = z_0 \times z_1$.

EXERCICE 4 :

1) Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z **tels que le nombre complexe**

$A = (1+z)(1-iz)$ **soit :**

a) un réel ;

b) un imaginaire pur

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ **on considère un point** M **d'affixe**

$z = x+iy$; $(z \neq -i)$ **et on pose** $P = \frac{z+2}{z+1}$

a) Ecrire P **sous la forme algébrique en fonction de** x et y.

b) Déterminer l'ensemble (E) **des points** M **du plan tels que :**

- P **soit un réel ;**

- P **soit imaginaire pur**

3) Pour tout nombre complexe $z = x+iy$; on pose $z_0 = \frac{iz+3}{(1+i)z-1}$.

a) Déterminer l'ensemble (E) **des points** M **tels que** z_0 **soit un réel ;**

b) Déterminer l'ensemble (F) **des points** M **tels que** z_0 **soit un imaginaire pur.**

4) Déterminer l'ensemble des images des complexes z **tels que les images des nombres complexe**

i ; z ; iz **soient alignées.**

EXERCICE 5 :

Soit f **l'application de** $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ **définie par** $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}\,z - 16$.

1) Trouver les réels a et b **tels que** $f(z) = (z^2+4)(z^2+az+b)$

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$.

3) Placer dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ **les images**

A ; B ; C ; D des solutions de $f(z) = 0$ **; puis préciser que ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.**

EXERCICE 6 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+3(1+i)z+5i=0$

b) $z^2-(5+3i)z+4+7i=0$

c) $iz^2-2z-4-4i=0$

d) $z^2-(1-i)z-18+13i=0$

e) $z^2+(1+6i)z+(1+23i)=0$

f) $(2iz+3-i)^2+(z+1+5i)^2=0$

g) $z^4-(5-14i)z^2-(24+10i)=0$

h) $z^4+z^2+1=0$

i) $z^6-(1-i)z^3-1=0$

j) $z^3=8i$

k) $z^3=-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

l) $z^6=4\sqrt{2}(-1+i)$; $z^4=-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

2) a) Déterminer les solutions complexes de l'équation : $z^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ **les écrire sous forme trigonométrique ;**

b) Vérifier que $a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ **est une racine quatrième de** $8\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

EXERCICE 7 :

Soient les complexes $z_1=1-i$ et $z_2=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1) Mettre sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 ; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1\times z_2$

2) En déduire que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2.$

Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$; puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique

EXERCICE 8 :

1) Soit z et Z **les nombres complexes définis par :**

$z=\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $Z=z^4$

Déterminer les racines quatrièmes de Z **sous forme trigonométrique.**

En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

2) Déterminer $A=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1987}$; $B=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1992}$

3) Déterminer et construire l'ensemble (E) **des points** M **du plan d'affixe** z **vérifie la condition proposée :**

a) $|z+1+2i|=|z-4|$; b) $|z-3i|=2$;

c) $|\bar{z}-2+i|=1$; d) $|(1+i)z-2i|=2.$

EXERCICE 7 :

1) a) Calculer les nombres : $a=i^4$; $b=i^5$; $c=i^6$ $d=i^7$.

b) En déduire les valeurs de

i^{4n} ; i^{4n+1} ; i^{4n+2} ; i^{4n+3} avec $(n\in\mathbb{N})$.

c) Calculer :

$A=i^{60}$; $B=i^{149}$; $C=i^{134}$; $D=i^{167}$; $E=i^{156}$

$F=i^{205}$; $G=i^{94}$; $H=i^{215}$

2) a) linéariser : cos^5x ; sin^5x ; cos^3x ; sin^3x.

b) Ecrire $\cos 4x$ **en fonction de** $\sin x$.

c) Ecrire $\sin 4x$ **en fonction de** $\sin x$ et $\cos x$.

d) Ecrire $\cos 3x$ **en fonction de** $\cos x$.

e) Ecrire $\sin 3x$ **en fonction de** $\sin x$.

f) En déduire une linéarisation de :

$H=\cos(4x).\sin x$; $G=4cos^3x-3\cos x-4sin^3x+3\sin x$

$K=\cos(3x).sin^2x$; $L=\sin(3x).sin^2x$.

3) Linéariser les expressions suivantes :

$A=cos^2x.sin^3x$; $B=\sin(3x).cos^2x$; $C=\cos x.sin^4x$

$D=sin^4x+sin^2x$ $E=cos^2x.sin^5x$ $F=cos^3x.sin^3x$

$G=cos^3x.sin^2x$ $H=cos^4x+sin^4x$.

EXERCICE 9:

Le plan est orienté et rapporté au repère orthonormé direct. Soit A et B **deux points distincts d'affixes respectives** a et b.

1) Construire le point M_1 **dont l'affixe** z_1 **vérifie :** $\frac{z_1-a}{z_1-b}=-1$

2) Construire le point M_2 dont l'affixe z_2 vérifie : $\frac{z_2-a}{z_2-b}=2$

3) Construire le point M_3 dont l'affixe z_3 vérifie : $\frac{z_3-a}{z_3-b}=i$

4) Construire le point M_4 dont l'affixe z_4 vérifie : $\frac{z_4-a}{z_4-b}=-i$.

EXERCICE 10 :

1) Pour tout complexe z distinct de 1, on appelle A ; M et M' les points d'affixes respectives 1 ; z ; z^2. Déterminer les points M tels que le triangle AMM' soit équilatéral.

2) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i sous forme trigonométrique et algébrique.

En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left((1-2i)z\right)^3-i=0$

3) Calculer le module et l'argument du nombre complexe $u=\frac{1}{1+i\tan\theta}$

(On discutera suivant les valeurs de θ)

EXERCICE 11 :

Pour chaque réel $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, on définit l'application :

$$f_\alpha:\ \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$Z\ \longmapsto\ f_\alpha(z)=z^2\cos^2\alpha-2z.\cos\alpha+1+\sin^2\alpha$$

Dans le plan affine euclidienne muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, on désigne par (E) l'ensemble des points M d'affixes z telle qu'il existe $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, vérifiant $f_\alpha(z)=0$.

1) a) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $f_\alpha(z)=0$.

b) Si le point $M(z)$ appartient à (E), que peut – on dire du point M' d'affixe $\bar{z}$?

2) Pour $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ fixé on pose : $Z=\frac{1}{2}i(z'+z'')$ où z' et z'' sont les solutions de l'équation $f_\alpha(z)=0$. Déterminer les racines quatrièmes de Z et représenter les points images sur un cercle.

EXERCICE 12 :

Soit l'application $f:\ \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$

$$Z\ \longmapsto\ f(z)=z^3-3(1+i)z^2+(3+10i)z+3(1-3i)$$

1) Déterminer les nombres complexes a ; b et c pour que :
$f(z)=(z-1-i)(az^2+bz+c)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

3) Montrer que les points images dans le plan complexe, des solutions de cette équations sont alignés.

EXERCICE 13 :

Soit le polynôme complexe $P(z)$ de la variable complexe z.

$P(z)=z^3-(7+9i)z^2+(39i-14)z+50$

1) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une racine z_0 imaginaire pure.

2) Résoudre l'équation $P(z)=0$. On notera z_1 la racine non imaginaire pur ayant la plus petite partie réelle et z_2 la troisième.

3) Dans le plan affine euclidien rapporté au repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ orthonormé, on considère les points A ; B et C d'affixe respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2-MB^2+MC^2=4$.

EXERCICE 14 :

1) Soit le polynôme $P(z)=z^3-(3+6i)z^2-(9-15i)z+22-6i$

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une racine réelle que l'on déterminera.

b) En déduire une résolution dans $\mathbb{C}$ de $P(z)=0$.

c) Soient A ; B ; C les images respectives des solutions de $P(z)=0$. Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé ces points et en déduire la nature du triangle ABC. Donner une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^4+10z^2+169=0$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes :

$a)\ \begin{cases}5iz+(2-i)z'=1+12i\\(2-3i)z+(5-2i)z'=39-10i\end{cases}$; $b)\ \begin{cases}2iz+(1-3i)z'=14+6i\\(1+i)\bar{z}+(5-2i)\overline{z'}=4-18i\end{cases}$

c) $\begin{cases} 2iz + 2z' = 4 - 4i \\ (1+i)z - 2z' = -5 + 7i \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2z_1 z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^7 = \frac{(4+4i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$; b) $z^5 = \frac{\left(1-2\sqrt{3}+i(2+\sqrt{3})\right)^7}{(2-i)^7.(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^2}$

EXERCICE 15 :

Soit le polynôme complexe $P(z) = (z^2+3z)^2 + (3z+5)^2$.

1) Factoriser $P(z)$ en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients complexes.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$.

3) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$; puis montrer que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

EXERCICE 16 :

Le plan rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

1) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z + \frac{1}{2} + i\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$

2) On donne les points $A(-1\ ;\ -5)$ et $B\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\right)$. A tout point M d'affixe $z, (z \neq -1-5i)$ on associe le point M' d'affixe Z tel que : $Z = 3i.\left(\frac{z-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}i}{z+1+5i}\right)$

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que : $Z = z$.

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que : $|Z| = 3$.

c) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1.

d) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe $[O\ ;\ \vec{u})$ privé de $\{O\}$.

EXERCICE 17 :

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue z complexe (E):

$(1+iz)^3(1-\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+\tan\alpha)$

1) Soit z une solution de (E)

a) Montrer que $|1+iz| = |1-iz|$.

b) En déduire que z est un réel.

2) a) Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b) Soit z un nombre réel, on pose $z = \tan\varphi$ où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ecrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et le résoudre.

c) Déterminer les solutions z_1 ; z_2 ; z_3 de (E).

EXERCICE 18 :

Soit u le nombre complexe défini par $u = \cos\theta + i\sin\theta$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

1) Calculer le module et un argument de $\frac{1-u}{1+u}$ (On discutera suivant les valeurs de θ)

2) En déduire le module et un argument de z tel que : $u = \frac{2+iz}{2-iz}$

3) Résoudre $(2+iz)^6 = (2-iz)^6$.

EXERCICE 19 :

Le plan rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

1) Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points images des nombres complexes 1 ; z ; $1+z^2$ soient alignées ;

2) On désigne par M le point d'affixe z et M' le point d'affixe Z tel que $Z = \frac{z+1}{z-1}$.

a) Trouver l'ensemble (D) des points M tel que Z soit un réel ;

b) Trouver l'ensemble (C) des points M tel que Z soit un imaginaire pur ;

c) Trouver l'ensemble (Γ) des points M tel que O ; M ; M' soient alignés.

EXERCICE 20 :

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$

1) Montrer que l'équation admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle.

2) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

3) Soient A ; B et C les points images de ces solutions dans le plan complexe

muni d'un repère orthonormé. Déterminer la nature du triangle ABC.

4) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G de ce triangle.

EXERCICE 21 :

Soit $f: \mathbb{C}-\{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto f(z)=\frac{iz}{z+i}$$

1) Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que : $f(z_0) = 1+2i$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}-\{-1\}$. On note r le module de $z+i$ et α une mesure de son argument.

3) Soit A le point d'affixe $-i$.

a) déterminer l'ensemble (Γ) des points M vérifiant : $|f(z)-i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble (D) des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z)-i$.

b) Montrer que B appartient à (Γ) et (D) puis construire (Γ) et (D).

4) A tout point d'affixe $Z = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)z$. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que $|Z| = 8$.

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-(1+i\sin 2\theta)z+\frac{1}{2}i\sin 2\theta = 0$ où θ est un paramètre réel. En discutant selon les valeurs de θ, on écrira les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous la forme trigonométrique.

EXERCICE 22 :

1) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = 7-i+\frac{5}{(1-7i)(i-1)}$

2) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe t dans les cas suivants :

$a)\ t=\dfrac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}$; $b)\ t=-2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $c)\ t=\dfrac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

3) a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité ; puis les écrire sous formes trigonométrique et algébrique.

b) Calculer $(1-i)^6$.

c) En déduire les racines sixièmes du complexe $T = 8i$ sous formes trigonométrique et algébrique.

EXERCICE 23 :

1) a) Vérifier que $(2+i)^4 = -7+24i$

b) Trouver les racines quatrièmes de 1

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+7-24i = 0$

2) Soit l'équation (E) : $z^3-2iz^2-9z+18i = 0$

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre (E).

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+z-1+3i = 0$.

EXERCICE 24 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A est le point d'affixe $z = 1+2i$; B est le point d'affixe $t = 1+5i$; C est le point d'affixe $k = 4+2i$. On pose $Z=\frac{k-z}{t-z}$.

1) Que représente $|Z|$?

2) Que représente $\arg(Z)$?

3) Calculer Z et en déduire la nature du triangle ABC.

4) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M d'affixe m tels que $|m-z| = |\overline{m}-t|$.

EXERCICE 25 :

1) déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines carrées de $u = 7+24i$.

2) Les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré à coefficients complexes vérifient :

$$\begin{cases} z_1+z_1+z_1z_2 = 4 \\ \dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2} = 1 \end{cases}$$

. Former cette équation et la résoudre dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 26 :

I) Soit le complexe $z = (\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

1) Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.

2) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\sin x = \sqrt{2}$

II) 1) Trouver l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan d'affixe z tel que : $Z^2 + 2z - 3$ soit un réel.

2) Déterminer l'ensemble des nombres z tels que : $\frac{z+2i}{z-4i}$ soit réel (on suppose $z \neq 4i$).

EXERCICE 27 :

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.

1) α désigne un complexe quelconque. Montrer que $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.

Déduisez que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2) Calculer $P(1-i)$; en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3) Placer les points images de solutions de l'équation $f(z) = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

4) Montrer que tous ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon (points cocycliques).

EXERCICE 28 :

On donne $A = 5\sqrt{2}(1+i)$; $B = -5\left(1+i\sqrt{3}\right)$

1) Déterminer le module et un argument des nombres A ; B ; $\overline{A}$; $\frac{1}{A}$.

2) Soit Z le complexe tel que $AZ = B$. Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 29 :

Soit l'équation (E) : $z^3 - 10z^2 + 36z - 40 = 0$.

1) Vérifier que 2 est une solution de l'équation (E).

2) Trouver les réels a ; b ; c tels que : $z^3 - 10z^2 + 36z - 40 = (z-2)(az^2 + bz + c)$.

3) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

4) On pose $z_A = 2$; $z_B = 4 - 2i$; $z_C = 4 + 2i$. Placer les images respectives A ; B ; C dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé.

5) Calculer $|z_C - z_A|$; $|z_C - z_B|$; $|z_A - z_B|$. En déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE 30 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 4(2+4i)$.

1) Calculer $f(2i)$. Que peut – on conclure ?

2) Trouver les complexes a ; b ; c tels que $f(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$.

3) a) Calculer $(1+2i)^2$.

b) En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$.

4) Soient A ; B ; C les points d'affixes respectives $2i$; $3+i$; $2-2i$.

a) Placer les points A ; B ; C.

b) On pose $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. Donner la forme algébrique de Z. En déduire le module et un argument de Z.

c) Interpréter le module et un argument de Z.

5) Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$. Déterminer les coordonnées de D puis le placer sur la figure précédente.

6) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 31 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique 1 cm).

Soit le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (5+8i)z^2 - (13-32i)z + 57 - 24i$

1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle α.

2) Déterminer les complexes P et Q tels que $f(z) = (z-\alpha)(z^2 + Pz + Q)$.

3) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$. (On notera z_A la solution réelle ; z_B la solution non imaginaire dont la partie réelle est positive et z_C la troisième solution).

4) Soient A ; B ; C les points images respectives des solutions z_A ; z_B ; z_C de l'équation $f(z) = 0$. Placer ces points dans le plan complexe. En déduire la nature du triangle ABC.

5) Déterminer les coordonnées du point I d'affixe $z = x + iy$ tel que :
$|z - z_A| = |z - z_B| = |z - z_C|$

6) Déterminer et construire l'ensemble (Q) des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tel que : $MA^2 + MC^2 = 32$.

7) Soit D le point d'affixe $z_D = -1 - 3i$.

a) Déterminer la nature du polygone $ABCD$.

b) Calculer le périmètre et l'aire du polygone $ABCD$.