

Série d'exercices

Chapitre : Nombres complexes

Exercice n°1 : QCM

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Une solution de $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :
 - a) 3
 - b) i
 - c) $3 + i$
- 2) Soit z un nombre complexe, $\frac{1}{1+z}$ est égale à :
 - a) $\frac{1+\bar{z}}{|1+z|^2}$
 - b) $\frac{1-z}{|1+z|^2}$
 - c) $\frac{1}{1-iz}$
- 3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ .
Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ est :
 - a) $\frac{\pi}{3} + \theta$
 - b) $\frac{2\pi}{3} + \theta$
 - c) $\frac{2\pi}{3} - \theta$
- 4) On considère le nombre complexe : $z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$. Alors on a :
 - a) $|z| = 1$
 - b) $Z = -(1-i)e^{i\pi/3}$
 - c) $Z = e^{\frac{13i\pi}{12}}$

Exercice n°2 :

Soit $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2(1-i)}$

- 1) Mettre z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
- 2) En déduire $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

Exercice n°3 :

On donne $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

- 1) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes z_1 et z_2
- 2) Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique z_1^{21}

- 3) Le plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- Placer A, B et C d'affixes z_1, z_2 et $z = z_1 + z_2$
 - Montrer que OABC est un carré .
 - En déduire le module et un argument de z

Exercice n°4 :

Résoudre dans IC chacune des équations ci-dessous :

- $z^2 + 18z + 1681 = 0$
- $z^2 - (5-i)z + 8-i = 0$
- $z^2 + 4(i-1)z + 2(4-i) = 0$
- $z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$

Exercice n°5 :

On considère dans IC, l'équation (E) : $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$

- Montrer que cette équation admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera .
- En déduire les autres solutions de (E).

Exercice n°6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- On considère dans IC, l'équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 - 4(7+i)z - 4 = 0$.
 - Montrer que cette équation admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
 - En déduire les autres solutions de (E).
- Représenter les points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2i$ et $1-i$.
 - Déterminer la nature du triangle OBC .

KADEMIA

Chapitre : Nombres complexes

CORRECTION : SÉRIE D'EXERCICES

Exercice n°1: QCM:

1/ c) * $3+i$

2/ a) * $\frac{1+\sqrt{3}}{|1+\sqrt{3}|^2}$

3/ b) * $\frac{2\pi}{3} + \theta$

4/ a) * $|z| = 1$

Exercice n°2:

1/ $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2(1-i)}$

Cous: $\text{Arg}(z^2) \equiv 2 \text{Arg}(z) [2\pi]$
 $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv [\text{Arg} z - \text{Arg} z'] [2\pi]$

$$\begin{aligned}\text{Arg}(z) &\equiv \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{11\pi}{12} [2\pi]\end{aligned}$$

$$|z| = \frac{|1+i\sqrt{3}|^2}{2|1-i|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r$$

d'où $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$

2/ Écrivons z sous la forme algébrique :

$$z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{(2\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}-1)}{2}$$

d'où $\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} i$

par identification:
$$\begin{cases} \cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Exercice n° 3:

$$1) z_1 = 1 + i\sqrt{3} ; z_2 = \sqrt{3} - i$$

$$|z_1| = 2 ; \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$$

Alors $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$z_2 = 2 \left(\cos -\frac{\pi}{6} + i \sin -\frac{\pi}{6} \right)$$

$$2) z_1^{21} = 2^{21} \underbrace{\left(\cos 7\pi + i \sin 7\pi \right)}_{(-1)} = 2^{21} \times (-1) = -2^{21}$$

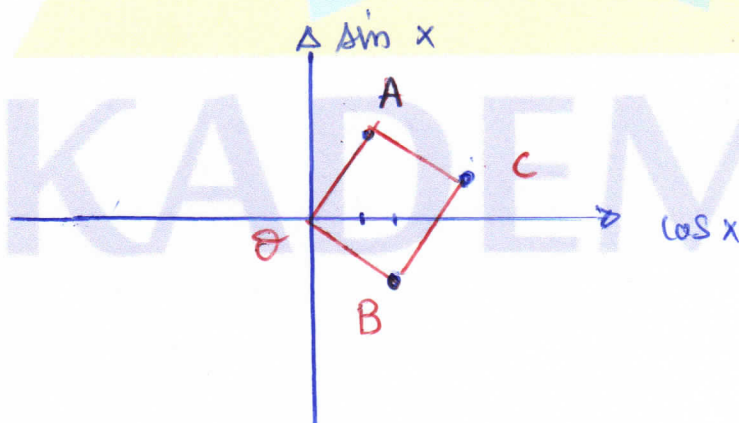
$$z_1^{21} = (1 + i\sqrt{3})^{21}$$

$$3) a) A \mapsto z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$B \mapsto z_2 = \sqrt{3} - i$$

$$C \mapsto Z = z_1 + z_2 = (1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)$$

b)



$$\overline{z_{AB}} = z_B - z_A ; \quad \overline{z_{OC}} = z_C - z_O$$

$$\frac{z_C - z_O}{z_B - z_A} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - i) - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1) + i(-\sqrt{3} - 1)}$$

(2)

$$\text{Alors } \frac{z_c - z_0}{z_B - z_A} = \frac{i[(\sqrt{3}-1) - i(1+\sqrt{3})]}{(\sqrt{3}-1) - i(\sqrt{3}+1)}$$

$$= i \text{ imaginaire pure.}$$

Donc $\vec{OC} \perp \vec{AB}$ et on a $OA = OB$

$\Rightarrow OACB$ est un carre

c) $Z = (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$

$$|Z| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$$

$$|Z| = \sqrt{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|Z| = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} ; \sin \theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = -\cos \frac{11\pi}{12} ; \sin \theta = \sin \frac{11\pi}{12}$$

Alors $\theta = \frac{11\pi}{12} [2\pi]$

Exercice n° 4 :

$$\bullet \quad z^2 + 18z + 1681 = 0$$

$$\Delta = 18^2 - 4 \cdot (1681) = 324 - 6724 = -6400$$

$$= (80i)^2$$

d'où $\sqrt{\Delta} = 80i$

$$z_1 = \frac{-18 - 80i}{2} ; z_2 = \frac{-18 + 80i}{2}$$

$$z_1 = -9 - 40i ; z_2 = -9 + 40i$$

$$S_4 = \{-9 - 40i, -9 + 40i\}$$

$$\bullet z^2 - (5-i)z + 8-i = 0$$

$$\Delta = (5-i)^2 - 4(8-i)$$

$$= (24 - 10i) - 32 + 4i$$

$$= -8 - 6i = -(8+6i) = (3i-1)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 3i-1$$

$$\text{d'où } z_1 = \frac{+5-i-3i+1}{2} = 3-2i$$

$$z_2 = \frac{5-i+3i-1}{2} = 2+i$$

$$S_4 = \{ 3-2i, 2+i \}$$

$$\bullet z^2 + 4(i-1)z + 2(4-i) = 0$$

$$\Delta' = 4(i-1)^2 - 2(4-i)$$

$$= 4(-2i) - 8 + 2i$$

$$\Delta' = -8 - 6i = (3i-1)^2$$

$$\text{Alors } z_1 = \frac{-2(i-1) - (3i-1)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-2(i-1) + (3i-1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$S_4 = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

$$\bullet z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$$

$$\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i)$$

$$= -8 - 6i + 8 + 8i = 2i = (1+i)^2$$

$$\text{d'où } z_1 = \frac{3i-1-2i}{2} \quad ; \quad z_2 = \frac{3i-1+2i}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$S_4 = \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

Exercice n° 5:

$$(E): z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$$

admet une solution réelle z_0 .

$$\Leftrightarrow z_0^3 - (3+4i)z_0^2 - 4(1-3i)z_0 + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_0^3 - 3z_0^2 - 4iz_0^2 - 4z_0 + 12iz_0 + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_0^3 - 3z_0^2 - 4z_0 + 12) + i(-4z_0^2 + 12z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4z_0^2 + 12z_0 = 0 \\ z_0^3 - 3z_0^2 - 4z_0 + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4z_0(z_0 - 3) = 0 \\ z_0^3 - 3z_0^2 - 4z_0 + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\text{alors } z_0 = 0 \quad \text{ou} \quad z_0 = 3$$

$$0^3 - 3 \times 0^2 - 4 \times 0 + 12 \neq 0 \quad \bigg| \quad 3^3 - 3 \times 3^2 - 4(3) + 12 = 0$$

Vraie

$$\text{pour } z_0 = 3$$

donc $z_0 = 3$ est la solution adéquate, c'est la bonne solution.

Alors (E) s'écrit :

$$(E): (z-3)(az^2+bz+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$$

$$= az_0^3 + (b-3a)z^2 + (c-3b)z - 3c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \underline{1} \\ b-3a = -3-4i \Leftrightarrow b = -4i - 3 + 3 = -4i \\ -3c = 12 \Leftrightarrow \underline{c = -4} \end{cases} \quad b = \underline{-4i}$$

$$\text{d'où } (E): (z-3)(z^2 - 4iz - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow z-3 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 4iz - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 3 \quad \text{ou} \quad \Delta' = (2i)^2 + 4 = 0$$

$$\text{Alors } z_1 = z_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2i}{1} = 2i$$

$$S_f = \{3, 2i\}$$

Exercice n°6 :

$$(E): z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$$

a) (E) admet une racine réelle z_0 sig :

$$z_0^3 - (4+i)z_0^2 + (7+i)z_0 - 4 = 0$$

$$i(z_0 - z_0^2) + z_0^3 - 4z_0^2 + 7z_0 - 4 = 0$$

$$\begin{cases} (z_0 - z_0^2) = 0 & \Leftrightarrow z_0 = 0 \text{ ou } z_0 = 1 \\ z_0^3 - 4z_0^2 + 7z_0 - 4 = 0 & \Rightarrow z_0 = 1 \end{cases}$$

est la bonne solution.

d'où $z_0 = 1$ est la bonne solution (racine réelle)

$$\text{équ } z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)[az^2 + bz + c]$$

$$az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -(4+i) \\ c - b = 7+i \Rightarrow b = 4 - 7 - i = -3 - i \\ -c = -4 \Rightarrow c = 4 \end{cases}$$

$$(E): (z-1)[z^2 - (3+i)z + 4] = 0$$

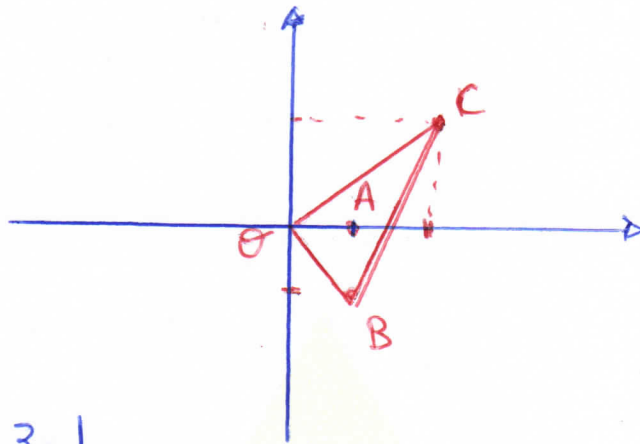
$$z_0 = 1 \quad \begin{cases} \Delta = [-(3+i)]^2 - 16 = -8 + 6i \\ \quad = (1+3i)^2 \\ \sqrt{\Delta} = 1+3i \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{3+i - (1+3i)}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

$$z_2 = \frac{3+i + 1+3i}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$$

$$S_4 = \{1; 1-i; 2+2i\}$$

2]



$$OC = |z_C - z_O|$$

$$OC = |z_C| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |2+2i - 1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$OB = |z_B - z_O| = |z_B| = |1-i| = \sqrt{2}$$

On remarque que $OB \neq OC = 2\sqrt{2}$

$$\text{On a } OC^2 + OB^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 8 + 2 = 10$$

$$BC^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\text{Alors } OC^2 + OB^2 = BC^2$$

D'après Pythagore, alors OBC est un triangle rectangle en O