Fomesoutra.com
ça soutra!

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION RÉGIONALE ABIDJAN 1
GROUPE SCOLAIRE LES FIGUIERS
COLLÈGE LE FIGUIER ABIDJAN
DIRECTION DES ÉTUDES DU SECOND CYCLE

Le Groupe Scolaire Les Figuiers
Le Collège Le Figuier

Humilité – Discipline – Travail

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

DEVOIR DE NIVEAU
NIVEAU : Tle A_1

CORRIGÉ ET BARÈME

Coefficient : 3
Durée : 2 heures
CE : MATHÉMATIQUE

Mathématiques – Devoir de niveau Tle A_1 – Barème sur 20 points

EXERCICE 1 (3 points)

N°	Réponse	Justification	Barème
1	**A**	$\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3)=+\infty$ (limite d'un polynôme en l'infini = limite de son terme de plus haut degré)	0,75
2	**C**	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-4x^2}{2x^2+9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^2}{2x^2}=-2$ (limite d'une fonction rationnelle en l'infini = limite du quotient des termes de plus haut degré)	0,75
3	**C**	La limite d'une fonction constante est cette constante : $\lim\limits_{x\to+\infty}2021=2021$.	0,75
4	**B**	Si f est impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère : O est un centre de symétrie de (C).	0,75
5	**A**	$f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)\times1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2-x-3-x^2+3x}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$	*Exemple* (0 pt)

Réponses attendues : 1-A 2-C 3-C 4-B (5-A : exemple, non compté) **[3 pt]**

EXERCICE 2 (3 points)

N°	Réponse	Justification	Barème
1	**Faux**	Le terme de plus haut degré est $4x^3$: c'est un polynôme de degré 3 (et non de degré 2).	*Exemple* (0 pt)
2	**Faux**	Pour ax^2+bx+c, $\Delta=b^2-4ac$. Ici $a=r$, $b=-c$, $c=p$ donc $\Delta=(-c)^2-4rp=c^2-4rp\neq r^2-4cp$.	0,75
3	**Vrai**	La ligne $f'(x)$ du tableau de variation (signe de la dérivée) permet de déduire les variations de la fonction.	0,75
4	**Faux**	Si a est racine de $R(x)$, alors $R(a)=0$ (et non $\sqrt{x}$).	0,75
5	**Faux**	Le sens de variation d'une fonction est « croissante » ou « décroissante » ; c'est le *signe de la dérivée* qui est positif ou négatif.	0,75

Réponses attendues : 2-Faux 3-Vrai 4-Faux 5-Faux (1-Faux : exemple, non compté) **[3 pt]**

EXERCICE 3 (3 points)

$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2.$

1. a) Limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$ [1 pt]

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$ (0,5) $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$ (0,5)

1. b) Calcul de $h(2)$ [0,5 pt]

$h(2) = -\frac{1}{2}\times 4 + 2\times 2 - 2 = -2 + 4 - 2 = 0.$

2. Dérivée et sens de variation [0,75 pt]

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -x+2$ (0,25). $h'(x) = 0 \iff x = 2$; $h'(x) > 0 \iff x < 2$. (0,25) Donc h est *croissante* sur $]-\infty;2]$ et *décroissante* sur $[2;+\infty[$. (0,25)

3. Tableau de variation et extrémum relatif [0,75 pt]

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Tableau : (0,5) h admet un **maximum relatif égal à** 0**, atteint en** $x = 2$. (0,25)

EXERCICE 4 (7 points)

$f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1}.$

1. Ensemble de définition [0,5 pt]

$f(x)$ existe si et seulement si $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -1$. (0,25) Donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. (0,25)

2. a) Limites à gauche et à droite en -1 [0,5 pt]

$\lim\limits_{x\to-1}(x^2+3x+3) = 1-3+3 = 1 > 0$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. (0,25)

De même $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1) = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$. (0,25)

2. b) Interprétation graphique [0,5 pt]

La droite d'équation $x = -1$ est une **asymptote verticale** à (C_f).

3. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ [0,5 pt]

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ (0,25) $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ (0,25)

4. Écriture $f(x) = x+2+\dfrac{1}{x+1}$ [0,5 pt]

Pour tout $x \in D_f$: $x+2+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+2)(x+1)+1}{x+1} = \dfrac{x^2+3x+2+1}{x+1} = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1} = f(x).$

5. a) Asymptote oblique [0,5 pt]

$f(x) - (x+2) = \dfrac{1}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$. (0,25) Donc la droite $(D) : y = x+2$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,25)

5. b) Position relative de (C_f) et (D) [0,5 pt]

On étudie le signe de $f(x)-(x+2)=\dfrac{1}{x+1}$: il est du signe de $x+1$. (0,25) Sur $]-1;+\infty[$: $f(x)-(x+2)>0$, (C_f) est **au-dessus** de (D) ; sur $]-\infty;-1[$: (C_f) est **au-dessous** de (D). (0,25)

6. a) Dérivée [0,5 pt]

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+3)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+5x+3-x^2-3x-3}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

6. b) Signe de $f'(x)$ et variations [0,5 pt]

$(x+1)^2>0$ sur D_f : $f'(x)$ a le signe de $x(x+2)$, dont les racines sont -2 et 0. (0,25)
$f'(x)>0$ sur $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ et $f'(x)<0$ sur $]-2;-1[\cup]-1;0[$. Donc f est croissante sur $]-\infty;-2]$ et sur $[0;+\infty[$, décroissante sur $[-2;-1[$ et sur $]-1;0]$. (0,25)

6. c) Tableau de variation [0,75 pt]

$f(-2)=\dfrac{4-6+3}{-1}=-1$ et $f(0)=\dfrac{3}{1}=3$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

7. $A(-1;1)$ est centre de symétrie de (C_f) [0,75 pt]

D_f est symétrique par rapport à -1 : si $x\in D_f$ alors $-2-x\neq -1$, donc $-2-x\in D_f$. (0,25)

$$f(-2-x)=(-2-x)+2+\frac{1}{(-2-x)+1}=-x-\frac{1}{x+1}$$

$$f(x)+f(-2-x)=\left(x+2+\frac{1}{x+1}\right)+\left(-x-\frac{1}{x+1}\right)=2=2\times 1.$$

Donc $A(-1;1)$ est centre de symétrie de (C_f). (0,5)

8. a) Tableau de valeurs [0,5 pt]

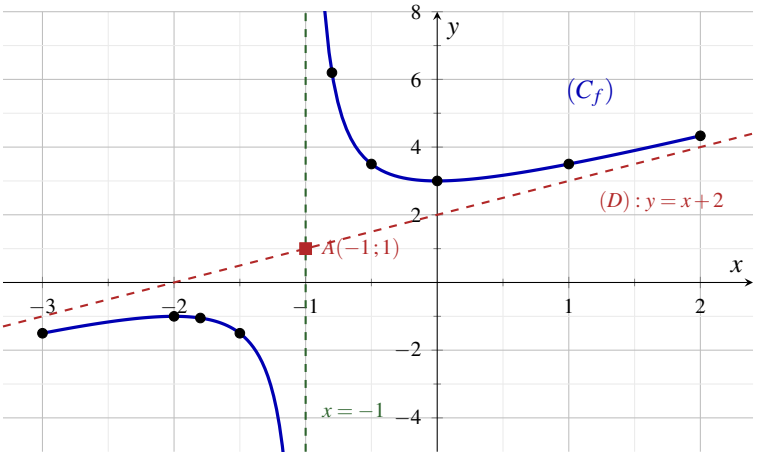
Avec $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x+1}$: (0,5)

x	-3	-2	$-1{,}8$	$-1{,}5$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$	$-1{,}5$	-1	$-1{,}05$	$-1{,}5$	*n.d.*	$6{,}2$	$3{,}5$	3	$3{,}5$	$\frac{13}{3}\approx 4{,}33$

n.d. : f n'est pas définie en -1.

8. b) Courbe (C_f) sur $[-3;2]$ [0,5 pt]

Tracé : asymptotes $x=-1$ et $y=x+2$, points du tableau (0,25) ; courbe soignée passant par les extremums $(-2;-1)$ et $(0;3)$, symétrique par rapport à A (0,25).



EXERCICE 5 (4 points)

$B(x) = -x^2 + 7200x - 7760000$, x étant le nombre d'articles vendus en six mois. On cherche la valeur de x qui rend $B(x)$ maximal.

Étape 1 : Dérivée de B

$B'(x) = -2x + 7200$.

Étape 2 : Variations de B et maximum

$B'(x) = 0 \iff x = 3600$; $B'(x) > 0 \iff x < 3600$.

x	$-\infty$		3600		$+\infty$
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	$-\infty$	↗	5200000	↘	$-\infty$

B est croissante sur $]-\infty;3600]$, décroissante sur $[3600;+\infty[$: le bénéfice est **maximal pour** $x = 3600$.

Étape 3 : Valeur du bénéfice maximal

$$B(3600) = -3600^2 + 7200 \times 3600 - 7760000 = -12960000 + 25920000 - 7760000 = 5200000.$$

(Vérification : $B(x) = -(x-3600)^2 + 5200000$.*)*

Étape 4 : Conclusion

Il faut fabriquer et vendre **3 600 articles** pour avoir un bénéfice maximal de **5 200 000 F CFA**.
Le coût de la salle de classe est de 5 179 000 F CFA et $5200000 > 5179000$: **le COGES pourra construire la salle de classe**, avec un excédent de 21 000 F CFA.

Remarque (facultative) : la capacité journalière de 30 à 100 articles est cohérente avec ce résultat si l'on compte 120 jours de travail sur six mois, car la production se situe alors entre $30 \times 120 = 3600$ *et* $100 \times 120 = 12000$ *articles ;* $x = 3600$ *est donc réalisable.*

Grille de correction de la situation complexe [4 pt]

Critère	Indicateurs	Points
CM1 : Pertinence (1 pt)	– Étudie le sens de variation de B (dérivée) pour déterminer le nombre d'articles donnant le bénéfice maximal ; – Calcule $B(3\,600)$ et le compare au coût de la salle de classe (5 179 000 F CFA).	$2 \times 0{,}5$
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques (1,5 pt)	– $B'(x) = -2x + 7\,200$; – $B'(x) = 0 \iff x = 3\,600$; B croissante sur $]-\infty ; 3\,600]$ puis décroissante : maximum en $x = 3\,600$; – $B(3\,600) = 5\,200\,000$.	$3 \times 0{,}5$
CM3 : Cohérence de la réponse (1 pt)	– Les résultats sont confrontés à la préoccupation du président du COGES ($5\,200\,000 \geq 5\,179\,000$) ; – La conclusion « il faut fabriquer et vendre 3 600 articles et la salle de classe pourra être construite » découle logiquement des calculs.	$2 \times 0{,}5$
CP : Perfectionnement (0,5 pt)	– Production soignée, unités respectées (F CFA, articles), démarche clairement rédigée ; ou toute initiative pertinente (forme canonique $B(x) = -(x - 3\,600)^2 + 5\,200\,000$, remarque sur la capacité journalière, etc.).	0,5

Le critère de perfectionnement n'est attribué que si l'élève a obtenu au moins 2 des 3 critères minimaux.

Récapitulatif du barème	**Ex. 1**	**Ex. 2**	**Ex. 3**	**Ex. 4**	**Ex. 5**	**Total**
Points	3	3	3	7	4	**20**