**DEVOIRS RÉGIONAUX** — **NIVEAU : TERMINALE D**
**DÉCEMBRE 2023** — **Durée : 4 *h***

# MATHEMATIQUES

***Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3 , 2/3 et 3/3.***
***Chaque candidat utilisera deux (02) feuilles de papier millimétré.***
***Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.***

## EXERCICE 1 (*2 points*)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de **Vrai** si la Proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse

| N° | PROPOSITIONS |
|---|---|
| 1 | f étant une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle [a ; b] tels que : $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution$\alpha$ dans $]a; b[$. |
| 2 | E et F étant deux événements d'une expérience aléatoire avec $P(E) \neq 0$, on a : $\frac{P(E \cap F)}{P(E)} = P_E(F)$. |
| 3 | $(C_k)$ étant la courbe représentative de la fonction $k$ continue sur $\mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k(x)}{x} = +\infty$. Alors $(C_k)$ admet une branche parabolique de direction $(OI)$ en $+\infty$. |
| 4 | A étant un évènement d'un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire et $\bar{A}$ son évènement contraire. On a : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. |

## EXERCICE 2 (*2 points*)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent trois affirmations dont une seule est vraie. Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

| N° | ÉNONCÉS | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | la fonction $u: x \mapsto 2^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est … | constante sur $\mathbb{R}$. | strictement croissante sur $\mathbb{R}$. | strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. |
| 2 | $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$ est égale à … | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ |
| 3 | La fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{x^3} - 2\sqrt{x}$ est une primitive sur ]0 ; +∞[ de la fonction f définie sur ]0 ; +∞[ par … | $f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $f(x) = -\frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| 4 | X étant une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$ . $P(X = 1)$ est égale à … | $\frac{135}{256}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{32}{81}$ |

**<u>EXERCICE 3</u>** **(*2 points)***

Soit la fonction $g$ de sur $]-\infty;0[$ par : $g(x)=\frac{-2x^2+4x-1}{x^2(2x-1)^2}$

1. Détermine deux nombres réels $a$ et $b$ tels que pour tout $x<0$, on a : $g(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(2x-1)^2}$

2. Déduis-en la primitive de g sur $]-\infty;0[$ qui s'annule en -1.

**<u>EXERCICE 4</u>** **(*3 points)***

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X égale aux gains d'un joueur à l'issue d'un jeu est donnée par le tableau ci-dessous :

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 0,25 | 0,3 | 0,15 | $a$ | $b$ |

1. Justifie que, pour un jeu soit équitable, $a=0{,}25$ et $b=0{,}05$.
2. Calcule les probabilités suivantes : $P(X\leq 1)$ ; $P(-2<X\leq 1)$ ; $P(X>2)$
3. a) Définis la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

   b) Représente la fonction de répartition F dans un repère orthogonal (O ; I ; J) d'unités graphiques : $OI=2\ cm$ et $OJ=10cm$

**<u>EXERCICE 5</u>** **(*6 points)***

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{-x^2+x+4}{x-2}$

On note (C) la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unités graphiques : 1 cm

1. Calcule les limites de $f$ à gauche et à droite en 2. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Calcule les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. a) Démontre que pour tout $x\in D_f$, $f'(x)=\frac{-x^2+4x-6}{(x-2)^2}$

   b) Déduis-en le sens de variations de $f$ et dresser son tableau de variations.
4. Démontre que la droite (D) d'équation $y=-x-1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Soit $h$ la fonction définie par : $h(x)=f(x)-(-x-1)$

   a) Démontre que : $\forall x\in]-\infty;2[$, $h(x)<0$ et $\forall x\in]2;+\infty[$, $h(x)>0$

   b) Déduis de la question précédente les positions relatives de (C) par rapport à (D).
6. Démontre que le point $A\binom{2}{-3}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C).
7. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
8. Construis (D), (T) et (C) dans le même repère (O, I, J).

**EXERCICE 6** ***(5 points)***

À la recherche de ressources financières pour la réalisation de ses activités, une association de femmes rurales dans la région du Gontougo envisage organiser un jeu. Le comité technique d'organisation du jeu arrête les modalités suivantes :

- le jeu consistera à tirer au hasard une boule d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et des boules vertes.
- si la boule tirée est rouge, le joueur gagne 3200 F ; si elle est blanche, il perd 2400 F ; si elle est verte, il effectue un second tirage avec remise de la première. Si la seconde boule tirée est rouge, il gagne 1600 F ; si elle est blanche, il perd 600 F et si elle est verte, il perd 500 F ;

Pour ce jeu, le comité technique souhaite mettre un nombre minimal de boules vertes pour espérer obtenir un jeu qui lui soit favorable.

La maman d'un de vos amis de classe, présidente de ce comité, consciente de la non qualification des membres du comité technique pour ces types de calculs, te sollicite.

En utilisant une solution argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, propose à ce comité ce nombre minimal de boules vertes.