BACCALAURÉAT BLANC
MARS 2024

SÉRIE C – Coefficient 5
Durée : 4h

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1 / 3, 2 / 3 et 3 / 3
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 *(2 points)*

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si elle est fausse.

1. Si g est une fonction numérique admettant une primitive G sur un intervalle I, alors une autre primitive de g sur I est de la forme : $x \mapsto G(x) + x$.

2. La composée de deux symétries glissées d'axes parallèles est une symétrie glissée.

3. Soit f une fonction.
S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]-\infty; a[$ tels que :
$\forall x \in \;]-\infty; a[\,,\ |\,f(x) - l\,| \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

4. Si $N = \overline{1032647}^{5}$, alors N est l'écriture en base cinq d'un nombre entier naturel.

EXERCICE 2 *(2 points)*

Pour chacun des énoncés ci-dessous, écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à l'affirmation juste.

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [x \cos^2(3x)]\ dx$ est égale à .....

A) $\frac{\pi^2}{4}$. B) 1. C) π. D) 0.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$ est ......

A) la droite (OI), privée du point A d'affixe 3. B) la droite (OJ), privée du point K d'affixe $3i$.
C) la demi-droite $[OJ)$ privée du point K d'affixe $3i$. D) la droite (OJ).

3. Si ABC est un triangle isocèle en A, $G = bar\{(A\,;1),(B\,;1),(C\,;1)\}$,
$G' = bar\{(A\,;-1),(B\,;2),(C\,;2)\}$ et (E) est l'ensemble des points M du plan tels que
$\left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$, alors .....

A) (E) est le cercle de centre G' et de rayon $G'A$. B) (E) est la médiatrice du segment $[GG']$.
C) (E) est le cercle de centre G et de rayon GA. D) (E) est la droite (GG').

4. La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n}$, admet pour limite....

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$

EXERCICE 3 (*3 points*)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(0; 4; 1), B(1; 3; 0), C(2; -1; -2)$ et $E(7; -1; 4)$.

1. Démontre que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit (Δ) la droite passant par le point E et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   a) Démontre que la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC).
   b) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).
   c) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   d) Détermine les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
3. Soit (P_1) le plan d'équation : $x + y + z = 0$ et (P_2) le plan d'équation : $x + 4y + 2 = 0$.
   On admet que (P_1) et (P_2) sont sécants et on note (D) leur droite d'intersection.
   Démontre que la droite (D) est parallèle au plan (ABC).

EXERCICE 4 (*4 points*)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Étudie la dérivabilité de f à droite en 0.
   b) Interprète graphiquement le résultat précédent.
2. a) Démontre que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^{-x}}{2f(x)}$.
   b) Détermine le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$, puis dresse son tableau de variation.
   c) Démontre que f admet une bijection réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.
   d) Explicite $g(x)$, pour tout x élément de J.
3. a) Justifie que f' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
   b) Démontre que pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) < 1$.
   c) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

EXERCICE 5 (*4 points*)

Soit n un entier naturel non nul.

1. Démontre que $5^n - 1$ est divisible par 4.
2. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $4x + 5^n y = 1$.
   a) Justifie que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b) On pose : $a_n = \frac{5^n - 1}{4}$.
   Vérifie que $(-a_n ; 1)$ est une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de l'équation (E).
   c) Détermine en fonction de a_n, les couples solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de l'équation (E).
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   Soit (E_n) l'ellipse d'équation : $5x^2 + y^2 = 5(a_n)^2$.

a) Détermine par leurs coordonnées en fonction de a_n, les sommets et les foyers de l'ellipse (E_n).

b) Soit k un entier relatif et M le point de coordonnées $(5^n k - a_n\,;1-4k)$.
Démontre que si M appartient à l'ellipse (E_n), alors $k=1$ ou $k=-1$.

c) On désigne par (D_n) la droite d'équation : $4x + 5^n y - 1 = 0$.
On note (Γ_n) l'ensemble des points de la droite (D_n) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
Démontre qu'il existe exactement deux points de l'ensemble (Γ_n) appartenant à l'ellipse (E_n).

EXERCICE 6 *(5 points)*

La société mathématique de Côte d'Ivoire (SMCI), organise chaque année le concours Félix Houphouët Boigny de Mathématiques et le concours Miss Mathématiques. Les lauréats de ces concours ont des récompenses importantes. En 2023, la lauréate du concours Miss Mathématiques a obtenu une bourse d'étude d'une valeur de 30 millions. Au vu de ces récompenses importantes qui permettent à certains élèves de réaliser leur rêve, beaucoup d'élèves préparent sérieusement ces concours.

Pendant la préparation de ces concours, un professeur de Mathématiques pose la question suivante à ses élèves : « Existe-t-il deux nombres réels strictement positifs a et b tels que : $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$? »

Après quelques minutes de recherche infructueuse, il leur donne la piste suivante :

« Une idée parfois payante dans la recherche de deux nombres a et b, consiste à regrouper séparément tout ce qui dépend de a et tout ce qui dépend de b. On cherche ainsi a et b tels que $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$. »

Un élève de cette classe qui est ton ami, sachant que tu es aussi intéressé par ce concours, partage les informations données par son professeur avec toi.
À l'aide d'une production argumentée réponds à la question du professeur.