MESRSFP | REPUBLIQUE DU TCHAD | MENPC

Office National des Examens et Concours du Supérieur

الهيئة الوطنية للامتحانات والمسابقات العالية

BACCALAURÉAT | الشهادة الثانوية

COEFF. : 2 | SESSION 2024 دورة | DUREE : 2 H

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SÉRIESA4 & AB

EXERCICE : 8pts

1) Résoudre dans ℝ, les équations suivantes :
   a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ 2pts
   b) $\ln x = 4$ 1pt
   c) $\ln(e^2x) = 0$ 1pt
2) Soit le polynôme P défini par : $P(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 3)$
   Vérifier que $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. 2pts
3) On considère l'équation $(E) : x \in \mathbb{R}, (\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 11\ln x - 6 = 0$.
   A l'aide des résultats des questions 1 et 2, résoudre l'équation (E). 2pts

PROBLEME : 12pts

Partie A

On donne dans ℝ, le polynôme $Q(x) = -x^2 + 2x$.

1) Calculer Q(0) et Q(2). 2pts
2) Justifier que :
   - pour tout nombre réel x élément de $]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[, Q(x) < 0$;
   - pour tout nombre réel x élément de $]0 ; 2[, Q(x) > 0$. 2pts

Partie B

On donne la fonction f définie de ℝ dans ℝpar $f(x) = \frac{-x^2+5x-5}{x-1}$.

$(\mathscr{C})$ désigne sa représentation graphique dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f. 1pt

2) a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. 0,5pt x 2
   b) Calculer $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x)$. 0,5pt x 2
   c) Justifier que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$. 0,5pt

3) a) Justifier que pour tout nombre réel x élément de ℝ -{1}, $f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1}$. 0,5pt
   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 4$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5
   c) Vérifier que $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty ; 1[$ et en dessous de (D) sur $]1 ; +\infty[$. 0,5pt

4) a) Démontrer que pour tout nombre x élément de ℝ -{1}, $f'(x) = \frac{Q(x)}{(x-1)^2}$. 1pt
   b) Déduire de la partie A, le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. 0,5pt
5) Dresser le tableau de variation de f sur D_f. 1pt
6) Démontrer que le point de coordonnées (1 ; 3) est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$. 0,5pt

Corrigé d'Epreuve de Mathématiques

Séries : A4 et AB

Exercice 1 : (8 points)

1°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a°) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta' = 4 - 3$

$= 1$.

$\Delta' > 0$

$x_1 = \frac{2-1}{1} \Rightarrow x_1 = 1$

$x_2 = \frac{2+1}{1} \Rightarrow x_2 = 3$

$\boxed{S = \{1 ; 3\}}$ 2pts

b°) $\ln x = 4$:

Cette équation est valide $\Leftrightarrow x > 0$.

On a : $\ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$

$\boxed{S = \{e^4\}}$ 1pt

c°) $\ln(e^2 x) = 0$.

$\Leftrightarrow$: $\ln(e^2 x) = \ln 1$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$.

$\boxed{S = \left\{\frac{1}{e^2}\right\}}$ 1pt

°) Soit $P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 3)$

Vérifions que $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

$P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 3)$

$= x^3 - 4x^2 + 3x - 2x^2 + 8x - 6$

$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

D'où $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 2pts

$(E): x \in \mathbb{R}, \ (\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 11(\ln x) - 6 = 0$

À l'aide des résultats des questions 1°) et 2°) résolvons (E).

$(E) \Leftrightarrow (\ln x - 2)(\ln^2 x - 4\ln x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x - 2 = 0$ ou $\ln^2 x - 4\ln x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 2$ ou $\ln x - 1 = 0$ ou $\ln x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = e^2$ ou $x = e$ ou $x = e^3$.

$\boxed{S = \{e ; e^2 ; e^3\}}$ 2pts

Problème : (12points)

PARTIE A : On donne $Q(x) = -x^2 + 2x$

1°) Calculons $Q(0)$ et $Q(2)$

$Q(0) = 0$ 1pt et $Q(2) = 0$ 1pt

2°) Justifions que :

- $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[, \ Q(x) < 0$;
- $\forall x \in]0 ; 2[, \ Q(x) > 0$.

$Q(x) = x(-x + 2)$

T.S

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$-x+2$	$+$		$+$	0	$-$
$Q(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

1pt

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[, \ Q(x) < 0$; 0,5pt

$\forall x \in]0 ; 2[; \ Q(x) > 0$. 0,5pt

PARTIE B : Soit $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$, (C_f) sa courbe.

1°) Déterminons D_f.

$f(x) \ \exists \Leftrightarrow x - 1 \neq 0$.

$D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. 1pt

a-) calculons

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x^2+5x-5}{x-1}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x^2}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$.

D'où $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ 0,5pt

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$. D'où $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

0,5pt

b-) calculons

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{-x^2+5x-5}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{-1+5-5}{0^-}\right) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{-1}{0^-}\right)$

$= +\infty$

D'où $\boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty}$ 0,5pt

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{-1}{0^+}\right) = -\infty$. D'où $\boxed{\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty}$ 0,5pt

c°) Justifions que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C_f).

D'après 2.b-), la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C_f). 0,5pt

3. a-) Justifions que pour tout nombre réel $x \neq 1$,

$f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1}$.

On a: $f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1}$

$= \frac{(-x+4)(x-1)-1}{x-1} = \frac{-x^2+x+4x-4-1}{x-1}$

$f(x) = \frac{-x^2+5x-5}{x-1}$. D'où le résultat.

0,5pt

...ontrons que la droite (D) d'équation $y=-x+4$ est une asymptote à (C_f) en $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-1}{x-1}\right] = 0.$

D'où la droite (D) d'équation $y=-x+4$ est une asymptote (oblique) à (C_f) en $\pm\infty$. 0,5pt

c-) Vérifions que (C_f) est au dessus de (D) sur $]-\infty;1[$

T.S de $f(x)-y$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$\Vert$	$-$

$\forall x \in]-\infty;1[$; $f(x)-y>0 \Rightarrow$ (C_f) est au dessus de (D). 0,25pt

$\forall x \in]1;+\infty[$; $f(x)-y<0 \Rightarrow (C_f)$ est en dessous de (D). 0,25pt

4 a-) Démontrons que $\forall x \neq 1$; $f'(x) = \frac{Q(x)}{(x-1)^2}$.

f est dérivable sur Df et sa fonction dérivée est:

$$f'(x) = \left(\frac{-x^2+5x-5}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{(-2x+5)(x-1)-(-x^2+5x-5)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+2x+5x-5+x^2-5x+5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}.$$

D'où $f'(x) = \frac{Q(x)}{(x-1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$. 1pt

b-) D'après la partie A-1; on a:

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$; $f'(x)<0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]2;+\infty[$. 0,25pt

$]0;2[$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ ... strictement croissante sur
$]0;2[$. 0,25pt

5-) Dressons le TV de f.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$f(0)=5$

$f(2)=1$

1pt

6-) Démontrons que le point de coordonnées $(1;3)$ est un centre de symetrie de la courbe (C_f).

On a: $f(2a-x)+f(x)=2b$

$$f(2-x)=\frac{-(2-x)^2+5(2-x)-5}{2-x-1}=\frac{-(4-4x+x^2)+10-5x-5}{-x+1}$$

$$=\frac{-4+4x-x^2+10-5x-5}{-x+1}=\frac{-x^2-x+1}{-x+1}$$

$$f(2-x)+f(x)=\frac{-x^2-x+1}{-x+1}+\frac{-x^2+5x-5}{x-1}$$

$$=\frac{x^2+x-1-x^2+5x-5}{x-1}$$

$$=\frac{6x-6}{x-1}=\frac{6(x-1)}{x-1}$$

$$f(2-x)+f(x)=6$$

Alors le point de coordonnées $(1;3)$ est centre de symétrie de la courbe (C_f). 0,5pt

Scanné avec CamScanner