

Session principale 2025

Exercice 1 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E) : z^2 - 2iz - 3 - 2i\sqrt{3} = 0$.

- a) Vérifier que $(2\sqrt{3} + 2i)^2 = 8 + 8i\sqrt{3}$.
- b) Résoudre l'équation (E) .

On considère les points I, A et B d'affixes $z_I = 1$, $z_A = -\sqrt{3}$ et $z_B = \sqrt{3} + 2i$.

: Dans **la figure 1** de l'annexe jointe, on a tracé le cercle (ζ) de centre I et de rayon 2.

2) a) Justifier que $z_B - z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

- b) Montrer que $[AB]$ est un diamètre de (Γ) .
- c) Placer les points A et B.

3) Soit H le point d'affixe $z_H = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.

- a) Montrer que les points A, B et H sont alignés.
- b) Justifier que $z_H = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- c) Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) . Placer le point H.

4) La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par B coupe (OH) en un point K d'affixe z_K .

- a) Justifier que $\text{Re}(z_K) = \sqrt{3}$.
- b) Déterminer alors z_K .

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1, 1, 3)$, $B(-3, 1, 1)$ et $C(3, -2, 1)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

2) a) Vérifier que le point $D(3, 5, -1)$ n'appartient pas au plan P.

b) Soit Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

Montrer qu'une équation cartésienne de Q est $x + 2y - 2z - 15 = 0$.

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 5 = 0$.

a) Montrer que (S) est la sphère de centre $I(2, 3, 1)$ et de rayon $R = 3$.

- b) Montrer que (S) est tangente au plan P en A et au plan Q en D .
- 4) Soit $t \in]1, +\infty[$. On considère le point $J(2 + t, 3 + 2t, 1 - 2t)$.
- a) Montrer que les points A, D et J sont alignés.
- b) Vérifier que $d(J, P) = 3t + 3$ et $d(J, Q) = 3t - 3$.
- 5) Soit (S_t) la sphère de centre J et tangente au plan P .
Montrer que (S_t) et Q se coupent suivant le cercle de rayon $r = 6\sqrt{t}$ et de centre D .

Exercice 3 (3 points)

Une étude médicale faite sur une population donnée a montré que :

- 20% des individus de la population sont diabétiques.
- Parmi les individus diabétiques, 30% souffrent d'insuffisance rénale.
- Parmi les individus non diabétiques, 5% souffrent d'insuffisance rénale.

On choisit au hasard une personne dans cette population et on considère les événements suivants :

- D : « La personne choisie est diabétique »
- R : « La personne choisie souffre d'insuffisance rénale »

- 1) a) Donner les probabilités $P(D)$, $P(R|D)$ et $P(R|\bar{D})$.
- b) Montrer que $P(R) = 0.1$.
- c) Sachant que la personne choisie souffre d'insuffisance rénale, quelle est la probabilité qu'elle soit diabétique ?
- 2) L'étude a montré aussi que le coût estimé, par personne, des soins annuels relatifs aux deux maladies objets de l'étude est :
- Zéro Dinars si la personne ne souffre d'aucune des deux maladies.
 - 2000 Dinars si la personne est uniquement diabétique.
 - 3000 Dinars si la personne souffre uniquement d'insuffisance rénale.
 - 6000 Dinars si la personne est diabétique et souffre d'insuffisance rénale.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le coût estimé, par personne, des soins annuels relatifs aux deux maladies objets de l'étude.

- a) Vérifier que $P(X = 0) = 0.76$.
- b) Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 4 (7.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\frac{e^x}{x^2}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout réel x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{((x-1)^2 + 1)e^x}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \frac{e^x}{x}$ et (C_F) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

b) Étudier la position relative de (C_f) et (C_F) .

c) Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

II) Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé (C_F) et placé un réel $\alpha > 1$ sur l'axe des abscisses.

1) a) En utilisant (C_F) , construire les points $A(2, f(2))$ et $B\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

b) Tracer la courbe (C_f) (on précisera le point d'abscisse 1).

2) Soit $t \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$ et $S(t)$ la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$. On note $A(t)$ l'aire de $S(t)$.

a) Hachurer $S(\alpha)$.

b) Vérifier que : $A(\alpha) = F(\alpha) - e$.

c) Soit $t \in]0, 1[$. Montrer que : $A(t) = F(t) - e$.

d) En utilisant (C_F) , construire sur l'axe des abscisses le réel $t_0 \in]0, 1[$ tel que : $A(t_0) = A(\alpha)$.

3) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} F(x) dx$, $n \geq 1$.

a) Déterminer graphiquement le sens de variation de F sur $]0, 1[$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $\frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n+1}}$.

c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$.

Figure 1

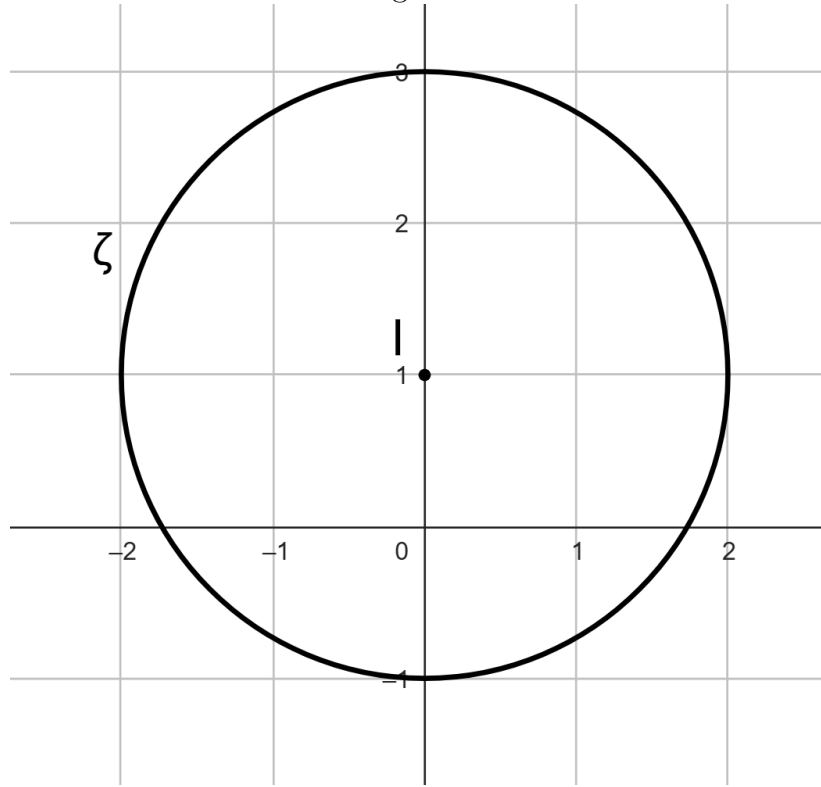


Figure 2

