

Partie A : Evaluation des ressources.. / 13,25 points

Exercice 1. Matrice d'une application linéaire et changement de base.. / 3 points

1. On obtient directement que la matrice A de f dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Soit $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\vec{X} \in \text{Ker}f \Leftrightarrow f(\vec{X}) = (x+2y)\vec{i} + (-x+2z)\vec{j} + (2x-y-5z)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{X} \in \text{Ker}f \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ -x+2z = 0 \\ 2x-y-5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2z \text{ et } y=-z \Leftrightarrow \vec{X} = z(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

Ainsi, Kerf est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$.

3. Soit $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{X}) &= (x+2y)\vec{i} + (-x+2z)\vec{j} + (2x-y-5z)\vec{k} \\ f(\vec{X}) &= \begin{pmatrix} x+2y \\ -x+2z \\ 2x-y-5z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus, remarquons que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $f(\vec{X}) = (x-2z) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (y+z) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc lorsque x, y et z parcourent \mathbb{R} alors $f(\vec{X})$

s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire que $f(\vec{X})$ est engendré par la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ par suite, $f(\vec{X})$ est un plan vectoriel dont une base est la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$.

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Ce qui établit que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est libre dans E qui est de dimension 3 donc par conséquent elle forme une base de E .

b) On a : $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}f$ d'après la question 2. De plus, on a :

$$\vec{e}_2 = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \text{ et } \vec{e}_3 = 4\vec{i} - 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$$

et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc la famille (\vec{e}_2, \vec{e}_3) forme une base de $\text{Im}(f)$.

c) On a : $f(\vec{e}_2) = \vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k} = -3\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3$ et $f(\vec{e}_3) = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 18\vec{k} = -8\vec{e}_2 - \vec{e}_3$

d) On obtient directement que la matrice A' de f dans la nouvelle base $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Etude d'une conique à centre../ 3,25 points

1. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ les affixes respectifs des points M et M' dans le plan complexe associé au plan (O, I, J) . Pour $M \neq M'$ on a :

$$M' = r(M) \Leftrightarrow OM = OM' \text{ et } (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$M' = r(M) \Leftrightarrow \left| \frac{z'}{z} \right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$M' = r(M) \Leftrightarrow z' = e^{-\frac{\pi}{4}i} z \Leftrightarrow x' + iy' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(x + iy)$$

$$M' = r(M) \Leftrightarrow x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \text{ et } y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$$

2. Soit $M(x, y)$ un point de plan.

$$M = r^{-1}(M') \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \text{ et } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

donc $M \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x' - y')^2 + \frac{1}{2}(x' + y')^2 + (x' + y')(x' - y') - 2y' = 0$ par suite on obtient après calculs l'identité $2(x')^2 - 2y' = 0$ c'est-à-dire $y' = (x')^2$.

D'après ce qui précède, on a montré que $M \in \Gamma \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}$ où \mathcal{C} est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $y = x^2$ par suite \mathcal{C} est l'image de Γ par la rotation r^{-1} de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

3. \mathcal{C} est l'équation d'une parabole de sommet $O(0, 0)$ dans (O, I, J) , de foyer $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ et de directrice la droite \mathcal{D} d'équation : $y = -\frac{1}{4}$. On en déduit que Γ est la parabole de sommet O , de foyer $F'\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$ et de directrice la droite (\mathcal{D}') d'équation : $y = x - \frac{\sqrt{2}}{4}$.

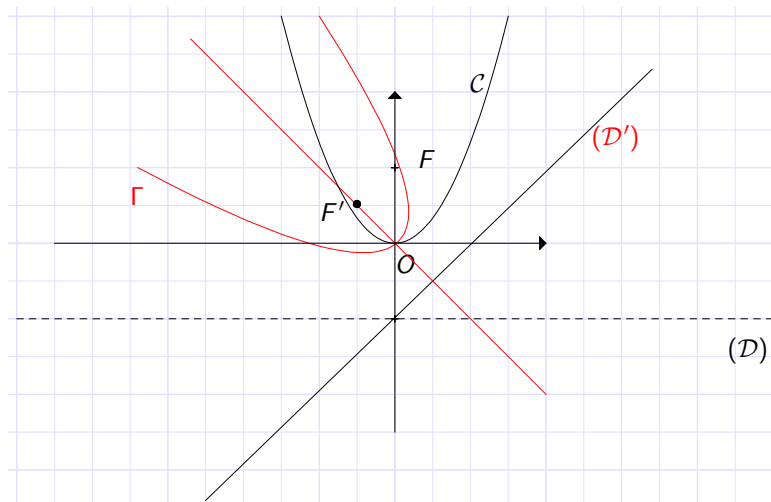


Figure.