



Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (4 points)

1. Soit l'entier $A = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ avec $n \geq 1$.



(a) Montre que $20 \times A$ est divisible par 17. 0,75pt

(b) Dédus-en que A est divisible par 17. 0,25pt

2. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2 - y^2 - x + 3y = 30$. 1,5pt

3. Dans un système de numération de base a , on note $A = \overline{211}^a$; $B = \overline{312}^a$ et $C = \overline{133032}^a$.

(a) Explique pourquoi $a > 3$. 0,25pt

(b) Sachant que $C = A \times B$, montre que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. 0,75pt

(c) Dédus-en que a divise 8 et détermine alors a . 0,5pt

EXERCICE 2 : (3 points)

1. Calcule chacune des limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$; (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$; (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$ 2pts

2. Soient f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ vérifiant pour tout $x > 0$, $\left| 2f(x) - \sqrt{3} \right| \leq \frac{1}{x}$
et pour tout $x \geq 1$, $\frac{x-1}{x+1} \leq g(x) \leq \frac{1}{x} + 1$.

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ en citant le théorème utilisé. 1pt

EXERCICE 3 : (5 points)

1. Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 3^n par 5. 0,75pt

2. Quel est le reste de la division de 8^{2023} par 5? 0,5pt

3. n est un entier naturel non nul. On pose $a = n(n^2 + 5)$.

Détermine les entiers n pour lesquels a est divisible par 7. 1pt

4. Quel est le chiffre des unités du nombre 17^{97} ? 0,75pt

5. n est un entier naturel. Pour quelles valeurs de n le nombre $A = \frac{3n^2 + 15n + 18}{n+1}$ est-il un entier ? 0,75pt

6. Quels sont le quotient et le reste de la division de -1208 par 51? 0,5pt

7. Montre que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c , l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(bc - a; b).$$

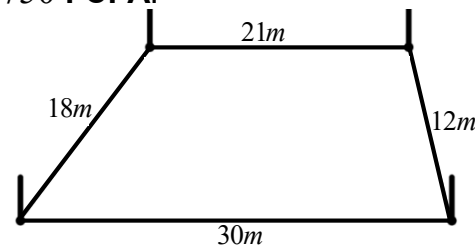
0,75pt

EXERCICE 4 : (3 points)

1. Justifie que 397 est un nombre premier. 0,75pt
2. α et β sont deux entiers naturels et $n = 2^\alpha \times 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n .
 - (a) Prouve que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$. 0,75pt
 - (b) Déduis-en n . 0,5pt
3. Soit un entier $N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dans le système décimal.
 - (a) Etablis et énonce le critère de divisibilité de N par 11. 0,75pt
 - (b) Utilise ce critère pour justifier que 19346701 est divisible par 11. 0,25pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)**SITUATION :**

Le terrain de M. NANA a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 30m et 21m ; les deux autres côtés mesurent 18m et 12m. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet. Le prix d'un poteau est de 750 FCFA.



AWA et FANTA sont les deux femmes de M. NANA.

Elles sont commerçantes et se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5 FCFA l'unité. AWA et FANTA disposent respectivement d'un montant de m_1 et m_2 FCFA.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base 8 et m_2 s'écrit $x1y003$ dans le système de numération de base 7. Chacune des deux commerçantes souhaite, avec la totalité de son argent, acheter un maximum de mangues.

**Tâches :**

1. Calcule la somme à prévoir par M. NANA pour l'achat des poteaux. 1,5pt
2. Calcule le nombre de mangues qu'AWA peut acheter. 1,5pt
3. Calcule le nombre de mangues que FANTA peut acheter. 1,5pt

Présentation générale : 0,5pt