

PARTIE A: EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

Exercice 1: 3.75 points

- I- Pour tout entier $n > 0$. On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{u_n} \end{cases}$.
1. a) Démontrer que pour $n \geq 2$, on a : $n < u_n < n + 1$, puis étudier la convergence de (u_n) **0.75pt**
b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante **0.25pt**
 2. Soit la suite (v_n) telle que $v_n = \frac{1}{u_n - n} - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
a) Démontrer par récurrence que $1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$ **0.75pt**
b) Etudier la convergence de la suite (v_n) et $(u_n - n)$ **0.5pt**
- II- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ u_0 = 2 \end{cases}$ et on pose $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis déduire que $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ **0.75pt**
 2. Calculer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ **0.5pt**
 3. Calculer la limite de la suite (u_n) quand $n \rightarrow +\infty$ **0.25pt**

Exercice 2: 2.25 points

- I- **Démonstration par récurrence**
1. Soit (Q) l'affirmation $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, pour n supérieur ou égale à 1
(a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $3^{2n} \times 7 + 2(3^{2n} - 2^n) = 3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$. **0.5pt**
(b) à l'aide d'un raisonnement par récurrence démontrer alors (Q) **0.5pt**
 2. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 6$, $P_n: 2^n \geq (n + 2)^2$. **0.5pt**
- II- En utilisant les congruences, montrer que pour tout entier naturel n , $16^{2n+1} - 3^{n+3}$ est divisible par 11 **0.75pt**

Exercice 3 : 5 points

- A- 1. pour $a = 2$, puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1[7]$. **0.25pt**
2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
a - Montrer que $a^6 \equiv 1[7]$ **0.25pt**
b- On appelle ordre de a modulo 7, et on désigne par k le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1[7]$.
Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1[7]$ **0.25pt**
3. A tout entier naturel n , on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
Montrer que $A_{2006} \equiv 6[7]$. **0.5pt**
- B- n étant un entier naturel, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.
1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , A_{n+3} est congru à A_n modulo 7 **0.75pt**
(b) En déduire les entiers n tels que A_n soit divisible par 7. **0.75pt**
 2. Les nombres qui dans le système de numération à base de 2 s'écrivent :
a. 1110 ; b. 1010100 ; c. 1001001000, Sont-ils divisibles par 7 ? **0.75pt**

Exercice 4: 6 points

On voudrait savoir pour quelles valeurs de l'entier n , la fraction $\frac{7n+6}{3n+5}$ est irréductible

1. Montrer que 17 divise le PGCD($7n + 6$; $3n + 5$) **0.5pt**

2. Pour quelles valeurs de n , les nombres $7n + 6$ et $3n + 5$ sont-elles divisibles par 17 **0.5pt**
- I- On pose $A_n = n^5 - n$ où n est un entier naturel non nul.
- Montrer que A_n est paire **0.25pt**
 - Montrer que A_n est divisible par 3 **0.25pt**
 - En utilisant les congruences modulo 5, démontrer que A_n est divisible par 5 **0.5pt**
- II- Résolution d'une équation diophantienne
- Déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$. **0.75pt**
 - Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) des nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $n = 5q + 4$.
 - Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) **0.25pt**
 - Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieur à 2000 **0.25pt**
- III- Un nombre N s'écrit $\overline{x43y}$ déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 5 et 9 **0.75pt**
- IV- θ désigne un réel appartenant à $[0; 2\pi]$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnu z définie par (E): $z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0$
- Résoudre (E) et mettre ses solutions sous la forme trigonométrique. **1pt**
 - Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les solutions de l'équation précédente.
Déterminer θ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatéral. **0.5pt**
- V- Soit z le nombre complexe défini par : $z = e^{i2\theta} - 1$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
- Démontrer que $z = 2ie^{i\theta}\sin\theta$ **0.5pt**

PARTIE B: EVALUATION DES COMPETENCES (4.5points)

A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante : à chaque lettre que l'on veut coder, on associe la lettre m correspondant dans le tableau ; On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p ; au nombre p on associe la lettre correspondante. Noubissi veut envoyer le message « FILOU » chez son ami GAUSS.

Pour aller finir les travaux de son champ, Noubissi veut engager une main d'oeuvre constituée de hommes et de femmes et veut dépenser exactement 54500 FCFA. La main d'oeuvre journalière d'un homme est de 3500 FCFA et celle d'une femme est de 2500 FCFA. Il aimerait avoir le maximum d'homme pour cette dépense.

En sortant ce matin Noubissi a établi un code d'accès à son coffre-fort comme une suite ordonnée de 7 chiffres. Pour le garder correctement dans sa tête, il a considéré son code d'accès comme un nombre entier de 7 chiffres. Un jour, il a lâché par indiscretion quelques informations à sa femme à propos de ce code. Le nombre de la forme $\overline{xy34xyx}$ écrit dans le système décimale, et ce nombre est un multiple de 33, avec $1 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y \leq 3$. Lorsque Noubissi est sorti de la maison, sa femme a voulu soutirer un billet de 10.000 FCFA pour faire du choping, mais se trouve confronté à ce problème mathématique.

Tâches:

- Aider Noubissi à coder son message **1.5pt**
- Combien faudra-t-il d'hommes pour cette main d'oeuvre ? **1.5pt**
- Aider la femme de Noubissi à ouvrir ce coffre-fort. **1.5pt**

<< Quoi qu'il arrive dans la vie, faites toujours du bien... >>

 **Fomesoutra**.com
ça s'écrit !

Docs à portée de main