Proposition de corrigé

Epreuve de mathématiques baccalauréat option mathématiques

Session Juin 2022 Tunisie

PAR GILDAS MBA OBIANG

Exercice 1. ../ 3points

Le plan est rapporté à un repère direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^2 - 2e^{i\theta}z + (e^{i2\theta} - 4) = 0$$

1. Soit Δ le discriminant de l'équation (E) on a $\Delta = 16$ par suite, l'équation (E) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir :

$$\text{sol}_1 = \frac{2e^{i\theta} - 4}{2} = e^{i\theta} - 2 \quad \text{et} \quad \text{sol}_2 = \frac{2e^{i\theta} + 4}{2} = e^{i\theta} + 2$$

ainsi, on en déduit que $z_1 = e^{i\theta} - 2$ et $z_2 = e^{i\theta} + 2$.

2. a) Notons z_I l'affixe du point I on a :

$$z_I = e^{i\theta} = \frac{z_1 + z_2}{2} = e^{i\theta}$$

ainsi, le point I est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2$.

Le vecteur $\overrightarrow{IM_1}$ à pour affixe $z_{\overrightarrow{IM_1}} = z_{M_1} - z_I = e^{i\theta} - 2 - e^{i\theta} = -2$. Ainsi, on en déduit que :

$$\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

c) Construisons les points M_1 et M_2.

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ implique que le quadrilatère ABM_1I est un parallélogramme. Ainsi, on en déduit la construction suivante :

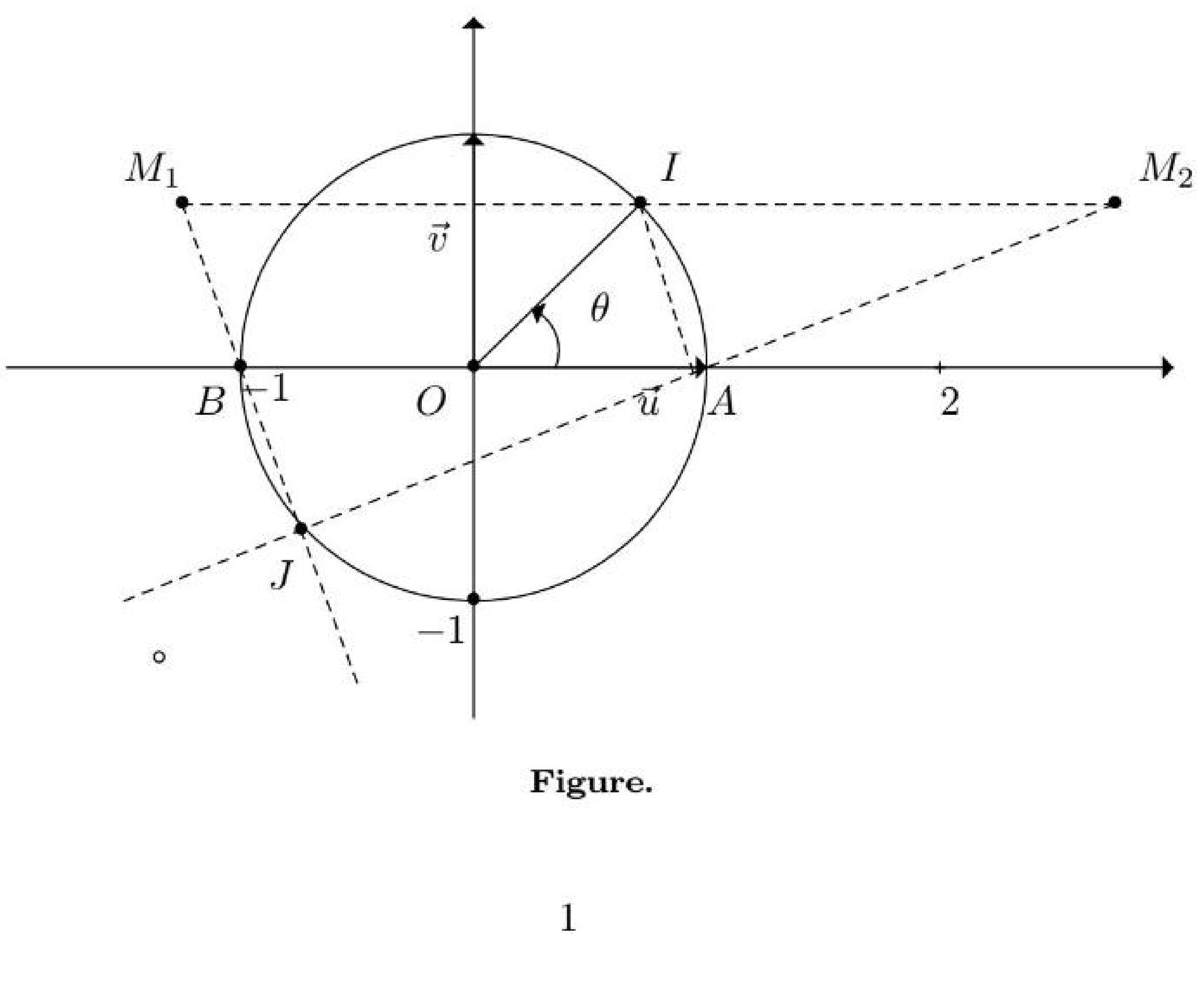


Figure.

3. a) Montrons que les droites (AM_2) et (BM_1) se coupent au point J d'affixe $(-e^{i\theta})$.
Les droites (AM_2) et (BM_1) sont deux droites du plan non parallèles par conséquent elles se coupent en un point J. Par le théorème de Thalès on en déduit que :

$$\frac{\mathrm{JB}}{\mathrm{JM}_1}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{IM}_1}=\frac{\mathrm{JA}}{\mathrm{JM}_2}$$

par suite $\frac{\mathrm{JB}}{\mathrm{JM}_1}=1$ c'est-à-dire $\mathrm{JB}=\mathrm{JM}_1$. Ainsi, le point B est le milieu du segment $[M_1J]$ de ce fait, on a :

$$z_J=-z_{M_1}+2z_B=-e^{i\theta}+2-2=-e^{i\theta}$$

ce qui permet de conclure que le point J a pour affixe $-e^{i\theta}$.
b) Déterminons la valeur du réel θ pour laquelle l'aire du triangle JM_1M_2 est maximale.
Notons $\mathcal{A}(\theta)$ la valeur de cette aire en unité d'aire en fonction de θ.
Soit h l'homothétie de centre J et de rapport 2. Il est claire que $h(\mathrm{ABJ})=M_2M_1J$. Or, ABJ est un triangle rectangle en J (car c'est un triangle inscrit dans le cercle dont un côté est un diamètre) ainsi, le triangle M_2M_1J est également rectangle en J. De ce fait, on a

$$\mathcal{A}(\theta)=\frac{\mathrm{JM}_2\times\mathrm{JM}_1}{2}=\frac{4|(e^{i\theta}-1)(e^{i\theta}+1)|}{2}=2|e^{2\theta i}-1|=2|2ie^{i\theta}\sin\theta|=4\sin\theta$$

Or, la fonction $\theta\mapsto\sin\theta$ admet un maximum sur $]0,\pi[$ en $\frac{\pi}{2}$ donc le triangle JM_1M_2 admet une aire maximale si et seulement $\theta=\frac{\pi}{2}$ et cette aire a pour valeur $\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ en unité d'aire.

Exercice 2. ../5points
Le plan est orienté.

1. Soit R la rotation de centre B et d'antre $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
   a) On a $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BO}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BA}})}+\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{BO}})}=-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
   b) On nore $D=R(C)$. On en particulier $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BD}})}=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi, on a l'égalité :

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BD}},\overrightarrow{\mathrm{BO}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BD}},\overrightarrow{\mathrm{BC}})}+\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BO}})}=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=0[2\pi]$$

   Ainsi, les points O, B et D sont alignés. De ce fait, on en déduit la construction suivante :

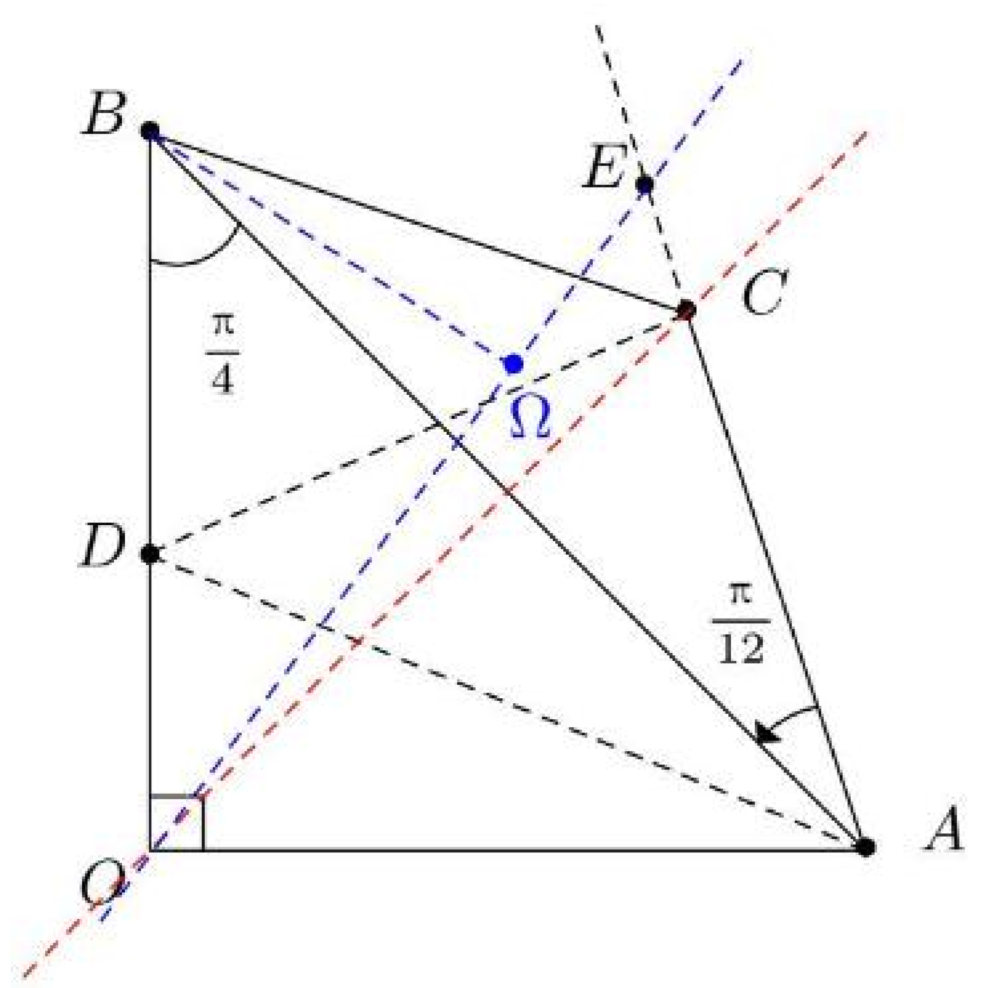


Figure.

   c) Montrons que le triangle ACD est rectangle et isocèle en C.
   Le triangle BCD est équilatéral car on a $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BD}})}=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\mathrm{BC}=\mathrm{BD}$. Or, d'après la consigne le triangle BCA est isocèle en C d'où on a d'une part

$$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\mathrm{DC}$$

d'autre part

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CD}},\overrightarrow{\mathrm{CA}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\overrightarrow{\mathrm{CA}})}-\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})}=\left(\pi-\frac{2\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Ainsi, le triangle ACD est rectangle et isocèle en C.

2. Soit f la similitude directe telle que $f(B)=A$ et $f(O)=C$.
a) f est une transfotmation du plan, donc l'image du triangle rectangle isocèle AOB par f est un triangle rectangle isocèle. Ainsi, on a nécessairement $f(A)=D$.
b) Soit γ l'angle de f. On a $\gamma=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BO}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})}$ or,

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BO}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BO}},\overrightarrow{\mathrm{BA}})}+\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BO}},\overrightarrow{\mathrm{BA}})}+\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})}+\pi[2\pi]$$

mais on sait que $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BO}},\overrightarrow{\mathrm{BA}})}=\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})}=-\frac{\pi}{12}[2\pi]$ d'où

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BO}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}+\pi[2\pi]=-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

de ce fait, $\gamma=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BO}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})}=-\frac{5\pi}{6}$.
c) L'image de la droite (BO) par f est la droite (AC) puisque $D\in$ (BO) on a donc $f(D)\in$ (AC).
d) On a

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{ED}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DE}})}+\pi[2\pi]=-\frac{5\pi}{6}+\pi[2\pi]=\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

e) Soit Ω le centre de f. Montrons que $\widehat{(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E})}=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On a

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E})}=\widehat{(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{A\Omega})}+\widehat{(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{D\Omega})}+\widehat{(\overrightarrow{D\Omega},\overrightarrow{\Omega E})}[2\pi]=3\times\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\pi[2\pi]=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

3. On suppose que $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$ et on se rapporte au repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
a) Le point C appartient à la médiatrice du segment [AC] donc on a

$$\arg(z_C)-\arg(z_A)=\arg\left(\frac{z_O-z_C}{z_O-z_A}\right)=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OC}})}=\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

puisque $\arg(z_A)=\arg(1)=0[2\pi]$ en déduire que $\arg(z_C)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
b) Soit $z'=az+b$ l'expression complexe de f où a et b sont deux nombres complexes.
On a :

$$z_C=b \quad \text{et} \quad 1=ai+b$$

b) On a $f(O)\neq O$ donc $z_\Omega\neq 0$ et vérifie la relation $z_\Omega=az_\Omega-ai+1$ d'où $z_\Omega=\dfrac{1-ai}{1-a}$ par suite on obtient

$$\frac{z_\Omega-i}{z_\Omega}=\frac{\frac{1-ai}{1-a}-i}{\frac{1-ai}{1-a}}=\frac{1-i}{1-ai}=\frac{1-i}{b}$$

Par définition on sait que $\widehat{(\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B})}=\arg\left(\dfrac{z_\Omega-i}{z_\Omega}\right)[2\pi]$ or, on a

$$\arg\left(\frac{z_\Omega-i}{z_\Omega}\right)=\arg\left(\frac{1-i}{b}\right)=\arg(1-i)-\arg(b)=\arg(1-i)-\arg(z_C)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

il s'ensuit donc

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B})}=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

4. On a

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega E})}=\widehat{(\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B})}+\widehat{(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E})}=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}[2\pi]=-\pi[2\pi]$$

Ainsi, les points O, E et Ω sont alignés.
Conséquence : Ω est le projété orthogonal de B sur la droite (OE).

Exercice 3. ../ 5,5points

Partie A

Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $19u+11v=1$.

1. a) On a $19\times(-4)+11\times 7=-76+77=1$ donc le couple $(-4,7)$ est une solution particulière de (E).

   b) Soit (x,y) une solution de l'éqiation homogène : $19u+11v=0$.

   On a $19x=-11y$ puisque $11\wedge 19=1$ le théorème le Gauss nous d'affirmer que x divise 11 par suite, il exitste $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=11k$. De ce fait, on a l'égalité $y=-19k$ par suite, les solutions de l'équation homogène associé à (E) sont les couples de la forme $(11k,-19k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Ainsi, on en déduit que les solutions de (E) sont les couples de la forme $(11k-4,-19k+7)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. a) On a vu que les entiers u qui vérifient l'équation (E) sont de la forme :

   $$u=11k-4=11(k-1)+7$$

   mais on sait que $19u+11v=1\Leftrightarrow 19u\equiv 1[11]$ de ce fait, les entiers u de la forme $u=11k+7$ avec k entiers vérifient la relation de congruence $19u\equiv 1[11]$. Seul l'entier $k=0$ verifie

   $$1\leqslant 11k+7\leqslant 10$$

   ainsi, $u=7$ est l'unique entier appartenant à $\{1,2,\dots,10\}$ tel que $19u\equiv 1[11]$.

   b) On montre de même que $v=7$ est l'unique entier appartenant à $\{1,2,\dots,18\}$ tel que $11v\equiv 1[19]$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{209}) : $x^2\equiv x[209]$

Partie B

1. On a

   $$0^2\equiv 0[209] \quad\text{et}\quad 1^2\equiv 1[209]$$

   donc 0 et 1 sont des solutions de l'équation (E_{209}).

2. On a $209=11\times 19$.

3. On a

   $$133^2=209\times 84+133 \quad\text{et}\quad 77^2=209\times 28+77$$

   ainsi, les entiers 133 et 77 sont solutions de (E_{209}).

4. Soit x une solution de (E_{209}).
   a) On a $x^2-x=x(x-1)\equiv 0[209]$ donc $x(x-1)$ est un multiple de 209 ainsi, tout diviseur de 209 divise $x(x-1)$ par suitte, les entiers 11 et 19 divisent $x(x-1)$.
   b) On a $x\in\mathbb{Z}$ et $x-(x-1)=1$ donc x et $x-1$ sont premiers entre eux par le théorème de Bezout.

5. Soit x une solution de (E_{209}) appartenant à $\{2,3,\dots,208\}$.

a) Puisque $x \in [\![2, 208]\!]$ on en déduit que 11 et 19 ne divisent pas x simultanément car sinon 209 ne divise par x. Ainsi, on en déduit que 19 divise x ou 11 divise x.
b) On suppose que $x = 19k$ où k est un entier.
On sait que 11 divise le produit $x(x-1)$ et $x \wedge 11 = 1$ donc par le théorème de Gauss 11 divise $x-1$. On en déduit qu'il existe un entier k' tel que $x = 11k' + 1$ et par suite on a

$$19k \equiv 1[11] \quad (\star)$$

avec $x = 19k \in \{2, 3, \ldots, 208\}$. Il s'ensuit d'une part que $0 < k \leqslant 10$ et d'autre part, d'après la **partie A** les entiers k qui vérifient $(\star)$ sont de la forme $k = 11q + 7$ avec $q \in \mathbb{N}$. Ainsi, on cherche les valeurs de q tels que $k = 11q + 7 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ce qui est équivalent à dire $q = 0$. Ainsi, on obtient $k = 7$ et donc $x = 19k = 133$.
c) On suppose que $x = 11k$ où k est un entier.
On sait que 19 divise le produit $x(x-1)$ et $x \wedge 19 = 1$ donc par le théorème de Gauss 19 divise $x-1$. On en déduit qu'il existe un entier k' tel que $x = 19k' + 1$ et par suite on a

$$11k \equiv 1[19] \quad (\star)$$

avec $x = 11k \in \{2, 3, \ldots, 208\}$. Il s'ensuit d'une part que $0 < k \leqslant 18$ et d'autre part, d'après la **partie A** l'unique entier k qui vérifie $(\star)$ est $k = 7$. Ainsi, on obtient $x = 11k = 77$.

6. D'après ce qui précède, les solutions de l'équation (E_{209}) qui appartiennent à $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 208\}$ sont les entiers : $0, 1, 77$ et 133.

Partie C

Soit y un entier et x son reste modulo 209.

1. Il existe que $q \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 209q + x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 208$.
On a $y^2 = (209q + x)^2 = 209^2q^2 + 2 \times 209qx + x^2$ par $y^2 - y = x^2 - x[209]$. Ainsi, on en déduit l'équivalence

$$y^2 \equiv y[209] \Leftrightarrow x^2 = x[209]$$

2. Soit w une solution quelque de (E_{209}) et r son reste modulo 209.
On a alors :

$$r^2 = r[209] \quad \text{avec} \quad r \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 208\}$$

Or, d'après **la partie B**, il s'ensuit que $r \in \{0, 1, 77, 133\}$ ainsi, on en déduit que les solutions de (E_{209}) dans $\mathbb{Z}$ sont les entiers de la forme : $209k$, $1 + 209k$, $77 + 209k$ et $133 + 209k$ où k est un entier.

Exercice 4. ../ 6,5points
Partie A
Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$$

Interprétation graphique :

- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
- La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de 1.

2. a) f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivable et pour tout $x > 1$

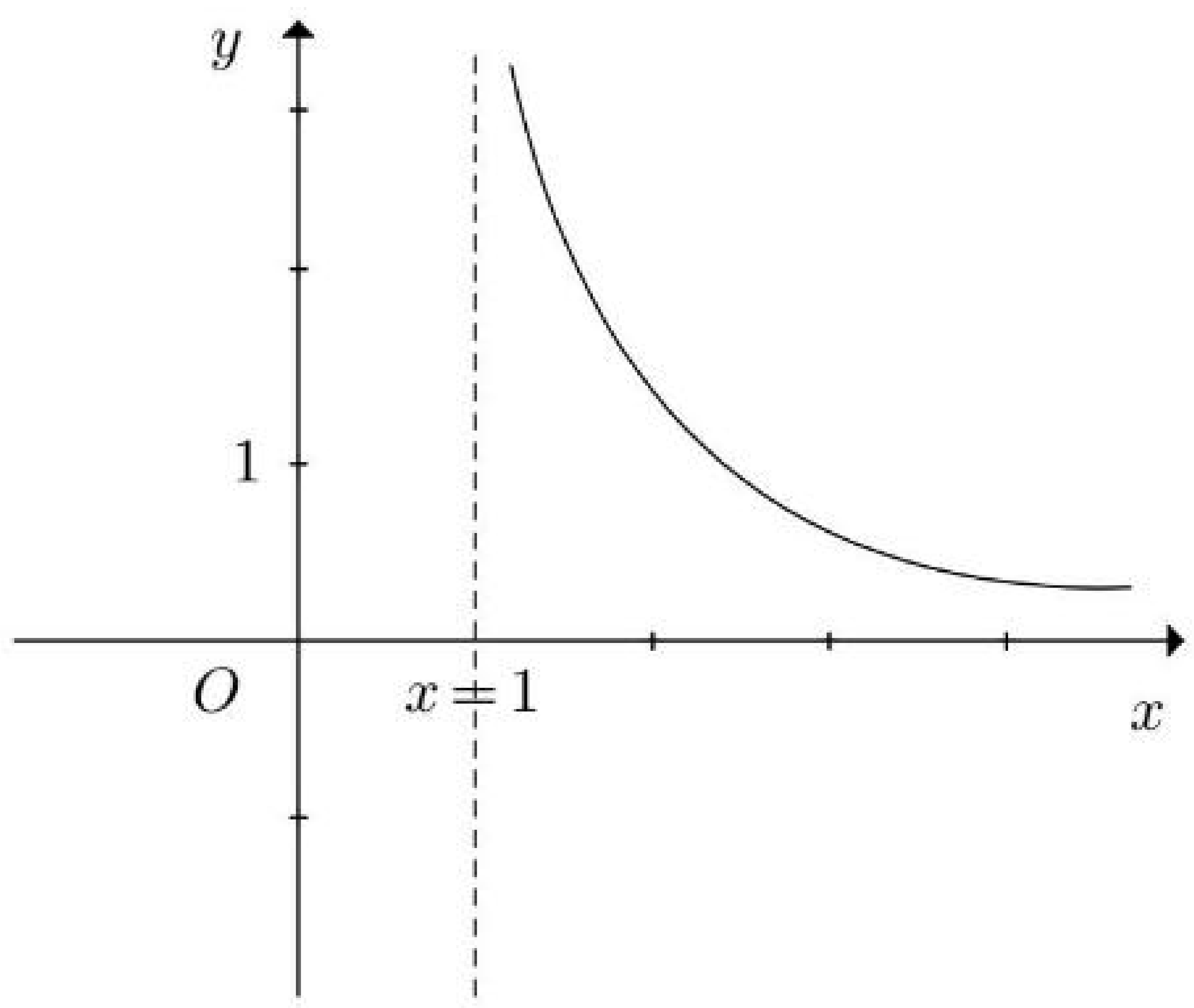
$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{-1}{x \ln^2 x}$$

b) Pour tout $x>1$, $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$	0

Tableau de variation de f.

c) Tracé de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.



La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.

3. Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par

$$g(x)=f(x)-x$$

g est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivable et pour tout $x>1$

$$g'(x)=\frac{-1}{x\ln^2 x}-1<0$$

donc g est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. De plus, on a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}-x\right)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-x\right)=+\infty$$

ainsi, g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Or, $0\in\mathbb{R}$ par conséquent, l'équation $g(x)=0$ admet une solution $\alpha\in]1,+\infty[$. De plus, $g(e)=1-e<0$ donc $\alpha\in]1,e[$.

Partie B

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x>1$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_\alpha^x (f(t))^n dt$ et $H(x)=\displaystyle\int_{\ln\alpha}^{\ln x}\frac{e^t}{t^n}dt$.

a) La fonction $t\mapsto\dfrac{e^t}{t^n}$ est continue sur $]1,+\infty[$ donc elle admet des primitive sur cet intervalle. Soit h une primitive de cette fonction. Pour tout $x>1$, On a $H(x)=h(\ln x)-h(\ln\alpha)$. Ainsi, H est dérivable sur $]1,+\infty[$ composée et somme de fonction dérivable et pour tout $x>1$,

$$H'(x) = \frac{1}{x}\times\frac{e^{\ln x}}{(\ln x)^n}=\frac{1}{\ln^n x}=(f(x))^n$$

Les fonction F et H sont des primitives sur $]1,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto (f(x))^n$ donc elles diffèrent d'une constante ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = H(x) + \lambda$. Mais, on a

$$0 = F(\alpha) - H(\alpha) = \lambda$$

d'où pour tout $x > 1$, $F(x) = H(x)$.

2. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_\alpha^e (f(t))^n dt$.

a) En effectuant le changement de variable $u = \ln t$ on a $e^u du = dt$ et par suite pour tout $n \geqslant 1$

$$u_n = \int_\alpha^e (f(t))^n dt = \int_\alpha^e \frac{dt}{(\ln t)^n} = \int_{\ln\alpha}^1 \frac{e^u du}{u^n} = \int_{\ln\alpha}^1 \frac{e^t}{t^n} dt$$

b) La fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur $[\ln\alpha, 1]$ donc pour tout $t \in [\ln\alpha, 1]$ on a

$$\alpha \leqslant e^t \leqslant e$$

De plus, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{\ln^n \alpha} = \alpha^n$ ainsi, on en déduit que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{\ln\alpha}^1 \frac{dt}{t^n} \leqslant \int_{\ln\alpha}^1 \frac{e^t}{t^n} dt \leqslant e \int_{\ln\alpha}^1 \frac{dt}{t^n} \;&\Leftrightarrow\; \alpha\left[\frac{1}{(1-n)t^{n-1}}\right]_{\ln\alpha}^1 \leqslant u_n \leqslant e\left[\frac{1}{(1-n)t^{n-1}}\right]_{\ln\alpha}^1 \\
&\Leftrightarrow\; \alpha\left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{(n-1)\ln^n\alpha}\right) \leqslant u_n \leqslant e\left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{(n-1)\ln^n\alpha}\right) \\
&\Leftrightarrow\; \frac{\alpha^n - \alpha}{n-1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n-1}(\alpha^{n-1} - 1)
\end{aligned}$$

c) On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{n\ln\alpha}}{n\ln\alpha} \times \ln\alpha\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{e^X}{X} \times \ln\alpha\right) = +\infty$$

par croissance comparée. De ce calcul, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n - \alpha}{n-1} = \alpha\left(\frac{\alpha^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right) = +\infty$$

ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) Pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$\frac{1 - \alpha^{1-n}}{n-1} \leqslant \frac{u_n}{\alpha^n} \leqslant \frac{e}{n-1}(\alpha^{-1} - \alpha^{1-n})$$

mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\alpha^{1-n}}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n-1}(\alpha^{-1} - \alpha^{1-n}) = 0$ donc il s'ensuit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\alpha^n} = 0$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (k-2)u_k$.

a) Posons $u' = e^t$ et $v = \frac{1}{t^n}$ on a $u = e^t$ et $v' = -\frac{n}{t^{n+1}}$ d'où, pour tout $n \geqslant 1$

$$u_n = \left[\frac{e^t}{t^n}\right]_{\ln\alpha}^1 + n\int_{\ln\alpha}^1 \frac{e^t}{t^{n+1}} dt = e - \alpha^{n+1} + n u_{n+1}$$

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n$»

Pour $n=1$, on a $\dfrac{\alpha^{1+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-1)e - u_1 = u_1 = S_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + (n-1)u_{n+1} &= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n + (n-1)u_{n+1} \\
S_{n+1} = S_n + (n-1)u_{n+1} &= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n + n u_{n+1} - u_{n+1} \\
S_{n+1} = S_n + (n-1)u_{n+1} &= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n \overbrace{- e + \alpha^{n+1} + u_n}^{= n u_{n+1}} - u_{n+1} \\
S_{n+1} = S_n + (n-1)u_{n+1} &= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + \alpha^{n+1} + (1-(n+1))e - u_{n+1} \\
S_{n+1} = S_n + (n-1)u_{n+1} &= \frac{\alpha^{n+2}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-(n+1))e - u_{n+1}
\end{aligned}$$

On a montré que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ ainsi, par le théorème de la récurrence on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

c) On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\alpha^n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\alpha-\alpha^{2-n}}{\alpha-1} + \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{n}{\alpha^n} \right) e - \frac{u_{n+1}}{\alpha^n} \right] = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

[1]

1. Gildas Mba Obiang email : antoinegildas@gmail.com (pour toutes remarques et suggestions)