

CONTRÔLE DE CONNAISSANCE N°1 (T^{le} C)

Pour cette évaluation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements prendront une part prépondérante dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan \mathcal{P} , on considère un triangle rectangle ABC rectangle en A tel que $BC = 2a$.

Soit l'application $f : M \mapsto \overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$, $m \in \mathbb{R}$.

1. Détermine m pour que $\overrightarrow{f(M)}$ soit un vecteur constant $\overrightarrow{v_0}$ et exprime $\overrightarrow{v_0}$ en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. On prend $m = -1$ et on note I le milieu de $[BC]$.

Démontre que le barycentre G du système $\{(A, 4); (B, -1); (C, -1)\}$ est le symétrique de I par rapport à A .

3. Détermine l'ensemble : $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / 4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2\}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a . Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

1. Prouve que $B \in (\Gamma)$.
2. On pose $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -4); (C, 1)\}$. Démontre que $GM = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.
3. Détermine la nature de (Γ) .
4. Trace (Γ)

EXERCICE 3 (10 points).

Dans cet exercice, les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. Justifie que $2 \times 35^{2002} - 3 \times 84^{2003} \equiv 5 \pmod{17}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère la division euclidienne de k par 6.
 - a. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 3^k par 7 ?
 - b. Traduis par une égalité, la division euclidienne de 128 par 3 et celle de 64 par 7.
 - c. Dédus des questions précédentes, le reste de la division euclidienne de 1998^{128} par 7.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Justifie que $7^{3n} \equiv 1 \pmod{19}$.
 - b. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 7^n par 19 ?
 - c. Démontre que si a, b et c sont trois entiers naturels consécutifs, alors $7^a + 7^b + 7^c$ est un multiple de 19.
4. Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 11 \text{ divise } 3^{n+3} - 4^{4n+2}$.