

DEVOIR DE MATHÉMATIQUE N° 3 TC3

Durée : 1H30

EXERCICE 1

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Justifier qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tels que $11u - 7v = 1$.
 - b. Trouver un tel couple.
 - c. En déduire une solution particulière de l'équation (E).
 - d. Résoudre l'équation (E).
2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Démontrer que si le couple $(x; y)$ est solution de (F), alors $x^2 = 2y^2 \pmod{5}$.
 - b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	1	1

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	4	3

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5?

- c. En déduire que si le couple $(x; y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x; y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F)?

EXERCICE 2

On note n un naturel non nul, $A = 3n + 1$ et $B = 5n - 1$.

- 1) Montrer que le PGCD de A et B est un diviseur de 8.
- 2) Pour quelles valeurs de n ce PGCD est-il égal à 8 ?
- 3) Déterminer suivant les valeurs de n le PGCD de A et B .

EXERCICE 3

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$

1. a) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$
 - b) En déduire que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n \leq 0$
 - c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
2. Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique raison $\frac{1}{5}$.
 - b) En déduire que pour tout $n: u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

DEVOIR de MATHEMATIQUES



EXERCICE-1

Étude d'une suite : on considère la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence en posant : $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = h(v_n) \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$.

1. a) Exprimer $h\left(\frac{1}{n}\right)$ en fonction de n .
 b) Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $h\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.
2. a) Déterminer $h'(x)$.
 b) Quel est le sens de variation de h sur $[0 ; 1]$?
3. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \leq v_p \leq \frac{1}{p}$; justifier alors que $0 \leq v_{p+1} \leq \frac{1}{p+1}$.
 b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n}$.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Justifier la réponse.

EXERCICE-2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4n$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n , divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B , divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
 - a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
 - b) Montrer que d divise n .
 - c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
 - a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
 - b) Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
 - c) Montrer que p divise n . En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

EXERCICE-3

L'exercice propose cinq affirmations numérotées de 1 à 5.

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.
2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.
3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.
5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $2a + b$ et $3a + 2b$ sont premiers entre eux.