



Fiche de T.D : ARITHMETIQUE.

Examineur : PLEG.-Ing.DIYOU TCHAKOUNTE Belmondo.

Exercice 1

Démontrer par récurrence que :

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

f) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k(k)! = (n+1)! - 1$

g) Pour $a \in \mathbb{N}^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)\dots(k+a)} = \frac{1}{a.a!} - \frac{n!}{a(n+a)!}$

Exercice 2

Soient a et b deux nombres réels.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

b) En déduire que pour tout entier n impair et supérieur à 2, on a :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Exercice 3

Dans le système de numération de base b , ($b \in \mathbb{N}, b > 2$) on pose $b-1 = u$.

1) Montrer que $\overline{2101}^b$ est divisible par $\overline{11}^b$; donner le quotient de cette division en base b .

2) Montrer que $\overline{10101}^b$ est divisible par $\overline{111}^b$; donner le quotient de cette division en base b .

3) Montrer que $\overline{100010001}^b$ est divisible par $\overline{10101}^b$, puis divisible par $\overline{10000000100000001}^b$; donner chaque fois le quotient de la division en base b .

4) Généraliser ces résultats.

Exercice 4

1. a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2 \cdot 4^{3n+1}$ est divisible par 11.
b) Déterminer $a \in \mathbb{Z}$, tel que $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$ soit un multiple de 11.
2. Un nombre s'écrit $\overline{341}^{10}$ et $\overline{2331}^a$, déterminer a .
3. a) Déterminer $n \in \mathbb{N}/5^{2n} + 5^n$ soit divisible par 13.
b) Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, le reste de la division euclidienne par 3 de $A = 2n^3 - n^2 + 2$.
4. a) Résoudre dans $\mathbb{Z} : x^2 + 2x - 3 \equiv 0[7]$.
b) Déterminer $n \in \mathbb{N}/5^{2n} + 5n + 1 \equiv 0[6]$.
5. Un nombre entier N s'écrit : $N = \overline{abcca}^5$ et $N = \overline{bbab}^8$
a) Montrer que $309a + 15c = 226b$, puis que $2b \equiv 0[3]$; en déduire b .
b) Montrer que $3a \equiv 1[5]$, déduire a et c , puis écrire alors N dans la base 10.

Exercice 5

- I) 1) Soit $x \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{k=0}^p (-1)^k x^k$, pour $p \in \mathbb{N}$.
2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x + 1$ divise $x^{2n+1} + 1$.
b) Déduire que $3/(2^{2k+1} + 1), \forall k \in \mathbb{N}$.
3) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, (2^{(2^p)})^k + 1$ est divisible par $(2^{(2^p)}) + 1$ si k est impair.
4) Démontrer qu'une condition nécessaire pour que $2^m + 1$ soit premier est que l'entier m soit une puissance de 2. On ne cherchera pas à étudier si cette condition est suffisante.
- II) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$
1) Montrer que $A_{n+3} \equiv A_n[7], \forall n \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n tels que $A_n \equiv 0[7]$.
3) Les nombres : $\alpha = \overline{1110}^2, \beta = \overline{1010100}^2$ et $\gamma = \overline{1001001000}^2$ sont-ils divisibles par 7?
- III) Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n + 2^{2n} + 2^{3n} + 2^{4n} \equiv 0[5]$?

Exercice 6

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard il observe le corps céleste B dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des objets aux yeux de l'astronome.

1. Soient u et v les nombres de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 .
Montrer que le couple (u, v) est solution de $(E) : 35x - 27y = 2$.
2. a) Résoudre (E) dans \mathbb{Z}^2 .
b) Déterminer la solution (u, v) permettant de déterminer J_1 .
3. a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
b) Le jour J_0 étant le 26 octobre 2017, quelle est la date exacte du jour J_1 ?
c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des astres?

Exercice 7

a et b désignent des entiers non nuls.

1. a) Démontrer que les diviseurs communs de a et $a^2 + b$ sont les diviseurs communs de a et b .
b) Qu'en déduit-on concernant $PGCD(a, a^2 + b)$ et $PGCD(a, b)$?
2. Montrer que $PGCD(a + b, 2a + 3b) = PGCD(a, b)$

Exercice 8

1. Résoudre dans \mathbb{Z} : $x^2 - 4x + 2 \equiv 0[7]$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système :
$$\begin{cases} 3x - y \equiv 1[5] \\ x + 2y \equiv 0[5] \end{cases}$$

Exercice 9

1. Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que :
$$\begin{cases} a \times b = 12950 \\ PPCM(a, b) = 2590 \end{cases}$$
2. a) Montrer que l'entier 491 est premier.
b) Montrer que les entiers 491 et 624 sont premiers entre eux.
c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $491x - 624y = 1$
3. On considère le nombre $E(n) = n^4 + n^2 + 1$, n étant un entier positif non nul.
a) Décomposer $E(n)$ en produit de facteurs du second degré, puis démontrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux.
b) Le nombre $E(n)$ peut-il être premier ?
4. Quel est le nombre de diviseurs positifs du nombre 1638 ?

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $S(n)$ la somme de tous les diviseurs de n .

1. Calculer : $S(8)$; $S(36)$; $S(152)$.
2. On dit qu'un nombre est parfait si $S(n) = 2n$. Montrer alors que 28 est un nombre parfait.
3. Montrer que, si a et b sont premier entre eux, alors $S(ab) = S(a)S(b)$.
4. Montrer que P est premier si et seulement si $S(P) = P + 1$.
5. Soit P un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les diviseurs de P^k ?
En déduire que $S(P^k) = \frac{P^{k+1}-1}{P-1}$.
6. Décomposer 496 en produit de facteurs premiers.
Déduire des questions 3. et 5. la valeur de $S(496)$. Conclure.

Exercice 11

1. On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.
a) Donner une solution particulière de l'équation (E) .
b) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation (E) .

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :
- $$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$
- a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E) .
 b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3. a) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $8x + 5y = 100$
 b) Dans une ville de la place, un groupe d'homme et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il avoir d'hommes et de femmes dans ce groupe ?

Exercice 12

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

- On suppose que n est un entier pair ; On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.
 - Montrer que M et N sont des entiers impairs.
 - En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le $PGCD(M, N)$.
- On suppose que n est un entier impair ; On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.
 - Montrer que M et N sont des entiers pairs.
 - Déterminer le $PGCD(M, N)$.
- Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'entier $81n^2 - 1$.
 - Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction de M et N .
 - Démontrer que si n est pair, alors $81n^2 - 1$ est impair.
 - Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

Exercice 13

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$.
- Calculer $PGCD(x_8, x_9)$ et $PGCD(x_{2002}, x_{2003})$. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?
 - x_{n+1} et x_n sont-ils premiers entre eux pour tout entier n ?
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2x_n - y_n = 5$.
 - Exprimer y_n en fonction de n .
 - En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel P , le reste de la division euclidienne de 2^P par 5.
- On pose $d_n = PGCD(x_n, y_n)$.
 - Démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.
 - En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 14

- Trouver à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le pgcd des nombres 1683 et 969.
 - Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations : $969x - 1683y = 51$ et $969x - 1683y = 102$
- a) Résoudre dans \mathbb{Z} chacune des équations $3x \equiv 1[5]$ et $5x \equiv 2[7]$.

- b) En déduire dans \mathbb{Z} , la résolution du système : $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$

Exercice 15

1. Déterminer l'entier n tel que $600 < n < 1100$ et $\text{pgcd}(n, 630) = 105$.
2. Résoudre dans \mathbb{N}^2 les systèmes suivants :
 - a) $\begin{cases} \text{pgcd}(a; b) = 50 \\ a + b = 600 \end{cases}$;
 - b) $\begin{cases} \text{pgcd}(a; b) = 12 \\ a^2 - b^2 = 7344 \end{cases}$;
 - c) $\begin{cases} \text{pgcd}(a; b) = 504 \\ a + b = 135 \end{cases}$

Exercice 16

Soient (x_n) et (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 3; y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation $2x - y - 5 = 0$.
2. En déduire x_{n+1} en fonction de x_n .
3. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.
4. Soit n un entier naturel.
 - a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.
 - b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.
5.
 - a) Démontrer par récurrence que $\forall x \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$
 - b) Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4} .
 - c) En déduire des valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisible par 5.

Exercice 17

1. On considère l'équation $(E) : 6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a) Déterminer un couple dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, solution de l'équation $6x + 7y = 1$.
 - b) En déduire les couples d'entiers relatifs, solutions de l'équation (E) .
2. Soient (a_n) et (b_n) les suites arithmétiques définies par : $a_0 = -2, 5$ et $b_0 = -32$ et pour tout entier naturel $n, a_{n+1} = a_n + 6$; $b_{n+1} = b_n + 7$.
Déterminer tous les couples (p, q) d'entiers naturels inférieurs à 15 tels que $a_p = -b_q$.

Exercice 18

1. Dans quelle base a-t-on les égalités suivantes :
 $\overline{32}^a \times \overline{14}^a = \overline{1103}^a$; $\overline{75}^a \times \overline{57}^a = \overline{3902}^a$; $\overline{18}^a + \overline{14}^a = \overline{33}^a$
2. Déterminer l'ensemble des nombres qui s'écrivent \overline{xyz} en base 5 et \overline{yzx} en base 7.

Exercice 19

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation diophantienne $7x - 4y = 4$.
2. Un entier naturel a s'écrit $a = \overline{75}^x$ et $a = \overline{49}^y$; puis un entier b s'écrit $b = \overline{310}^x$ et $b = \overline{125}^y$.
Déterminer x, y, a et b .

Exercice 20

- Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n .
- En déduire que l'entier $N = 22^{9n+2} - 31^{3n+5}$ est divisible par 9.

Exercice 21

- Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n pour lesquels $n^2 + n + 7 \equiv 0[13]$
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1 \equiv 0[9]$
- Un entier N est de la forme $N = 9 \times 10^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer N sachant qu'il admet 27 diviseurs naturels.

Exercice 22

- Décomposer 469 en produits en facteurs premiers, puis résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation $x^3 - y^3 = 469$.
- Déterminer les valeurs de l'entier naturel a pour lesquelles l'équation $x^2 - ax - 152 = 0$ admet des solutions entières.
- Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $3213x - 391y = 662$.
- Résoudre dans \mathbb{Z} le système $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$

Exercice 23

- Déterminer l'entier naturel n tel que $\frac{n^2+3}{n+2}$ soit irréductible.
- Déterminer les valeurs de l'entier relatif n pour que $\frac{n^2+3}{n+2}$ soit un entier.
- a) Déterminer les restes de la division euclidienne par 3 de 2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire le reste de la division euclidienne par 3 de $(275423)^n$.
b) Déterminer n pour que : $(275423)^n + (372121)^n$ soit divisible par 3.

Exercice 24

On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous forme $\frac{a^2+a}{2}$; ($a \in \mathbb{N}$).

- Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.
- Etudier la réciproque.

Exercice 25

- Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $x^2 \equiv -1[5]$.
- Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$
- Ecrire $2^6 - 1$ en base deux.
- b est un naturel supérieur à 1. Ecrire $(b + 1)^2$ en base b . (On distinguera deux cas : $b = 2$ et $b \neq 2$)

Exercice 26

- Démontrer que si a et b sont des nombres premiers distincts, alors $a^{b-1} + b^{a-1} - 1$ est divisible par ab .
- Soit p un nombre premier ($p > 2$). Démontre que : $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{p-1}$ est un multiple de p .
- Soit p un nombre premier. Démontrer que p est premier avec $(p-1)!$
- a) Factoriser dans \mathbb{R} le polynôme $p(x) = x^4 + x^2 + 1$
b) Démontrer que : Quelle que soit la base b ($b \geq 2$), l'entier $\overline{10101}^b$ est un multiple de $\overline{111}^b$.

Exercice 27

Soit $M_n = 1111\dots 111$, le nombre constitué en base 10 par n chiffre "1".
Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.

Exercice 28

- a) Calculer : $(1 + \sqrt{6})^2$; $(1 + \sqrt{6})^4$; $(1 + \sqrt{6})^6$
b) Appliquer l'algorithme d'Euclide à 827 et à 342. Que peut-on en déduire ?
- Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que : $(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$
 - Que valent a_1 et b_1 ? D'après les calculs de la question 1.a), donner d'autres valeurs a_n et b_n .
 - Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
 - Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$ alors 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$. En déduire que quelque soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.
 - Démontrer que si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.
En déduire que quelque soit n entier naturel non nul a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 29

Pour tout entier naturel n non nul, soient les nombres entiers.

$$a_n = 4 \times 10^n - 1; b_n = 2 \times 10^n - 1; c_n = 2 \times 10^n + 1$$

- Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , a_n et c_n sont divisibles par 3 et b_n n'est pas divisible par 3.
- En utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100, étudier si b_3 est premiers.
- Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{2n} = b_n c_n$.
En déduire la décomposition de a_6 en produit de facteurs premiers.
- a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul $\text{pgcd}(b_n; c_n) = \text{pgcd}(c_n; 2)$
b) En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
- Soit l'équation $(E) : b_3x + c_3y = 1$, d'inconnues les entiers relatifs x et y .
 - Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution
 - Résoudre l'équation (E) .

Exercice 30

Les questions A, B et C sont indépendantes.

- A. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
- B. Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite (U_n) par $U_0 = \cos x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

- C. 1- Soient a et b deux entiers naturels.

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$.

(on rappelle que $\forall p, n \in \mathbb{N}^*, p < n, C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$).

- 2- a) Développer par la formule précédente les expressions suivantes :

$$(x+1)^{2n}, (x-1)^{2n} \text{ et } (x^2-1)^{2n}.$$

b) En déduire que : $1 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 + \dots + (-1)^{2n} (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n$.

Exercice 31

Les questions A, B, C et D sont indépendantes.

- A- Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 8x^4 + 6x^2 + 2$

1- Ecrire $P(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du second degré à coefficients entiers relatifs.

2- Déduire que si la base du système de numération est au moins égale à cinq, le nombre 80602 est divisible par 211.

3- Exprimer dans ce système le quotient de la division de 80602 par 211.

- B- Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ en base sept.

Déterminer x et y pour que ce nombre soit divisible par 6.

- C- Déterminer le chiffre des unités de l'entier naturel $(3548)^{49} \times (2537)^{31}$.

- D- Déterminer tous les nombres de trois chiffres dans la base décimale qui s'écrivent \overline{xyz} en base 7 et \overline{zyx} en base 11.

Exercice 32

1. Démontrer par récurrence que : a) $\forall n \geq 1, \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$; b) $\forall n \geq 1, n! \geq 2^{n-1}$

2. Calculer $\sum_{p=50}^{100} \frac{1}{p(p+1)}$ et justifier pourquoi $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)}$ ne peut pas être un entier.

3. Un nombre A s'écrit $\overline{20x^5}$

a) Quels sont les valeurs possibles de x ?

b) Déterminer x pour que A soit divisible par 2 et par 9.

c) On suppose $x = 1$. Ecrire A dans le système décimal puis dans le système hexadécimal.

4. Soit n un entier naturel

a) Déterminer suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

b) Déduire le reste de la division euclidienne de 5^{2017} par 7.

Exercice 33

1. Soient n et a , 2 entiers naturels non nuls. On suppose que $a / 42n + 37$ et $a / 7n + 4$; montrer que $a / 13$. Que peut-on dire de $42n + 37$ et de $7n + 4$.

2. Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b . Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$: rétablir la division.

3. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 chacune des équations (E) $23x + 15y = 6$ et (E') $12x - 9y = 7$.

4. Résoudre le système $\begin{cases} x \equiv 3[4] \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$.