Enseignant : **Beh Yacouba Coulibaly** Durée : **2 h 00 min** Date : **04 Octobre 2024**

2024–2025

DEVOIR DE CLASSE N°1 ($T^{Le}C$)

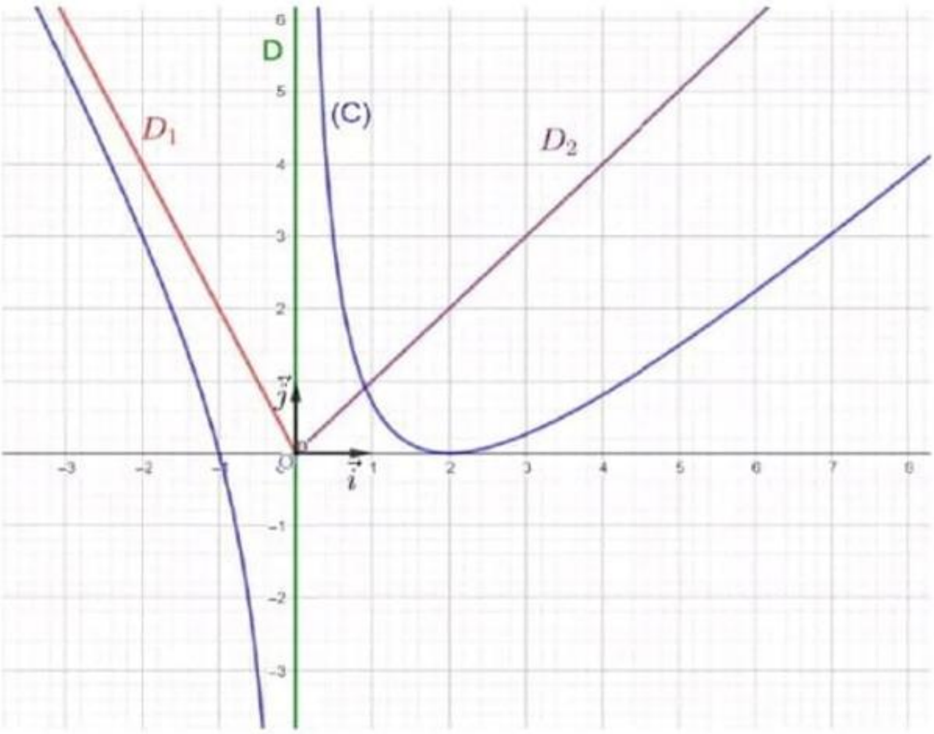
Ce devoir comporte deux pages numérotées $^1/_2$ et $^2/_2$.

Pour ce devoir, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements prendront une part prépondérante dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (14 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On a représenté ci-dessous, la courbe (C) d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.

* Les droites $D: x = 0$ et $D_1: y = -2x$ sont des asymptotes.
* La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite $D_2: y = x$.



1. Détermine graphiquement les limites suivantes.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\,,\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}\,,\quad \lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x),\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\,,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} (f(x)-x).$$

2. Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)-2x}{x\sqrt{-x}}$.

3. Détermine $f(]-\infty\,;\,0[)$ et $f(]0\,;\,2[)$.

4. Détermine l'ensemble D_{fof} de définition de fof.

5. Calcule :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} fof(x)$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{fof(x)}{f(x)}$

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{fof(x)}{x}$ (*Tu pourras écrire :* $\boldsymbol{\frac{fof(x)}{x} = \frac{fof(x)}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x}}$).

6. Soit g la fonction définie sur $[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$ par : $\begin{cases} g(x) = \cos(x)\,.\,f\left(\frac{1}{\cos x}\right) \; si \; x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right] \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \end{cases}$

a. Démontre que g est continue en $\frac{\pi}{2}$.

b. Démontre que l'équation $g(x) = -1{,}9$ admet au moins une solution dans $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right[$.

EXERCICE 2 (6 points)

Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = x(1 + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right))$.

1. Justifie que h est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontre que h est prolongeable par continuité en 0 à droite.

3. Détermine :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - 2x)$ et interprète graphiquement le résultat.

4. Démontre que :

a. h est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

b. L'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[1\,;\,+\infty[$ et vérifie que $\alpha \in]1\,;\,2[$.

5. Démontre que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}$.

Le désespoir renonce mais l'espoir n'abandonne jamais.