Enseignant : **Beh Yacouba Coulibaly** Durée : **4 h 00 min** Date : **30 Novembre 2024**

Groupe Scolaire Confessionnel Hinneh

2024–2025

DEVOIR DE CLASSE N°3 ($T^{Le}C$)

Ce devoir comporte trois pages numérotées $^1/_3$, $^2/_3$ *et* $^3/_3$.

EXERCICE 1 (2 points)

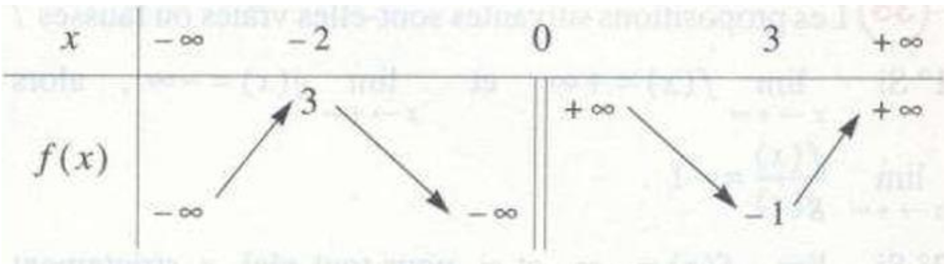
Fais correspondre chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous à sa réponse juste. **Exemple : 1– D**

N°	Affirmations	Réponses	
1.	$2ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \cdots$	A	$\frac{1}{2}ln\frac{2}{3}$
		B	$ln\frac{2}{3}$
		C	$2ln\sqrt{6}$
2.	$ln21 + 2ln14 - 3ln0{,}875 = \cdots$	A	$ln3 + 11ln2$
		B	$11ln3 - ln2$
		C	$11ln2 - ln3$
3.	$2\,ln(2+\sqrt{5}) + ln(9-4\sqrt{5}) = \cdots$	A	$2\ln(11-3\sqrt{5})$
		B	1
		C	0
4.	$ln\frac{1}{3} + ln\frac{3}{5} + ln\frac{5}{7} + ln\frac{7}{9} = \cdots$	A	$2ln3$
		B	$-2ln3$
		C	$ln3$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations qui suivent, écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si elle est vraie ou de FAUX si elle est fausse. Exemple : **5– FAUX.**

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ a pour tableau de variation ci-dessous.



1. Les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses -2 et 3 sont parallèles à l'axe des abscisses.
2. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
3. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement quatre solutions dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
4. L'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

1. Démontre que pour tout entier naturel n, le nombre $n^4 + 64$ n'est pas premier.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On souhaite démontrer que pour tout nombre rationnel r, $lnx^r = rlnx$
   a. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $lnx^n = nlnx$.
   b. Déduis-en que pour tout entier relatif p, $lnx^p = plnx$.
   c. Démontre que $lnx^r = rlnx$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

EXERCICE 4 **(3 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xsinx$.

1. Démontre que pour tout réel x, $f(x) = 2cosx - f''(x)$.
2. Déduis-en la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en π.

EXERCICE 5 **(6 points)**

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$.
   a. Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.
   b. Justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α que tu détermineras.
   c. Déduis-en le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan d'un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).
   a. Calcule : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Démontre que $(\mathcal{C}_f)$ admet en $-\infty$, une branche parabolique de direction une droite $(\mathcal{D})$ dont tu détermineras l'équation.
   c. Démontre que $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$, une asymptote (Δ) dont tu détermineras l'équation.
   a. Justifie que, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
   b. Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
   c. Etudie la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$ et (Δ).
   d. Trace $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que $(\mathcal{D})$ et (Δ).

EXERCICE 6 (4 points)

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (Δ).

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan de repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ représente le sol ; S a pour coordonnées $(3\,;4\,;0{,}1)$ et les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$, dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \\ z = 2 \end{cases} \quad (\text{avec } a \in \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = 0{,}5 + 2b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases} \quad (\text{avec } b \in \mathbb{R})$$

Un technicien affirme que :

- $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ne sont pas coplanaires ;
- $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont respectivement sécantes aux plans $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_1)$ définis par :
  $(\mathcal{P}_1) = \{S\,,(\mathcal{D}_1)\}$ et $(\mathcal{P}_2) = \{S\,,(\mathcal{D}_2)\}$;
- Il est possible de choisir une direction de (Δ) pour que cette droite coupe chacune des droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.

A l'aide d'un argumentaire basé sur tes connaissances mathématiques, vérifie si ce technicien dit vrai.

Le désespoir renonce mais l'espoir n'abandonne jamais.