Année scolaire : **2024 – 2025**
DEVOIR DE NIVEAU N°2
Niveau : **Terminale C**

Coefficient : 2
Durée : **4 h 00 min**
C.E. : Mathématiques– Info

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois pages respectivement numérotées $^1/_3$, $^2/_3$ *et* $^3/_3$

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chacune des affirmations qui suivent, écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si elle est vraie ou de FAUX si elle est fausse. **Exemple : 5– FAUX.**

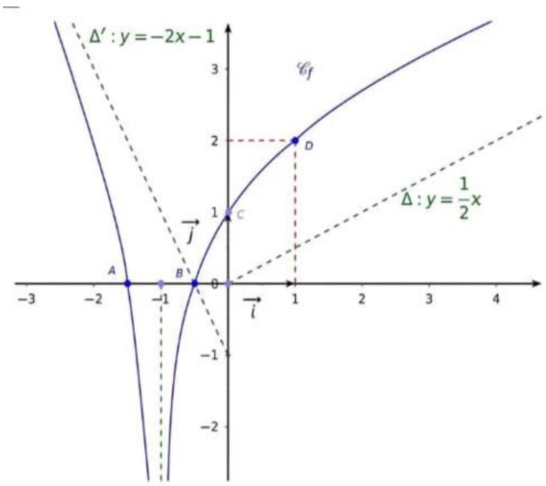
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne : A(1 ; −1 ; 0), B(2 ; 3 ; −4), C(4 ; −1 ; −3) et $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\15\\17\end{pmatrix}$. On note $(\mathcal{P})$ le plan passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $8x+15y+17z+7=0$.
2. La distance C à $(\mathcal{P})$ est égale à $\frac{27}{578}$.
3. $(\mathcal{P})$ passe par A.
4. Une représentation paramétrique de la (BC) est : $\begin{cases}x=4+2t\\ y=-1-4t\ ,\ t\in\mathbb{R}.\\ z=-3+t\end{cases}$

EXERCICE 2 (2 points)

Fais correspondre chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous à sa réponse juste. **Exemple : 1– D**

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.



	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. $\lim\limits_{\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\cdots$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	0
2. $\lim\limits_{\mapsto-\infty}\frac{f(x)}{x}=\cdots$	-1	-2	$-\infty$
3. $\lim\limits_{\substack{\mapsto-1\\ >}}f(x)=\cdots$	$+\infty$	0	$-\infty$
4. $\lim\limits_{\substack{\mapsto-1\\ <}}f(x)=\cdots$	$+\infty$	0	$-\infty$

EXERCICE 3 (3 points)

1. Résous dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $x^2 + 2x - 3 \equiv 0\ [6]$.
2. Démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.
3. Détermine le reste de la division euclidienne de 77^{20} par 13.

EXERCICE 4 (4 points)

1. DEF est un triangle rectangle isocèle en E tel que la distance DE est égale à $4cm$.

K désigne le milieu de [EF] et G le point défini par : $\overrightarrow{\mathrm{GD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FE}}$.

   a. Fais une figure.

   b. Démontre que G est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{D}, 2)$, $(\mathrm{E}, -1)$ et $(\mathrm{F}, 1)$.

   c. Démontre que le quadrilatère GFKD est un parallélogramme.

   d. Déduis-en que $\mathrm{GF} = 2\sqrt{5}$.

   e. Démontre que le triangle GEF est isocèle en G.

2. On note $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M du plan tels que : $2\mathrm{MD}^2 - \mathrm{ME}^2 + \mathrm{MF}^2 = 48$.

   a. Vérifie que E et F sont éléments de $(\mathcal{C})$.

   b. Détermine l'ensemble $(\mathcal{C})$

   c. Construis $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 5 (5 points)

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$.

   Démontre par l'absurde que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ et on désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : $2\ cm$.

   2.1) Calcule :

   a. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x)$.

   b. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$ et interprète le résultat.

   2.2) Démontre que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

   2.3) Détermine le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

   2.4) Démontre que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = -x + 1$ en $-\infty$.

2.5) Etudie la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

2.6) Ecris une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

2.7) Trace (T), $(\mathcal{D})$, l'autre asymptote et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2.8) Démontre que f détermine une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à K à préciser.

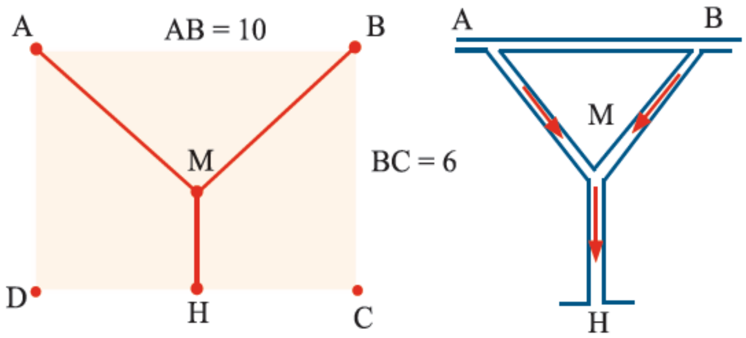
2.9) Calcule $f(0)$ puis $(f^{-1})'(\frac{3}{2})$.

2.10) Explicite f^{-1} puis trace $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère.

EXERCICE 6 **(6 points)**

Le directeur du collège confessionnel hinnêh de Biabou décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur un mur, à l'arrière de la façade d'une classe du collège.

Sur ce mur de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir (voir figure ci-dessous).



Sur ce plan, le rectangle ABCD représente le mur et H le réservoir. Les segments [AM], [BM] et [HM] désignent les tuyaux. Le support du segment [HM] est la médiatrice de [DC].

On donne : $\text{AB} = 10$ et $\text{BC} = 6$.

On note Q le projeté orthogonal de M sur la droite (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{BMQ}}$ avec mes $\widehat{\text{BMQ}} = \theta$, $\theta \in]0\,;\frac{\pi}{2}[$.

Afin de réduire le coût de la tuyauterie, le directeur cherche la position du point M sur le mur afin de minimiser la longueur des tuyaux à acheter. Il te sollicite.

A l'aide de tes connaissances mathématiques, détermine la valeur exacte de θ qui minimise la longueur totale des tuyaux.

Le désespoir renonce mais l'espoir n'abandonne jamais.