LYCÉE DE LA RÉVOLUTION
DIRECTION DES ÉTUDES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Prof : M. NDOUDI NDOUDI

République du Congo

DEVOIR DE CLASSE NUMÉRO 01

Épreuve : Mathématiques – Niveau : Terminale C – Durée : 03 heures

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. La clarté de la rédaction et la précision des raisonnements constitueront un élément important dans l'appréciation des copies. L'utilisation de la calculatrice est autorisée et l'usage du dictionnaire n'est pas autorisée.

Exercice n° 1 : *(4pts)*

On donne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1+itan\theta}{1-itan\theta}i\,; \quad z_2 = 1+sin\theta+icos\theta\,; \quad z_3 = -2+\sqrt{3}+i\cdot$$

❶ Pour $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, Écrire les nombres complexes z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique·

❷ On suppose que $\theta \in \left]0;2\pi\right[$· Déterminer le module et un argument de z_2·

❸ (a) Écrire z_3 sous la forme exponentielle·

(b) En déduire la forme trigonométrique de z_3·

❹ Soit $n \in \mathbb{N}$·

(a) Pour quelles valeurs de n, z_3^n est-il un réel ? z_3^n est-il un imaginaire pur ?

(b) Prouver que z_3^{2028} est un réel strictement positif·

Exercice n° 2 : *(8pts)*

Dans le plan $(\mathscr{P})$, rapporté à repère orthonormé direct, On considère un losange $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$·

❶ Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan $(\mathscr{P})$ tel que : $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{3}{2}$·

❷ Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le losange $ABCD$·

(a) Montrer que $f([AC]) = [AC]$·

(b) En déduire que $f(O) = O$·

(c) Déterminer alors quatre isométries qui laissent globalement invariant le losange $ABCD$·

❸ (a) Donner la nature et les éléments caractéristiques des isométries suivantes :

$$f_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \text{ et } f_2 = S_{(CD)} \circ S_{(CA)}\cdot$$

(b) Caractériser alors l'isométrie $g = r(C,-\frac{\pi}{3}) \circ r(A,\frac{\pi}{3})$· Puis caractériser et construire $g(\Gamma)$·

❹ On note E , F et G les symétriques respectives des points A, D et C par rapport au point B·
Soit h l'isométrie telle que : $h(A) = E$, $h(B) = F$ et $h(D) = B$·

(a) Montrer que h n'admet aucun point fixe·

(b) En déduire que h est une symétrie glissante·

(c) Montrer que $t_{\overrightarrow{BD}} \circ h = S_{(BD)}$·

(d) Donner alors le vecteur et l'axe de h·

Exercice n° 3 : *(5pts)*

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ par : $f(x) = 1 + 3cos^2(x)\cdot$ On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f\cdot$

❶ Étudier les variations de la fonction $f\cdot$

❷ Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe $(\mathscr{C})\cdot$

❸ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera$\cdot$

❹ (a) Justifier que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $\left]1;4\right[$ et que :

$$\left(\forall x \in \left]1;4\right[\right);\quad \left(f^{-1}\right)'\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}\cdot$$

(b) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\dfrac{7}{4};\dfrac{13}{4}\right[\right);\quad \dfrac{1}{3} < \left(f^{-1}\right)'\left(x\right) < \dfrac{2}{3}\cdot$

❺ (a) Calculer $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\cdot$

(b) Montrer que l'équation $f^{-1}\left(x\right) = x$ admet une seule solution α dans $\left]\dfrac{7}{4};\dfrac{13}{4}\right[\cdot$

❻ Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\alpha;\dfrac{13}{4}\right[\right);\quad \dfrac{1}{3}\left(x+2\alpha\right) < f^{-1}\left(x\right) < \dfrac{2}{3}\left(2x+\alpha\right)\cdot$

Exercice n° 4 : *(3pts)*

Dans cet exercice, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

❶ On considère la série statistique double suivante :

x_i	2	2	6	a
y_i	3	-1	3	b

où $a, b \in \mathbb{R}$

Calculer a et b pour que la droite de régression de y en x ait pour équation : $y = 0,75x - 0,5\cdot$

❷ Soient α,β et γ trois valeurs de moyenne $\overline{x}\cdot$

(a) Montrer que la variance :

$V(x) = \dfrac{(\alpha-\overline{x})^2 + (\beta-\overline{x})^2 + (\gamma-\overline{x})^2}{3}$ s'écrit : $V(x) = \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3} - (\overline{x})^2\cdot$

(b) Calculer la variance et l'écart type de la série suivante :

x_i	130	165	170	185	195	200	215
y_i	3	1	2	3	4	3	4

"Bon travail "

–✱– ✱– ✱– ✱– ✱– ✱– ✱– ✱–

✍ **with LaTeX by Lycée de la Révolution**