



COLLÈGE VOLTAIRE
MARCORY

Année scolaire : 2021/2022

DEVOIR DE NIVEAU
MATHÉMATIQUES

Classe : TleC

Durée : 4 heures

Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$.

On admet que les informations suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} ; f(4) = \frac{1}{2}.$$

La restriction g de f à $[1; +\infty[$ est une bijection et $g(4) = \frac{1}{2}$.

Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	(C_f) présente en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
2.	L'axe (OI) est asymptote verticale à (C_f) .
3.	f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.
4.	On a : $(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

Énoncés		Réponses proposées	
1.	Le quotient de la division euclidienne de -20 par 7 est :	A	-3
		B	-2
		C	2
2.	$\overline{11111100100}^2$ est l'écriture en base 2 de	A	2000
		B	2015
		C	2020
3.	Soit a un entier naturel ou nul. Si $a \equiv 19[20]$ alors :	A	$a^{402} \equiv 1[20]$
		B	$a^{402} \equiv -1[20]$
		C	$a^{402} \equiv 19 \times 402[20]$
4.	6485958017 est divisible par :	A	4
		B	11
		C	13

EXERCICE 3 (4 points)

- 1- Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n , $A_n = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.
- 2- Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne du nombre 5^n par 8.
- 3- Détermine le reste de la division euclidienne du nombre 2005^{2004} par 8.
- 4- a- Justifier que $1285 \equiv 5[8]$.
b-Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel k , le reste de la division euclidienne par 8 du nombre :
$$U_k = 1285^k + 2(1285)^{2k} + 3(1285)^{3k} + 4(1285)^{4k} + 5(1285)^{5k} .$$

EXERCICE 4 (3 points)

- 1- a) Déterminer suivant les valeurs de n , les restes possibles de la division euclidienne de 10^n par 7 ; n étant un naturel non nul.
b) En déduire le reste de la division euclidienne de 10^{2021} par 7.
2. Soit (E) l'ensemble des nombres entiers naturels de 4 chiffres qui s'écrivent sous la forme \overline{abba} dans le système décimal ;
 $0 < a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$.
 - a) Justifier que : \overline{abba} est divisible par 3 $\Leftrightarrow a+b \equiv 0 [3]$.
 - b) Justifier que : \overline{abba} est divisible par 7 $\Leftrightarrow b \equiv 0 [7]$.
 - c) En déduire tous les éléments de (E) divisibles à la fois par 3 et par 7.

EXERCICE 5 (5 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $2a$. (Pour les constructions, prendre $a = 2cm$).

- 1) Soit H le milieu du segment $[AB]$. On note D le point tel que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DA}$.
Démontrer que D est le barycentre des points pondérés $(B, 3)$; $(H, 6)$; $(C, 1)$.
- 2) Soit les points I et J milieux respectif des segments $[AC]$ et $[BC]$
 - a) Vérifie que $2HB^2 - HD^2 - HI^2 - 2HJ^2 = -2a^2$.
 - b) Justifie que pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{AB}$.
- 3) Soit (Δ) l'ensemble des points M tel que $2MB^2 - MD^2 + MI^2 - 2MJ^2 = -2a$.
 - a) Démontrer que $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$.
 - b) En déduire et construire l'ensemble (Δ) .
- 4) On note (Γ) l'ensemble des points M tels que : $3MB^2 - 6MH^2 + MC^2 = 6a$.
 - a) Justifie que H appartient à (Γ) .
 - b) En déduire puis construire (Γ) .
- 5) On note K l'autre point d'intersection de (Γ) et de (Δ) .
 - a) En déduire la question 4), démontrer que $KH(-KH + a\sqrt{3}) = 0$.
 - b) En déduire KH puis la nature du triangle KBA .

EXERCICE 6 (4 points)

Pendant les vacances, vous intégrez la coopérative du village où est gérée une décortiqueuse de riz. Cette machine peut traiter jusqu'à 25 tonnes journalièrement. Le coût de production de cette coopérative est exprimé en milliers de Francs par la fonction

$$f(x) = x^2 - 24x + 225.$$

La recette est exprimée en milliers de Francs par la fonction $g(x) = 16x$; x désigne la quantité de riz en kilogramme.

La coopérative veut déterminer quelle quantité de riz elle doit traiter par jour pour que le bénéfice soit le plus élevé possible. En utilisant vos connaissances, aidez la coopérative à calculer cette quantité de riz et ce bénéfice maximal.