

## Exercice 1

Pour tout entier  $n$  strictement positif, on définit la fonction  $f_n$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :  $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$

1° Calculer  $f_n(0)$  et  $f_n(1)$ .

2° a) Justifier que  $f_n$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et montrer que  $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}} (2n - (2n+1)x)$

b) Etudier la dérivabilité de  $f_n$  en 1.

c) Dresser le tableau de variations de  $f_n$ .

3° a) Montrer que  $f_n$  admet un maximum  $a_n$  que l'on exprimera en fonction de  $n$ .

b) Prouver que  $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c) En déduire que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et préciser sa limite.

## Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit A, B et C les points d'affixes respectives  $-4$  ;  $3$  et  $i$ .

On appelle  $f$  l'application du plan  $P$  privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe  $z$  ( $z \neq -4$ )

associe le point M' d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = \frac{z-3}{z+4}$

1° Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2° a) Déterminer l'affixe du point C' image de C par l'application  $f$ .

b) Démontrer que le point C admet un unique antécédent par  $f$ , que l'on notera C''.

3° Déterminer les affixes des points invariants par  $f$  (c'est-à-dire les points M vérifiant  $f(M) = M$ ).

4° a) Donner une interprétation géométrique du module de  $z'$ .

b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points M dont les images par  $f$  appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

5° a) Montrer que pour tout complexe  $z$  différent de  $-4$ ,  $|z' - 1| \times |z + 4| = 7$

b) En déduire que si M décrit un cercle  $\mathcal{C}$  de centre A et de rayon  $r$ , alors son image M' par  $f$  appartient à un cercle  $\mathcal{C}'$  dont on précisera le centre et le rayon.

Pour tout entier  $n$  strictement positif, on définit la fonction  $f_n$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :  $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$   
 $1^\circ f_n(0) = 0^n \sqrt{1-0} = 0$  et  $f_n(1) = 1^n \sqrt{1-1} = 0$

2° a) Justifier que  $f_n$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et montrer que  $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}} (2n - (2n+1)x)$

La fonction :  $x \mapsto x^n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $]0; 1[$

la fonction :  $x \mapsto 1-x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et la fonction :  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$

La fonction composée est donc dérivable en tout  $x$  tel que  $1-x \in ]0; +\infty[$ , elle est donc dérivable sur  $]0, 1[$

$f$  est donc le produit de deux fonctions dérivables sur  $]0, 1[$  elle est donc dérivable sur  $]0, 1[$

$$f(x) = u \times v \text{ avec } u(x) = x^n \text{ donc } u' = n x^{n-1} \text{ et } v(x) = \sqrt{1-x} \text{ donc } v'(x) = \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x) = n x^{n-1} \times \sqrt{1-x} + x^n \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{n x^{n-1} \times \sqrt{1-x} \times 2\sqrt{1-x} - x^n}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2n x^{n-1} (1-x) - x^n}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{x^{n-1} (2n(1-x) - x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}} (2n - (2n+1)x)$$

b) Etudier la dérivabilité de  $f_n$  en 1.  $\frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = \frac{x^n \sqrt{1-x} - 0}{x-1} = \frac{x^n (1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}} = -\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^n = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x^n}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

La fonction n'est donc pas dérivable en 1 (Remarque : la formule précédente ne peut être utilisée)

Remarque : la fonction  $f$  est continue en 1 et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = -\infty$  la courbe représentative de  $f$  admet donc une tangente verticale au point d'abscisse 1.

c) Dresser le tableau de variations de  $f_n$ .

Pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ ,  $x^n$  et  $2\sqrt{1-x}$  sont positifs donc  $f'(x)$  est du signe de  $2n - (2n+1)x$

$$2n - (2n+1)x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2n}{2n+1} \quad (2n+1 > 0)$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n : 0 \leq 2n < 2n+1 \text{ donc } 0 < \frac{2n}{2n+1} < 1$$

$x$	0	$\frac{2n}{2n+1}$	1
signe de $f'$	0	+	0
$f$			

3° a) Montrer que  $f_n$  admet un maximum  $a_n$  que l'on exprimera en fonction de  $n$ .

D'après les variations de  $f_n$  on peut dire que  $f_n$  admet sur  $]0, 1[$  un maximum  $f\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = a_n$

$$a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{1 - \frac{2n}{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{\frac{2n+1-2n}{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

b) Prouver que  $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  Pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq \frac{2n}{2n+1} \leq 1$  donc  $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \leq 1^n$  donc  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c) En déduire que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et préciser sa limite.

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$  donc d'après le théorème des gendarmes  $(a_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit A, B et C les points d'affixes respectives  $-4$  ;  $3$  et  $i$ .

On appelle  $f$  l'application du plan  $P$  privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe  $z$  ( $z \neq -4$ )

associe le point M' d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = \frac{z-3}{z+4}$

1° Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2° a) Déterminer l'affixe du point C' image de C par l'application  $f$ .

$$\frac{i-3}{i+4} = \frac{(i-3)(4-i)}{1+16} = \frac{4i - i^2 - 12 + 3i}{17} = -\frac{11}{17} + \frac{7}{17}i$$

b) Démontrer que le point C admet un unique antécédent par  $f$ , que l'on notera C''.

$$z \neq -4 : \frac{z-3}{z+4} = i \Leftrightarrow z-3 = i(z+4) \Leftrightarrow z-i z = 3+4i \Leftrightarrow z(1-i) = 3+4i \Leftrightarrow z = \frac{3+4i}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(3+4i)(1+i)}{1+1} \Leftrightarrow z = \frac{3+3i+4i+4i^2}{2} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

3° Déterminer les affixes des points invariants par  $f$  (c'est-à-dire les points M vérifiant  $f(M) = M$ ).

$$z \neq -4 : \frac{z-3}{z+4} = z \Leftrightarrow z-3 = z(z+4) \Leftrightarrow z-3 = z^2+4z \Leftrightarrow z^2+3z+3=0 \text{ équation } \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} \Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z+\frac{3}{2} = \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z+\frac{3}{2} = -\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

4° a) Donner une interprétation géométrique du module de  $z'$ .

$$\left. \begin{array}{l} z_A = -4 \quad z_M = z \text{ donc } AM = |z_M - z_A| = |z+4| \\ z_B = 3 \quad z_M = z \text{ donc } BM = |z_M - z_B| = |z-3| \end{array} \right\} \text{ donc } |z'| = \left| \frac{z-3}{z+4} \right| = \frac{BM}{AM}$$

b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points M dont les images par  $f$  appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

$$M \neq A : M \in E \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(O, 1) \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM. \text{ E est donc la médiatrice de } [AB]$$

5° a) Montrer que pour tout complexe  $z$  différent de  $-4$ ,  $|z'-1| \times |z+4| = 7$

$$|z'-1| \times |z+4| = \left| \frac{z-3}{z+4} - 1 \right| \times |z+4| = \left| \frac{z-3-z-4}{z+4} \right| \times |z+4| = \left| \frac{-7}{z+4} \right| \times |z+4| = 7$$

b) En déduire que si M décrit un cercle  $\mathcal{C}$  de centre A et de rayon  $r$ , alors son image M' par  $f$  appartient à un cercle  $\mathcal{C}'$  dont on précisera le centre et le rayon.

$$r > 0. M \in \mathcal{C}(A, r) \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow |z+4| = r. \text{ Remarque : on a alors } M \neq A$$

$$\text{On sait que : } |z'-1| \times |z+4| = 7 \text{ on peut donc dire que : } |z+4| = \frac{7}{|z'-1|} \text{ (remarque : } z' \neq 1)$$

$$\text{On a donc : } M \in \mathcal{C}(A, r) \Leftrightarrow \frac{7}{|z'-1|} = r \Leftrightarrow |z'-1| = \frac{7}{r} \Leftrightarrow m' \in \mathcal{C}\left(I, \frac{7}{r}\right) \text{ où I est le point d'affixe 1.}$$

Figure

