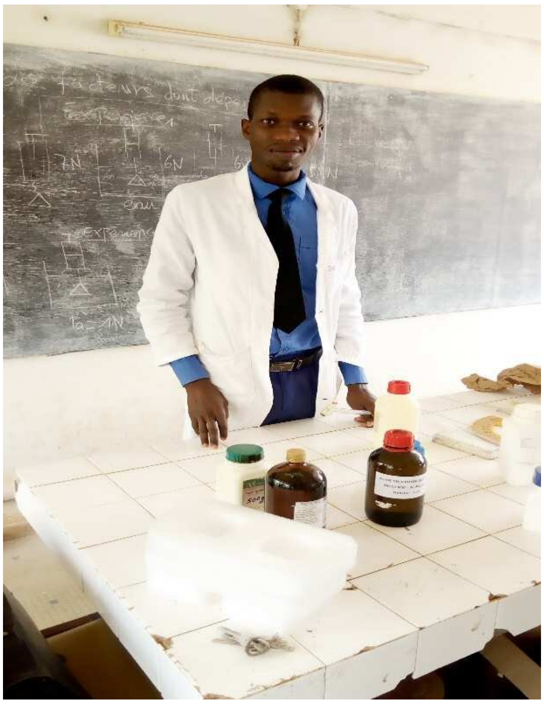
BAC D TOGO DE 2000 A 2019

MATHEMATIQUES

TERMINALE S



Auteur : ALLOH Yaovi Robert
Professeur de Sciences Physiques au TOGO

MATHEMATIQUES

COLLECTION
LA CONNAISSANCE EST UNE FORCE

(+228) 92 60 69 35 / 98 85 98 47

BAC TOGO SERIE D — SESSION 2000

EXERCICE 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère l'application F qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = t^3 z + t(t+1)$ où t désigne un nombre complexe.

1- Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2- Déterminer l'ensemble des complexes t pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

3- Caractériser F lorsque $t = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{(x+2)^2}{4x}$ et soit (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1-a) Etudier le sens de variation de f et établir son tableau de variation.

b) Tracer (C) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

2- On considère l'aire A de la partie P_a du plan comprise entre (C) et les droites d'équations respectives $y = \frac{1}{4}x + 1$, $x = 1$ et $x = a$, où a est un réel strictement supérieur à 1.

Calculer A en fonction de a.

3- On considère la suite $(a_n)_{n>0}$ de réels strictement supérieurs à 1 dont le premier terme est $a_1 = 2$. Soit $(A_n)_{n>0}$ les aires des parties P_{a_n}.

a) Calculer (a_n) en fonction de n pour que la suite $(A_n)_{n>0}$ soit arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Calculer a_n en fonction de n pour que la suite $(A_n)_{n>0}$ soit géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Calculer a_2 et a_3.

PROBLÈME

A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

1-a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

2- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, f vérifie la relation : $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$.

3- On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' + 2y' + y = 0$.

a) On pose pour tout x réel $u(x) = e^x h(x)$ où h est une fonction au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Démontrer que h est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel $u''(x) = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle $z'' = 0$ et déterminer les solutions de (E) (où z est une fonction réelle quelconque).

c) Démontrer que les conditions initiales $h(0) = \alpha$ et $h'(0) = \beta$ où α et β sont des réels, déterminer une solution unique de (E).

B/ Pour λ nombre réel donné, on considère les fonctions $g_\lambda(x) = [(\lambda+1)x + 1]e^{-x}$.

1- Démontrer qu'il existe des valeurs de α et β définies dans A/3-c) pour lesquelles g_λ est solution de (E).

2- On suppose dans la suite que $\lambda \neq -1$.

a) Discuter suivant les valeurs de λ les limites de g_λ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier suivant les valeurs de λ, le sens de variations de g_λ et faire dans chaque cas le tableau de variations.

c) On appelle (Γ_λ) la courbe représentative de g_λ dans le repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Tracer sur la figure précédente la courbe $(\Gamma_{-1/2})$.

d) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (γ) des points M du plan par lesquels il passe au moins une courbe (Γ_λ) tel que la tangente en M à (Γ_λ) soit parallèle à l'axe des abscisses.

3- Montrer que pour tout λ de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ l'équation $g_\lambda(x) = 1$ a deux solutions et que la solution non nulle a même signe que λ.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2001

EXERCICE 1

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 10. On tire simultanément 4 boules de l'urne.

1- Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2- Soit X la variable aléatoire : ''nombre de boules portant un numéro impair parmi les 4 boules tirées''.
Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.

3- On considère la variable aléatoire Y égale au plus grand numéro obtenu en effectuant le tirage simultané de 4 boules.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) En déduire que : $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3 + C_9^3 = C_{10}^4$.

EXERCICE 2

Soit l'application f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \longmapsto z' = (1+i)z$

M et M' désignent, dans le plan complexe P rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points d'affixes respectives Z et Z' (unité de longueur : $2\ cm$).

1- Soit le nombre complexe $a = \sqrt{2} + i$.
Calculer $f(a)$ et placer sur une figure les points A d'affixes a et A' d'affixe $f(a)$.

2- Montrer que l'équation $Z = f(Z)$ possède dans $\mathbb{C}$ une unique solution Z_O.

3- Soit K le point d'affixe $3i$.

a) Calculer $\frac{Z-Z\prime}{Z-3i}$ pour $Z \neq 3i$

b) Montrer que, pour tout point M différent de K, le triangle KMM' est un triangle rectangle isocèle dont on précisera le sommet de l'angle droit.
En déduire une construction du point M' connaissant un point M du plan. Faire cette construction.

4-a) Démontrer que l'ensemble (C) des points M du plan P tels que $O, M\ et\ M'$ sont alignés et le cercle de diamètre $[OK]$.

b) Vérifier que le point A défini au 1- appartient à (C). Tracer (C) dans le repère précédent.

PROBLÈME

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = 2x + \frac{e^x}{2(e^x-1)}$ et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : $1\ cm$).

Partie A

1- Déterminer l'ensemble de définition $D\ de\ f$ et étudier la parité de f.

2- Montrer que pour tout $x\ de\ D$, on a : $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1}$.

3- Calculer les limites de f en O et en $+\infty$.

4-a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ).

c) Déterminer les autres asymptote à la courbe (C).

Partie B

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$.

2- Déterminer la fonction dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

3- Tracer (C) ainsi que ses asymptotes dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

4- Déterminer l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 2x + m$ où m est un paramètre réel.

Partie C

Soit n un entier naturel supérieur à 1. On définit : $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt$.

1-a) A l'aide de la courbe représentative (C) de f, donner une interprétation graphique du nombre I_n.

b) Prouver que $I_n = \ln(\frac{n}{n-1})$ pour tout n supérieur à 1.

c) Calculer les limites de I_n lorsque n tend vers 1 et lorsque n tend vers $+\infty$.

2- On considère $S_n = I_2 + I_3 + I_4 + \cdots + I_n$.

A l'aide de la courbe (C) de f, donner une interprétation graphique du nombre S_n. Calculer S_n.

3- Calculer en cm^2, l'aire $A(n)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ et les droites d'équation $x = ln2\ et\ x = \ln(n+1)$.

Déterminer la limite de $A(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2002

EXERCICE 1

On propose de trouver sans les calculer séparément, les valeurs des trois intégrales :

$I = \int_0^{\pi/2} cos^4xdx$; $J = \int_0^{\pi/2} sin^4xdx$ et $K = \int_0^{\pi/2} 2sin^2x\, cos^2xdx$

1- Calculer $I - J$ et $I + J + K$

2- Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$. En déduire la valeur de $I + J - 3K$

3- Trouver à partir des questions précédentes, les valeurs de I, J et K.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on définit la transformation F, qui, au point M d'affixe $z = x + iy$ fait correspondre le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $z' = -2iz + 1 + 2i$.

1- Reconnaître F et donner ses éléments caractéristiques.

2- On considère la suite des points M_n de coordonnées (x_n, y_n) définie par récurrence de la manière suivante : le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0), est donné et différent du point $\Omega(1; 0)$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = F(M_n)$.

Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n, soit $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point M_n. On pose $Z_n = z_n - 1$.

3- Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = -2iZ_n$. On donne d_n la distance de Ω à M_n.

4- Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. Cette suite est-elle convergente ?

Exprimer d_n en fonction de n et de d_0 où $d_0 = \Omega M_0$.

5- Démontrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} - z_n = Z_{n+1} - Z_n$ et $Z_{n+3} - Z_{n+2} = -4(Z_{n+1} - Z_n)$.

Que peut-on alors dire, en justifiant, des droites (M_nM_{n+1}) et $(M_{n+2}M_{n+3})$?

PROBLÈME

Dans ce problème, k est un nombre réel et on considère la famille de fonctions f_k définie sur $[-1; +\infty[$ par $f_k(x) = (x+1)(e^{-1-x} + k)$.

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : $4\ cm$) et on désigne par (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k.

Partie A

1- Etudier suivant les valeurs de k, la limite de f_k en $+\infty$.

2-a) Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = kx + k$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de (C_k) et (D_k).

3-a) Calculer la dérivée première f'_k et la dérivée seconde f''_k de f_k.

b) Etudier le sens de variation de f'_k.

4-a) Dresser le tableau de variation de f_0 puis de f_1.

b) Déterminer les tangentes (T_0) et (T_1) respectives aux courbes (C_0) et (C_1) au point d'abscisse -1.

c) Tracer (D_0), (D_1), (T_0), (T_1), (C_0) et (C_1).

Partie B

1- Montrer que l'équation $f'_{-1/2}(x) = 0$ admet une unique solution α et que $-1 \leq \alpha \leq -0{,}5$.

2- Soit h l'application de $I = \left[-1; \frac{-1}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$, définie par : $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$.

Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

3- Etudier les variations de h et montrer que pour tout x de I, $h(x)$ appartient à I.

4- On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = -1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Démontrer que tous les termes de la suite (U_n) appartiennent à I.

On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}83|U_n - \alpha|$.

b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq (0{,}83)^n.\frac{1}{2}$

En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

c) Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \alpha| < 10^{-2}$.

5-a) Dresser le tableau de variation de $f_{-1/2}$.

Démontrer que $f_{-1/2}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha + 1)^2$.

b) On donne $U_{18} \approx -0{,}6854$. Donner la valeur approchée de α à 10^{-2} près et tracer $(C_{-1/2})$.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2003

EXERCICE 1

On place dans une urne, une boule jaune, p boules blanches et q boules noires. On tire une boule de l'urne, les tirages sont équiprobables.

Soient les événements :

A : « la boule obtenue est jaune » ; B : « la boule obtenue est blanche » et C : « la boule obtenue est noire ».

1-a) Calculer la probabilité $P(A), P(B)\ et\ P(C)$ de chacun des événements A, B et C en fonction de $p\ et\ q$.

b) Déterminer $p\ et\ q$ sachant que $P(A) = \frac{1}{21}$ et que $P(A), P(B)\ et\ P(C)$ sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

2- On pose $p = 4\ \ et\ q = 16$

Deux garçons $G_1\ et\ G_2$ utilisent cette urne pour réaliser le jeu suivant : deux boules sont tirées de l'urne simultanément. G_2 reçoit 120 Francs de G_1 si les deux boules sont de même couleur et G_1 reçoit 180 Francs de G_2 si les deux boules sont de couleurs différentes.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de G_1.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Le garçon G_1 a-t-il intérêt à jouer ?

EXERCICE 2

1- Montrer que l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe $z = x + iy$ (où x et y sont des réels) vérifie la relation : $(2 + 3i)z + (-2 + 3i)\bar{z} - 12i = 0$ (1) est une droite (D) que l'on déterminera par une équation cartésienne et aussi par un point et un vecteur directeur. Représenter cette droite dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, l'unité graphique étant $1\ cm$.

2- Montrer qu'il existe un seul réel z_0 et un seul imaginaire z_1 qui vérifie la relation (1). Calculer z_0 et z_1.

3- Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $-\frac{4}{3}i$ et $4 + \frac{4}{3}i$.

Montrer que la droite (D) est médiatrice du segment $[AB]$.

4- Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation

$\left|-\frac{4}{3}i - z\right| = \left|4 + \frac{4}{3}i - z\right|$.

5- Déterminer et représenter sur le graphique précédent l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\arg\left(\frac{-4i-3z}{12+4i-3z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k$ étant un entier relatif.

PROBLÈME

Partie I

1- Pour tout entier relatif non nul n, on considère la fonction f_n d'une variable réelle définie par :

$f_n(x) = x^n ln|x|\ \ si\ x \neq 0\ \ et\ \ f_n(0) = 0$.

1-a) Préciser l'ensemble de définition de f_n.

b) Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?

2- Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n.

a) Etudier les éléments de symétrie de (C_n) suivant la parité de n.

b) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par des points fixes O, A et B où O est l'origine du repère, A est le point d'abscisse positive et B le symétrique de A par rapport à O.

c) Pours quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle dérivable pour $x = 0$?

d) Calculer la dérivée de f_n pour $x \neq 0$. Montrer que toutes les courbes (C_n) admettent la même tangente en A.

3- Etudier les variations des fonctions f_{-3}; f_1 et f_2, puis tracer avec soin les courbes (C_{-3}); (C_1) et (C_2) dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : $2\ cm$).

4- Dans la suite du problème, on ne considère que la restriction des fonctions f_n à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit M_n le point de la courbe (C_n) de coordonnées (x_n, y_n) où x_n est la valeur strictement positive, pour laquelle f_n présente un extrémum.

Montrer que tous les points M_n sont sur une courbe (Γ) dont on précisera l'équation.

Partie II

1- Soit α un nombre réel strictement positif. Calculer $I_n(\alpha) = \int_1^{\alpha} f_n(x)dx$.

2- Dans cette question, $n = 2$.

a) Calculer $I_2(\alpha) = \int_1^{\alpha} f_2(x)dx$. Quelle est la limite de $I_2(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro ?

Interpréter géométriquement la valeur limite trouvée.

b) Déterminer un nombre réel β $(\beta > 0)$ tel que la valeur moyenne de f_2 sur l'intervalle $[0; \beta]$ soit nulle. Quel point particulier de la courbe (C_{-3}) a pour abscisse β ?

BAC TOGO SERIE D SESSION 2004

EXERCIE 1

On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine positive r de l'équation $(E) : x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 = 0$.

On appelle f la fonction définie sur $I = [0,5 ; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

1- Montrer que r est solution de l'équation $f(x) = x$.

2- Déduire des variations de f que $f(I) \subset I$.

3- Montrer que pour tout élément x de I, on a : $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

4- En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout élément x de I, on a :

$$|f(x) - r| \leq \frac{4}{9}|x - r|$$

5- Soit la suite (U_n) définie par $U_0 \in I$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - r| \leq \frac{4}{9}|U_n - r|$.

b) Puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - r| \leq \frac{1}{2}(\frac{4}{9})^n$.

c) En déduire que la suite (U_n) converge vers r. En prenant $U_0 = 1$ donner une valeur approchée de r à 10^{-3} près.

EXERCIRE 2

1- On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = az + b$ $(a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C})$. A quelle condition sur a existe-t-il un élément et un seul invariant par f ?

2- f_1 et f_2 étant les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par : $f_1(z) = 2iz + 2(1 + i\sqrt{3})$ et $f_2(z) = \frac{\sqrt{3}-i}{2}z - 2i + \sqrt{3}(1 - 2i)$. Déterminer l'image de z par l'application $g = f_2 o f_1$.

Calculer le nombre complexe z_0 invariant par g.

3-a) M, M' et Ω étant les points images des nombres $z, g(z)$ et z_0 dans le plan, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M'.

b) Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur $[-e; +\infty[$ par : $f(x) = x + (x + e)(ln\frac{x+e}{e})^2$ si $x \neq -e$ et $f(-e) = -e$.

Soit C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1-a) Démontrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} [x(lnx)^2] = 0$.

b) Calculer la limite de f en $-e$; f est-elle continue en $-e$?

c) Etudier la dérivabilité de f en $-e$.

2- Déterminer le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.

3- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

4- Tracer C et T.

5-a) Démontrer que f est une bijection sur un intervalle J à préciser. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et C' la courbe représentative de f^{-1}.

b) Tracer C' dans le même repère que C.

c) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

Partie B

Soit α un nombre réel tel que $-e < \alpha < 0$. On pose $J(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx$.

1- Pour tout entier naturel n, on désigne par $I_n(\alpha)$ l'intégrale $\int_{\alpha}^{0}(x+e)[\ln(x+e)]^n dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$ pour n entier naturel non nul.

b) Calculer $I_0(\alpha)$ puis $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

2-a) Vérifier que pour tout x de $]-e;\ +\infty[$, $f(x) = (x+e)(-1+\ln(x+e))^2 + x$.

b) Exprimer $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$, puis en fonction de α seul.

3- Calculer $\lim\limits_{\substack{\alpha \to -e \\ >}}(-J(\alpha))$. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

4- Soit P, Q et R les points du plan de coordonnées respectives $(0;\ -e)$, $(-e;\ -e)$ et $(-e; 0)$, soit Δ la droite d'équation $y = x$.

Les courbes C, C' et Δ partagent le carré $OPQR$ en quatre régions notées respectivement :

S_1 : partie du carré ''au-dessus'' de C

S_2 : partie du carré comprise entre C et Δ

S_3 : partie du carré comprise entre Δ et C'.

Comparez les aires de ces quatre parties.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2005

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $Z_A = 8$; $Z_B = 8i$; $Z_C = Z_A e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $Z_D = Z_B e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1- Ecrire Z_A et Z_B sous forme trigonométrique. Donner le module et un argument de Z_C et Z_D puis écrire ces nombre sous forme algébrique.

2- Montrer que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon puis tracer le cercle (C) et placer les points A, B, C et D.

3- On note Z_1 et Z_2 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$. Montrer que $Z_2 = Z_1\sqrt{3}$.

4- On note Z_3 et Z_4 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Calculer $|Z_3|$ et $|Z_4|$.

5- Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2

Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 a été pipé de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note P_n, $1 \leq n \leq 6$, la probabilité d'obtenir le chiffre n lors d'un lancé de dé.

Les nombres $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$.

1- Calculer la probabilité de l'apparition de chaque numéro.

2- On lance ce dé une fois et on considère les événements : A : « le nombre obtenu est pair » ; B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».

a) Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

b) Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3- On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- D'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires ;
- D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 ;
- S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet événement.

a) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_1 et en déduire la probabilité de l'événement $G \cap A$.

Déterminer ensuite la probabilité de l'événement G.

b) Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancé du dé.

PROBLÈME

Partie A

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par : $f_m(x) = e^x - m(x+1)$ où m est un paramètre réel. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, (Unité graphique : 2 cm).

1- Etudier les variations de la fonction f_1 et tracer avec soin sa représentation graphique (C_1). On précisera l'asymptote à la courbe (C_1).

2- Soit la droite (Δ_1) d'équation $y = -x - 1$. Calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par La courbe (C_1), (Δ_1) et les droites d'équations $x = 0$ *et* $x = \alpha$ (*où* α est un réel négatif).

Etudier la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

3- Pour tout entier naturel n, on désigne par D_n le domine limité par la droite Δ_1, la courbe (C_1) *et* les droites d'équation $x = -n - 1$ et $x = -n$

a) Calculer en cm^2, l'aire A_n du domaine D_n. Montrer que la suite des réels (A_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme A_0 et la raison.

b) Calculer $S_n = A_0 + A_1 + \ldots\ldots + A_n$ en fonction de n.

En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4- Etudier suivant les valeurs du paramètre m, les variations de f_m. On précisera les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.

5- Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe B dont les coordonnées sont indépendantes de m.

6- Montrer que la droite (Δ_m) d'équation $y = -mx - m$ est asymptote à la courbe (C_m) et déterminer la position de cette courbe (C_m) par rapport à (Δ_m)

Partie B

A tout point M du plan P d'affixes $z = x + iy$, on associe par une application T, le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que

$$T : P \to P$$
$$M \longmapsto M' \text{ et } z' = (1 - i)z + 1 + i$$

1- Quelle est la nature de la transformation T ? Déterminer ses éléments caractéristiques.

2- Définir analytiquement la transformation T.

3- M étant un point de la courbe (C_1), déterminer en fonction de x, abscisse du point M, les coordonnées du point M'transformé de M par T.

4- Déterminer l'ensemble (Υ) image par T de la courbe (C_1) .

Partie C

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = x - \ln(x^2)$.

1- Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (Γ) dans le repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Préciser les branches infinies de la courbe (Γ).

2- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

3- Tracer la courbe (Υ) dans le même repère que (Γ). (On pourra utiliser une autre couleur).

BAC TOGO SERIE D SESSION 2006

EXERCICE 1

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. A est le point d'affixe 2i et P* le plan P privé de A.

Soit T la transformation qui au point M d'affixe $Z \neq 2i$ associe le point M'd'affixe $Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$

1- Montrer que pour tout point M de P*, le point M' est distinct de A.

2- Démontrer que T est une bijection de P* sur lui-même. Déterminer sa réciproque T^{-1}.

3-a) Montrer qu'un point M de P* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation $z^2 - 4iZ + 5 = 0$.

b) Trouver le réel α tel que $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + \alpha$

c) Montrer alors que T admet deux points invariants B et C.

4- On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D*) la droite (D) privée de A. Montrer que (D*) est globalement invariant par T.

5-a) Montrer que pour $z \neq 2i$, $|Z' - 2i|.|Z - 2i| = 9$

b) Soit (Γ) le cercle de centre A et de rayon 3. Montrer que (Γ) est globalement invariant par T.

EXERCICE 2

1- Soient f, g et h les fonctions numériques de la variable réelle définies sur $[0\,;1]$ par $f(x) = xe^{x^2}$, $g(x) = ex - \frac{1}{2}$ (où e est la base du logarithme népérien) ; $h(x) = xe^{2x}$.

Montrer que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{e-1}{2}$; $\int_0^1 g(x)dx = \frac{e-1}{2}$; $\int_0^1 h(x)dx = \frac{e^2+1}{4}$.

2- On joue avec deux dés, un blanc et un rouge, cubiques et non truqués. Les faces du dé blanc sont marquées f, f, g, g, h et h, celles du dé rouge f, f, g, g, g et h.

On lance le dé blanc et on appelle k la fonction dont le nom apparaît sur la face supérieure du dé. Puis on lance le dé rouge et on note l la fonction dont le nom apparaît sur la face supérieure du dé.

Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque événement (k, l) on associe le réel $\int_0^1 [k(x) + l(x)]dx$.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLÈME

Partie A

Démontrer que pour tout réel x on a : $\sqrt{x^2+3} > |x|$. En déduire le signe de $\sqrt{x^2+3} + x$ et celui de $\sqrt{x^2+3} - x$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1-a) Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

c) Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

d) Compléter l'étude des variations de f.

e) Préciser le comportement de la courbe (C) en $x_0 = 1$ et construire (C).

2- Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1]$.

a) Montrer que g admet une application réciproque notée g^{-1}.

b) Définir explicitement g^{-1}.

c) Construire la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même repère que (C).

d) Déterminer la fonction G primitive de g^{-1} et telle que $G(0) = 0$.

e) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

Calculer A en utilisant la courbe (Γ).

Partie C

On désigne par I l'intervalle $[1; 2]$.

On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$.

1-a) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I.

b) Démontrer que pour tout x de I, on a $f(x) \in I$.

c) Démontrer que pour tout x de I, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

d) En déduire que pour tout x de I, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

2-a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

d) Déduire de 2-c) que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2007

EXERCICE 1

Partie I

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{e^x - 1}$ où y est une fonction, de la variable réelle x, dérivable sur $]0;\ +\infty[$.

1- Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée à (E).

2-a) L'on s'intéresse aux solutions particulières φ de (E) de la forme $\varphi(x) = \frac{h(x)}{e^x}$, où h est une fonction dérivable sur $]0;\ +\infty[$. Sachant que φ est une solution de (E), déterminer h.

b) En déduire la solution générale de (E).

c) Parmi les solutions de (E), déterminer la solution f qui vérifie la condition $f(ln2) = 0$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x}$.

Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 2$. On pose $I(\alpha) = \int_{ln2}^{ln\alpha} f(x)dx$.

1-a) Déterminer une primitive sur $]0;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$.

b) En déduire une primitive sur $]0;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{e^x - 1}$. On remarquera que $\frac{e^x}{e^x - 1} = 1 + \frac{1}{e^x - 1}$.

2- En utilisant le fait que f est une solution sur $]0;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E), prouver que : $I(\alpha) = -f(ln\alpha) + \ln(\alpha - 1) - ln\alpha + ln2$.

3- En déduire que : $I(\alpha) = -\frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha} + \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + ln2$.

4- Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$.

EXERCICE 2

1- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$.

2- Soit K, L, M les points d'affixes respectives : $Z_K = 1 + i,\ \ Z_L = 1 - i,\ \ Z_M = -i\sqrt{3}$.

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Unité graphique $2\ cm$. On complètera la figure dans les questions suivantes.

3-a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe Z_N du point N est $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point N en le point C et le point M en le point A. Déterminer les affixes $Z_A\ et\ Z_C$ des points A et C.

c) La translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B. Déterminer les affixes respectives $Z_D\ et\ Z_B$ des points D et B.

4-a) Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.

b) Montrer que : $\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = i$.

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 - x)e^k - k$. Où k est un réel fixé qui vérifie : $0 < k < e$.

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2- Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f. Calculer $f(1)$.
3-a) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, une notée $\alpha_k \in]-\infty; 1[$ et l'autre $\beta_k \in]1; +\infty[$.
b) Montrer que $e^{\alpha k} - k\alpha_k = (e^{\alpha k} - k)(\alpha_k - 1)$. On admettra que β_k vérifie la même relation, c'est-à-dire : $e^{\beta k} - k\beta_k = (e^{\beta k} - k)(\beta_k - 1)$.
4- Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1- Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - kx$.
a) Etudier le sens de variation de u.
b) On rappelle que $0 < k < e$. Justifier la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x - kx > 0$.
2- Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$. (C_k) sa courbe représentative dans le plan rapporté à repère orthogonal.
a) Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Prouver que $g'_k(x) = \frac{k.f(x)}{(e^x - kx)^2}$.
c) En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$.
3- On nomme M_k et N_k les points de la courbe (C_k) d'abscisse respectives α_k et β_k.
a) En utilisant la question 3-b) de la partie A, montrer que $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$.
b) Trouver une expression analogue pour $g_k(\beta_k)$.
c) Déduire de la question précédente que, lorsque k varie, les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe (H) dont on donnera une équation.
4-a) Déterminer la position relative des courbes (C_1) et (C_2).
b) Prouver que $\alpha_2 = 0$.
c) En prenant comme unités $2\ cm$ sur l'axe des abscisses et $4\ cm$ sur l'axe des ordonnées, construire les courbes $(C_1), (C_2)$ et (H) sur le même graphique. (On prendra $\alpha_1 = -1{,}1$ et $(\beta_2) = 1{,}6$).
5- Calculer l'aire délimitée par la courbe (C_1) et les droites d'équations $x = -3; x = 0$ et $y = 0$.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2008

EXERCICE 1

Dans le plan complexe, on donne les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A = -2 + 6i$; $Z_B = 1 - 3i$; $Z_C = 5 + 5i$; $Z_D = 2 + 4i$.

1- Soit S la similitude plane directe qui à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe $z' = 3iz + 13 - 9i$.

a) Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

b) Quelle est l'image par S du point C ? du point D ?

c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2- Soit R la similitude plane directe qui transforme B en C et D en A.

a) Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image $R(M)$.

b) Donner les éléments caractéristiques de cette similitude (on appellera J le point invariant). Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

c) Que représente le point D pour le triangle ABC ?

3- Montrer que J est un point de la droite (AB). Donner une mesure (en radian) de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

EXERCICE 2

Une urne contient des boules noires et des boules rouges. Chaque boule noire porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 179. Chaque boule rouge porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 59. Ces boules sont indiscernables au toucher.

1- Trouver le nombre maximal de boules de chaque couleur dans l'urne. (On pourra utiliser les suites arithmétiques).

2- On suppose que l'urne contient cinq boules noires et quinze boules rouges. On considère le jeu suivant : la mise est de 200 F pour chaque partie. Le joueur tire une boule de l'urne :

- Si elle est noire, on lui donne 500 F et la partie est terminée.
- Si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un second tirage.
- Si la seconde boule tirée est noire, on lui donne 300 F et la partie est terminée.
- Si la deuxième boule tirée est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un troisième et dernier tirage.
- Si la troisième boule tirée est noire, on lui donne 100 F.
- Si la troisième boule tirée est rouge, il n'a rien.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité p pour que X soit positif.

c) Peut-on espérer gagner à ce jeu ?

d) Un joueur fait cinq parties successives. Quelle est la probabilité pour qu'il ait exactement trois fois un gain positif lors des cinq parties.

PROBLÈME

Partie A

Soit u la fonction de la variable réelle x définie par : $u(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$.

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $u(x) = 0$.

2- Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = x - 2\sqrt{1 + x^2}$.

1-a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c) En déduire le signe de g'.

2- Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D puis dresser le tableau de variation de g.

3-a) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (C) de g.

b) Préciser la position de la courbe (C) par rapport à ses asymptotes.

4- Construire la courbe (C) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité graphique : 2 cm)

Partie C

1- Déterminer la fonction numérique h telle que pour tout réel $x, h(-x) + g(x) = 0$.

2- Soit (Γ) la courbe représentative de h. Montrer que $(C) \cup (\Gamma)$ est la courbe d'équation :
$y2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$.

3- En déduire que le point O est un centre de symétrie de la courbe $(C) \cup (\Gamma)$.

4- Construire alors (Γ) dans le même repère précédent.

Partie D

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

1-a) Démontrer que pour tout réel $x, \sqrt{1 + x^2} > |x|$.

b) En déduire l'ensemble de définition de f.

2- Calculer la dérivée f' de f puis en déduire une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3- Calculer en centimètre carré l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan qui vérifient les inégalités $0 \leq x \leq 1$ et $g(x) \leq y \leq -x$.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2009

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires d'une entreprise exprimé en millions de francs, pendant huit années consécutives.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires (y_i)	41	67	55	80	95	104	100	122

1-a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour vingt millions de francs en ordonnée.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G et le représenter sur la figure précédente.

2-a) Calculer à 10^{-3} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i). Un ajustement affine serait-il justifié ?

b) Ecrire une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés (On donnera les coefficients à 10^{-3} près par excès).

c) Tracer cette droite dans le même repère que le nuage de points.

3- En supposant que la tendance constatée se maintienne, estimer :

a) Le chiffre d'affaires de cette entreprise en 2015.

b) Déterminer l'année où le chiffre d'affaires de cette entreprise dépassera 300 millions de francs.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points : A d'affixe $a = -4$; B d'affixe $b = 4$; E d'affixe $e = 4i$; C d'affixe c et D d'affixe d tels que les quadrilatères $AOEC$ et $BOED$ soient des carrés.

1- Placer les points précédents dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et donner les affixes des points C et D.

2- Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1+i)z + 4 + 4i$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Préciser les points $f(A) et\ f(O)$. Peut-on prévoir ces résultats ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose M un point quelconque du plan distinct du point C.

c) Exprimer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de l'affixe z de M.

d) Déduire que $MM' = MC$.

e) Calculer $\frac{z-c}{z-z'}$ et montrer qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}})$ est $\frac{\pi}{2}$.

f) Quelle est la nature du triangle $MM'C$?

PROBLÈME

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est de 2 cm.

Partie A

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = xlnx - x + 1$ et (C) sa représentation graphique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- Etudier le sens de variation de g puis dresser le tableau de variation de cette fonction.
En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2- On note C' la représentation graphique de la fonction $x \to lnx$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que C et C' ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1; e]$, on a :
$xlnx - x + 1 \leq lnx$.

On ne demande pas de représenter C et C'.

3-a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $J = \int_1^e (x-1)lnxdx$

b) Soit Δ la partie du plan définie par :
$\Delta = \{M(x;y); 1 \leq x \leq e \;\; et \;\; g(x) \leq y \leq lnx\}$. Déterminer en cm^2, l'aire de Δ.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]1 + \infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} lnx$.

1- Etudier les limites de $f \; en + \infty \; et \; en \; 1$.

2- Déterminer le tableau de variation de f. (on pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.

3- Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie C

1- Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée $\alpha \; et \; que \; 3,5 < \alpha < 3,6$.

2- Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[\; par: h(x) = lnx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

a) Montrer que αest solution de l'équation $h(x) = x$.

b) Etudier le sens de variation de h

c) On pose $I = [3; 4]$. Montrer que, pour tout x élément de I, on a : $h(x) \in I et \; |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.

3- On définit la suite (Un) par : $U_O = 3$ et pour tout $n \in N, \; U_{n+1} = h(Un)$.
Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

a) Pour tout entier naturel $n, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$

b) Pour tout entier naturel $n, |U_n - \alpha| \leq (\frac{5}{6})^n$.

c) La suite (U_n) converge vers α.

4- Trouver un entier naturel p tel que des majorations précédentes on puisse déduire que (U_p) est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2018

EXERCICE 1

On considère un groupe de 16 personnes parmi lesquelles 4 ont une caractéristique C. Ces quatre personnes sont dites de « type C ». On prend simultanément et au hasard 5 personnes dans ce groupe.

1- Calculer la probabilité de chacun des événements suivant :

A : « n'avoir, parmi ces 5 personnes, aucune du « type C » ».

B : « avoir exactement une personne de ce type ».

C : « avoir au moins deux personnes de ce type ».

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2- On constate après enquête, que, dans la population entière, la répartition des personnes du « type C » est de 1 sur 4. On estime la population suffisamment nombreuse pour que le tirage de n personnes soit assimilable à n tirages successifs indépendants avec remise.

On prend au hasard n personnes ($n \geq 2$) et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de celles du type C.

a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer $p(X = 0)$ et $p(X = 1)$ en fonction de n.

c) En déduire la probabilité P_n d'avoir au moins deux personnes de type C.

d) Démontrer que $P_n \geq 0{,}9$ si et seulement si $(\frac{3}{4})^{n-1}(\frac{3+n}{4}) \leq 0{,}1$.

e) On pose $u_n = (\frac{3}{4})^{n-1}(\frac{3+n}{4})$.

Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

EXERCICE 2

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par T l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z - i$.

1- Montrer que T est la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif dont on donnera les éléments caractéristiques. On note Ω le point invariant par T.

Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'})$ en supposant $M \neq \Omega$.

2-a) Construire M' image de M par T où M est un point donné distinct de Ω.

b) Déterminer l'image (D') par T de la droite (D) d'équation $y = x$. Construire (D').

3-a) Montrer qu'il existe un point B de (P) distinct de Ω et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' (où B' est l'image de B par T) soient liés par la relation $z_0 z'_0 = 1$.

Placer B et B' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Soit Ω' le symétrique de Ω par rapport à O. Montrer que les points Ω', Ω, B et B' sont cocycliques.

Déterminer l'affixe du centre G du cercle (Γ) passant par Ω', Ω, B et B'.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$.

1- Etudier les variations de la fonction f.

2- Déduire de cette étude que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule, notée α. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

3- Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé (l'unité graphique choisie est 2 cm). Préciser, s'il y a lieu, les tangentes horizontales.

4-a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$.

b) Soit λ un réel positif. Montrer que $0 \leq \int_0^{\lambda} x^2 e^{-x} dx \leq \frac{\lambda^3}{3}$.

Partie B

1- Vérifier que pour tout réel $x, f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$ où f' et f'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de f.

2- On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x = 0$. Donner la valeur explicite de $F(x)$ pour tout réel x.

3-a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 1$; $x = 0$; $x = \lambda$ où λ est un réel positif.

b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Partie C

On se propose de résoudre l'équation différentielle du second ordre, de fonction inconnue y:

$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = -2e^{-x} + 1.$ (E_1)

La fonction f est solution de (E_1) d'après la question B-1).

1- Résoudre l'équation $y'' + 2y' + y = 0$ (E_2).

2- La fonction g étant une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_2). Démontrer que $g + f$ est une solution de (E_1).

Réciproquement, soit h une solution de (E_1). Démontrer que $h - f$ est solution de (E_2).

En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

3- Déterminer la solution φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Partie D

Etant donné un réel a, on note g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1$.

1- Montrer que les courbes (C_a) représentatives des fonctions g_a passent toutes par un même point fixe I.

2- On suppose $a \neq -2$. Démontrer alors que la fonction g_a admet deux extremums, dont l'un est obtenu pour $x = 0$.

3- On note M_a le point d'abscisse $a + 2$ sur la courbe (C_a). Lorsque a varie, M_a décrit une courbe (Γ) ; donner une équation cartésienne de (Γ).

BAC TOGO SERIE D SESSION 2011

EXERCICE 1

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.

1- On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement » et $\bar{F}$ l'événement contraire de F.
Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F}$.

2- On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison ; on constate que :

- Quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test.
- Quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.

On note T l'événement : « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

a) Montrer que la probabilité de l'événement T et F noté $T \cap F$ est égale à $\frac{9}{10}$.

b) Calculer la probabilité de l'événement $T \cap \bar{F}$.

c) En déduire la probabilité de l'événement T.

d) Calculer la probabilité de F sachant T (probabilité conditionnelle de F par rapport à T).

EXERCICE 2

Soit $P(Z) = Z^3 + \alpha Z^2 + \beta Z + \gamma$ un polynôme complexe de degré 3 où α, β et γ sont des nombres complexes donnés.

1-a) Démontrer que si le polynôme $P(Z)$ admet trois racines a, b et c alors on a simultanément :
$a + b + c = -\alpha$; $ab + bc + ac = \beta$ et $abc = -\gamma$.

b) Former alors le polynôme $P(Z)$ lorsque ses racines sont : $a = 1 + 3i\sqrt{3}$; $b = -2 + i\sqrt{3}$ et $c = 4 - 2i\sqrt{3}$

2- On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$.

c) En déduire la valeur de $\frac{AC}{AB}$ et la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

3-a) Donner l'écriture complexe de la similitude directe S de centre A, qui transforme B en C.

b) Déterminer l'affixe z_1 du point B_1 qui a pour image B par S.

PROBLÈME

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 6 - 4lnx$.

1- Etudier le sens de variation de g.

2- Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de g.

3- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $1{,}86 \leq \alpha \leq 1{,}87$.

4- Donner alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x appartenant à $]0; \alpha[$ et à $]\alpha; +\infty[$.

NB : La représentation graphique de g n'est pas demandée.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x)-1}{x}$. On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $Unité : 2\ cm$.

1a) Calculer $f'(x)$ pour x élément de $]0; +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$ où g est la fonction définie à la partie A.

b) Déterminer le sens de variation de f.

c) Calculer la limite de f en 0 puis en $+\infty$.

2-a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à (C).

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

c) Préciser les coordonnées du point A intersection de (C) et (D).

3-a) Montrer que $\ln(\alpha) = \frac{6-\alpha^2}{4}$ et que $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$ où α est le nombre réel défini à la partie A-3).

b) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = -x + 3 + \frac{2}{x}$.

b_1) Etudier le sens de variation de h.

b_2) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. On rappelle que $1,86 \leq \alpha \leq 1,87$.

4-a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Calculer $f\left(\frac{1}{e}\right)$; $f(x)$. Que peut-on conclure pour la courbe (C) ?

c) Construire $(D), (C)$ puis placer le point A.

Partie C

Soit k la fonction définie par $k(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$.

1- En remarquant que $k(x) = 2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$, calculer l'intégrale $I_0 = \int_{\sqrt{e}}^{e} k(x)dx$.

2- Donner une interprétation géométrique de I_0.

3- On considère la suite numérique (a_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $a_n = e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

a) Calculer en fonction de n l'intégrale $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} k(x)dx$.

b) Montrer que (I_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2012

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne l'évolution de prix en dollar ($) de la tonne d'une terre rare entrant dans la fabrication d'un composant électronique ces dix dernières années :

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix de la tonne en $ (y_i)	38	45	40	55	70	60	75	80	95	106

1-a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour dix dollars en ordonnée.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G.

2-a) Calculer à 10^{-2} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i). En déduire qu'un ajustement affine est justifié.

b) Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression linéaire (D) de y en x. (On donnera les coefficients à 10^{-2} près par excès).

c) Tracer la droite (D) dans le même repère que celui du nuage des points.

3- En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon dans les années à venir :

a) Donner une estimation du prix de la tonne de cette terre rare en 2016.

b) En quelle année le prix de la tonne de cette terre rare dépassera 180 $.

EXERCICE 2

On considère l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$.

1-a) Vérifier que i est solution de (E).

b) Définir les nombres réels a, b et c tel que :

$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

c) En déduire les solutions de (E).

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes $z_A = i$, $z_B = 2+3i$ et $z_C = 2-3i$

a) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de A par r.

b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$. En déduire l'existence d'une homothétie h de centre B qui transforme A' en C et préciser son rapport.

3- On considère la transformation plane s définie par : $s = h \circ r$

a) Quelle est l'image de A par s.

b) Préciser la nature et les éléments géométriques de s.

PROBLÈME

Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x^k(e^{-x} - \frac{1}{2})$.

On note (C_k) la courbe représentative de f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité graphique : 4 cm).

Partie A

1-a) Etudier la limite de f_k en $+\infty$.

b) Etudier, suivant la parité de k, la limite de f_k en $-\infty$.

2- Calculer la fonction dérivée de f_k, puis montrer que pour tout x réel, $f'_k(x) = x^{k-1}g_k(x)$ où

$g_k(x) = (k - x)e^{-x} - \frac{k}{2}$.

3-a) Etudier les variations de g_k sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que l'équation $g_k(x) = 0$, admet une unique solution α_k dans $\mathbb{R}$ et que α_k est strictement positif.

c) Déterminer le signe de g_k sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe f'_k sur $\mathbb{R}$ (distinguer k pair et k impair).

d) Dresser le tableau de variation de f_k.

Partie B

Dans cette partie, on prend $k = 1$. Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $g_1(x) = (1 - x)e^{-x} - \frac{1}{2}$.

1-a) Montrer que $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$.

b) En utilisant g_1, montrer que $e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$. En déduire l'expression de $f_1(\alpha_1)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_1}$.

c) Déduire de A-3-d) le tableau de variation de f_1.

2- Montrer que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en $+\infty$ dont précisera une équation.

3- Soit la fonction φ définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $\varphi(x) = 1 - \frac{e^x}{2}$.

a) Démontrer que α_1 est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$.

b) Démontrer que pour tout x élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\varphi(x)$ est aussi élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

c) Démontrer que pour tout x élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$.

4- On définit la suite numérique (U_n) par : $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = \varphi(U_n)$.

a) Démontrer que (U_n) est une suite d'éléments de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|U_n - \alpha_1|$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $|U_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^n$. En déduire que la suite U_n est convergente et préciser sa limite.

5-a) Etudier le signe de f_1 sur $\mathbb{R}$.

b) On donne $\alpha_1 \approx 0{,}315$. Construire (C_1) et (D) dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

6-a) Déterminer les nombres réels a et b tels que, la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction : $x \longmapsto xe^{-x}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2013

EXERCICE 1

Soit a un nombre complexe.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)z^2 - 2i(a+1)z + (i-1)(a^2+1) = 0$.

2- Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation. Trouver entre z_1 et z_2 une relation indépendante de a.

3- Caractériser la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2.

4- On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$?

EXERCICE 2

On considère les équations différentielles suivantes :

(E): $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1-2x)e^x$,

(E') : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0$; dans lesquels m est un paramètre réel.

1- Résoudre, suivant les valeurs de m, l'équation (E').

2- Déterminer la valeur de m pour laquelle, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2e^x$ est une solution de (E).

3- Dans cette question, on donne $m = 0$.

a) Soit φ une fonction aux moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a_1) Montrer que si φ est une solution de (E) alors $(\varphi - h)$ est une solution de (E').

a_2) Montrer que si $(\varphi - h)$ est une solution de (E') alors φ est une solution de (E).

b) Déduire de 1-, la résolution de (E') ; puis résoudre (E).

c) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point $\Omega(0; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

4- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2-2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto 2(1-2x)e^x$.

a) Sachant que g est une solution de (E), montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
$G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer une expression de $U(x)$ de la forme : $U(x) = (ax+b)e^x$ où a et b sont des constantes réelles.

c) En déduire $G(x)$.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est $2\ cm$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1- Etudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2-a) Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0; +\infty[$. On note α cette solution.

b) Prouver que : $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

3- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1-a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0;\ +\infty[$.

2-a) Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3-a) Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A/2-, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5-a) Etablir que pour tout x appartenant à $[0;\ +\infty[$, $f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x+1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$.

b) Etudier le sens de variation de φ sur $[0;\ +\infty[$. En déduire le signe $\varphi(x)$ sur $[0;\ +\infty[$.

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

d) Tracer (C) et (T).

Partie C

1- Déterminer une primitive F de f sur $[0;\ +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie en B/2-.

On note D le domaine du plan limité par la courbe (C), la tangente (T), les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2- Calculer en cm^2 l'aire A du domaine D.

3- Pour tout entier naturel k, on pose $V_k = \int_k^{k+1} f(x)dx$.

a) Calculer V_0, V_1 et V_2.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$.

c) Déduire la limite de V_k quand k tend vers $+\infty$.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2014

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) : $Z \in ₵$, $Z^n = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$, $n \in IN^*$.

1- Déterminer les solutions Z_k de (E).

2- On pose n=5

Représenter dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points-images des solutions Z_k de (E).

3- On pose $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a) Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, exprimer α en fonction de $\bar{J}$.

b) Montrer que α est une solution de l'équation $Z^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$

4-Soit la transformation T de P dans P , d'affixes Z associe le point M' de P d'affixe Z' tels que :

$$Z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)Z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

a) Ecrire la forme algébrique du nombre complexe $w = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$.

b) Donner la nature de T et préciser ses élément caractéristiques.

EXERCICE 2

Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.

Il y a 8% d'ingénieurs et 80% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60%des opérateurs de production.

On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'événement : « Le personnel interrogé est un agent de maintenance »
- O l'événement : « Le personnel interrogé est un opérateur de production »
- I l'événement : « Le personnel interrogé est un ingénieur »
- F l'événement : « Le personnel interrogé est une femme ».

1- Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2- Calculer la probabilité d'interroger :

a) Un agent de maintenance.

b) Une femme agent de maintenance.

c) Un femme.

3- Le service de maintenance effectue l'entretien de machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003.
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement : « l'alarme se déclenche »
- B l'événement : « une panne se produit »

a) Démontrer que la probabilité qu'une se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

b) Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} - 3 & si\ x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique $1\ cm$.

1-a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Montrer que pour tout réel non nul u on a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \frac{1}{u}$.

c) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)+2}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)+2}{x}$.

Interpréter analytiquement et géométriquement les résultats obtenus.

2- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3-a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles $\alpha < 0 < \beta < 1$.

b) Vérifier que $-2,75 < \alpha < -2,74$.

Partie B

On pose $g(x) = e^{-\frac{x}{4}}$ et $I = [0; 1]$.

1- Montrer que β est l'unique solution de l'équation : $x > 0, g(x) = x$.

2- Montrer que pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

3- Soit g' la fonction dérivée de g. Montrer que pour tout x de I, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

4- On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Démontrer par récurrence que (U_n) est une suite d'éléments de I.

b) En appliquant les inégalités des accroissements finis, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|U_n - \beta|$, puis que $|U_n - \beta| \leq (\frac{1}{2})^{2n}$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

d) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel U_{n0} est une approximation de β à 10^{-3} près.

e) Calculer la valeur correspondante de U_{n0}.

Partie C

1-a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Etudier l'autre branche infinie de (C).

2- Construire avec soin (Δ) et (C) dans le repère $0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; (On prendra $\alpha \approx -2,7$ et $\beta \approx 0,8$).

3-a) Par des intégrations par parties, calculer $I_\beta = \int_0^\beta f(x)dx$.

b) Exprimer l'aire $A(\alpha, \beta)$ du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$ en fonction de α et β seulement.

BAC TOGO SERIE D SESSION 2015

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne l'évolution de l'indice annuel des dépenses, exprimé en milliards de francs CFA, d'une compagnie multinationale pendant ces 10 dernières années.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indice des dépenses (x_j)	36	45	40	58	70	64	80	95	100	108

1-a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (x_i, x_j) dans un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dont l'unité graphique est 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 10 milliards de francs CFA en ordonnée.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G puis le construire sur la figure précédente.

2-a) Calculer à 10^{-3} $près$, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, x_j).
Un ajustement linéaire peut-il être envisagé ? Justifier la réponse.

b) Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite (D) de régression linéaire de y en x. (On donnera les coefficients à 10^{-3} $près$).
Représenter la droite (D) dans le repère précédent.

3- On suppose que l'évolution de l'indice se poursuit de la même façon dans les années à venir.

a) Donner une estimation en milliards de francs CFA de l'indice annuel des dépenses de la compagnie en 2030.

b) En quelle année, l'indice annuel des dépenses de cette compagnie dépassera-t-il 300 milliards de francs CFA ?

EXERCICE 2

1- On considère dans l'ensemble ℂ des nombres complexes, l'équation :
$(E) : Z \in \mathbb{C}, \quad Z^4 + (-5+3i)Z^3 + (8-9i)Z^2 + (-14+6i)Z + 10 = 0$

a) Vérifier que 1 et i sont des solutions évidentes de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives *1, i, 1-3i et 3-i.*

a) Placer ces points dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

b_1) Déterminer l'écriture complexe de S.

b_2) Donner les éléments caractéristiques de S $(centre\ \Omega, rapport\ k\ et\ angle\ \alpha)$.

3- On considère la suite de points M_n d'affixe Z_n (n ∈ IN) avec $Z_0 = i$ et
$Z_{n+1} = -2iZ_n + 1 - i$.

a) Calculer $\frac{Z_{n+1}-\omega}{Z_n-\omega}$ où ω est l'affixe du centre Ω de la similitude S.
En déduire la nature du triangle $\Omega\, M_n\, M_{n+1}$

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par la relation : $U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison.

c) Exprimer en fonction de n la longueur $d_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ \dots\ M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$, (n ≥ 2).

PROBLÈME

Partie I

On considère la fonction g_k de la variable réelle x définie par : $g_k(x) = -2x + 1 + 2xln(kx)$, k étant un paramètre réel non nul.

1- Déterminer, suivant les valeurs prises par k, l'ensemble de définition E_k de g_k.

2- Calculer les limites de g_k aux bornes de E_k pour $k > 0$ et pour $k < 0$.

3- Calculer la dérivée g'_k de g_k.

4- Etablir le tableau de variations de g_k pour chaque cas.

5-a) Montrer que pour $k > 2$ et pour $x \in]0; +\infty[$, $g_k(x) > 0$.

b) Montrer que pour $k < 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution négative unique α_0 élément de l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{k}\right[$.

c) Montrer que pour $0 < k < 2$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives α_1 et α_2.

d) Etudier le signe de $g_2(x)$.

Partie II

Soit la fonction numérique f_k de la variable réelle x, définie par : $f_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{\ln(kx)}{2x-1}$, k étant un paramètre réel supérieur ou égal à 2 ; on désigne par (C_k), la représentation graphique de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : $1\ cm$.

1- Déterminer l'ensemble de définition D_k de la fonction f_k.

2-a) Montrer que la fonction f_2 admet un prolongement par continuité en $\frac{1}{2}$. On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$.

b) Calculer aux bornes de D_k les limites de f_k.

3-a) Calculer la fonction dérivée f'_k de f_k et établir une relation entre $f'_k(x)$ et $g_k(x)$ pour tout x de D_k.

b) Etudier le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variations pour $k = 2$ et pour $k \neq 2$.

4- Représenter (C_2) et (C_4) dans le même repère. Préciser les asymptotes à chacune de ces courbes.

Partie III

1-a) A l'aide de f_2, montrer que : $\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $0 < ln2x < 2x - 1$.

b) En déduire que : $\int_1^2 ln2xdx < 2$.

2- A l'aide du graphique de la Partie II, montrer que : $\frac{ln6}{5} < \frac{1}{2} - \int_2^3 f_2(x)dx < \frac{2ln2}{3}$. (utiliser la méthode des rectangles, on choisit 2 rectangles convenables).

BAC TOGO SERIE D SESSION 2016

EXERCICE 1

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \; ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \;\; et \;\; K = \int_0^1 (\sqrt{x^2+2})dx$$

1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$, où ln désigne le logarithme népérien.

a) Montrer que f est une primitive de la fonction, $x \to \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $[0; 1]$

b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

2-a) Sans calculer explicitement J et K, montrer que K = J + 2I.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que K = $\sqrt{3} - J$.

3- Déduire des questions précédentes, les valeurs exactes de J et K.

EXERCICE 2

Pour analyser le fonctionnement d'une machine, on note mois par mois, ses pannes et on remarque que :

- Sur un mois, la machine tombe au plus une fois en panne ;
- Si pendant le mois m la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une le mois suivant $m + 1$ est 0,24 ;
- Si la machine tombe en panne le mois m (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant $m + 1$ est 0,04 ;
- La probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par E_n l'événement « la machine tombe en panne le n-ième mois suivant sa mise en service ».
Si A est un événement, représentera son contraire.
On note P_n la probabilité de E_n (on a ainsi $P_1 = 0{,}1$).

1-a) Donner les valeurs numériques des probabilités de « E_{n+1} sachant E_n » et de «E_{n+1} sachant $\overline{E_n}$ ».

b) Exprimer les probabilités de «E_{n+1} et E_n » et de «E_{n+1} et $\overline{E_n}$ » en fonction de P_n.

c) Utiliser les questions précédentes pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :
$P_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2P_n$.

2-a) Résoudre l'équation : $P = 0{,}24 - 0{,}2P$.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $U_n = P_n - P$.
Calculer U_{n+1} en fonction de U_n.
En déduire les expressions de U_n et de P_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite.

PROBLÈME

Soit, pour tout entier naturel k non nul, la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_k(x) = x - k - \frac{k\ln x}{x}$.

La représentation graphique de f_k dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormal est notée (C_k)

Unité graphique : $2\ cm$.

Partie A

1- Soit pour tout entier naturel k, la fonction définie par : $g_k(x) = x^2 - k + k\ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g_k ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique notée α_k et que cette solution appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

2- Établir que, pour x élément de $]0; +\infty[$ l'intervalle, $f'_k(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$.

Étudier le signe de $g_k(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k.

3-a) Étudier les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = x - k$ est asymptote à la courbe (C_k).

c) Étudier la position de (C_k) par rapport à (D_k).

Partie B

Étude des cas particuliers $k = 1$ et $k = 2$.

1- α_k étant le nombre défini en **A-1**, montrer que : $\alpha_1 = 1$ et $1{,}2 < \alpha_2 < 1{,}3$.

2-a) Montrer que $f_2(\alpha_2) = 2\alpha_2 - 2 - \frac{2}{\alpha_2}$.

b) Utiliser l'encadrement de α_2 pour donner un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

3- Donner les tableaux de variation de f_1 et f_2.

4- Représenter dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2).

5. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1, x = 2$ et $y = x - 1$.

Partie C

1- Pour tout entier k non nul et pour tout réel x de $]0;\ +\infty[$, calculer $f_{k+1}(x) - f_k(x)$.
Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers .

2- Soit h la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{lnx}{x}$.

a) Étudier le sens de variation de h ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0; 1[$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $f_k(\beta) = \beta$.

3-a) A l'aide des résultats obtenus dans les questions **1** et **2** de cette partie **C**, établir que toutes les courbes (C_k) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

b) Pour $k \in IN^*$, préciser les positions relatives de (C_{k+1})et (C_k).

BAC TOGO SERIE D SESSION 2017

EXERCICE 1

1- On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A tout couple (x, y) de réels, on associe le point M de P de coordonnées x et y, en convenant que $2\ cm$ représentent 5 sur chaque axe.

Représenter dans P l'ensemble G des points $M(x, y)$ satisfaisant aux inéquations (Σ): $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$

On hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels les contraintes ne sont pas vérifiées.

2- Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilette.

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilette pour 200 F.

Une deuxième entreprise vend pour 400 F un lot B de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette.

a) Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots de A et y lots de B.

Exprimer en fonction de x et y la dépense en francs occasionnée par l'achat de x lots de A et y lots de B.

b) Justifier que (Σ) est le système de contraintes lié au renouvellement du linge.

c) Est-il possible de procéder aux achats nécessaires avec 5 000 F ? On justifiera la réponse.

d) Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, le nombre de lots A et B à acheter pour avoir une dépense minimale ? Quelle est cette dépense minimale ?

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2, b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

1-a) Calculer $\frac{a-b}{c-b}$ et en déduire que le triangle ABC est rectangle.

b) Déterminer l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

2- On note $(z_n)_{n\in IN}$, la suite de nombres complexes, de premier terme $z_0 = 0$ et A_n, le point d'affixe z_n telle que : $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$.

a) Déterminer les affixes des points A_3 et A_4, sachant que $A_1 = A$ et $A_2 = B$.

b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2], [A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c) Etablir que pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$ où $\omega = 1 + i\sqrt{3}$.

d) En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e) Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.

Déterminer l'affixe du point A_{2017}.

3-a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + lnx$.

1- Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2-a) Montrer qu'il existe un nombre réel unique α tel que : $g(\alpha) = 0$. Vérifier que : $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

b) En déduire selon les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

3- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{e^{-1}}^{1} g(x)dx$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + \frac{1+lnx}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ayant comme unité graphique $2\ cm$.

1-a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$, puis en donner une interprétation graphique.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite $(D) : y = -x + 1$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D).

2- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. *(On pourra utiliser la fonction g définie dans la partie A).*

3-a) Montrer que : $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

b) Montrer que la fonction $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;\ +\infty[$.

c) En déduire que : $f(\alpha) < h(0{,}65)$.

d) Montrer que : $f(\alpha) > f(0{,}65)$.

e) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 2×10^{-2} près.

4- Calculer les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D).

Donner une équation de cette tangente (T).

5- Tracer $(D), (T)\ et\ \ (C)$.

6- Soit k la restriction de f à $[\alpha;\ +\infty[$.

a) Montrer que k définit une bijection de $[\alpha;\ +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de la bijection k^{-1}. Justifier.

c) Donner le sens de variation de k^{-1} puis dresser son tableau de variation.

d) Calculer le nombre dérivé $(k^{-1})'(1)$.

e) Tracer la courbe $C_{k^{-1}}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.