LYCÉE DE SAPAGA		**Année-Scolaire** :2025-2026
Prof : M.TIORO		**Date** : 08/11/2025
Classe : Tle D		**Durée** : 3h00
		Coef :05

DEVOIR N°1 DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER TRIMESTRE

.

Exercice 1 *(4 points)*

Pour chacun des énoncés incomplets ci-dessous, des réponses sont proposées et une seule est juste. Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

1. La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ a pour dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction :
   a) $x \mapsto \cos(x^2)$ **b)** $x \mapsto 2x\cos(x^2)$ **c)** $x \mapsto -2x\cos(x^2)$
2. f étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(\cos x)$ est la fonction :
   a) $x \mapsto \sin x f'(\cos x)$ **b)** $x \mapsto -\sin x f'(\cos x)$ **c)** $x \mapsto -\sin x f'(\sin x)$
3. La dérivée sur $]1;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est la fonction .....
   a) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ **b)** $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$ **c)** $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
4. La limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ est :
   a- 1 **b-** $\frac{1}{2}$ **c-** 0 **d-** 2
5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{4 + \frac{2}{1+x^2}}$ est :
   a- 3 **b-** 2 **c-** 5 **d-** 0
6. La fonction $g(x) = x^3 + \sin x$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$:
   a- Vrai **b-** Faux
7. La fonction $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers :
   a- $[0;+\infty[$ **b-** $[0;2]$ **c-** $[0;1[$ **d-** $]0;+\infty[$
8. La dérivée nième de la fonction $x \longmapsto sinx$ est :
   a- $sin(x+n.\frac{\pi}{2})$ **b-** $sin(x+n.\frac{\pi}{3})$ **c-** $cos(x+n.\frac{\pi}{2})$

Problème *(11.5 points)*

Partie A

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+1} & \text{si } x \in]-\infty;2[\\ \sqrt{x^2-x-2} & \text{si } x \in [2;+\infty[\end{cases}$$

On appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

1. Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. (1 pt)
2. (a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f. Interpréter géométriquement le résultat de la limite de f en -1. (1.25 pt)

(b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. (0,5 pt)

3. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour $x \in]-\infty; 2[$ l'on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. (0,5 pt)

   (b) En déduire que (D') d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$. (0,5 pt)

4. Étudier la continuité de f en 2. (0,5 pt)

5. (a) Calculer $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ puis déduire la dérivabilité de f en 2. (1,5 pt)

   (b) Interpréter géométriquement les résultats précédents. (0,5 pt)

Partie B

1. (a) Étudier les variations de f sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 2[$ et sur $[2; +\infty[$ (1 pt)

   (b) Dresser le tableau de variation de f. (1,75 pt)

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. (0,5 pt)

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses. (0,5 pt)

4. Tracer (T), les asymptotes, les demi-tangentes au point d'abscisse en 2 et $(\mathcal{C})$. (1 pt)

Partie C

Soit la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$ et (Γ) sa représentation graphique.

1. Sans étudier la fonction g, tracer (Γ) à l'aide de $(\mathcal{C})$.
   Expliquer la construction. (0,5 pt)

2. Déterminer graphiquement le nombre de solutions sur D_g de l'équation $g(x) = m$ où m est un réel donné. (0,5 pt)

Situation complexe *(4 points)*

Lors d'une recherche pour le cours de géographie, les élèves d'une classe de Terminale D du Collège de l'avenir découvrent une ville d'Afrique créée en **1960**. La population de cette ville évolue selon une **fonction croissante** f telle que :

$$f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$$

où x est le **nombre d'années écoulées** depuis la fin de l'année **1960** et $f(x)$ est exprimée en **dizaines de milliers d'habitants**.

Un élève de la classe affirme que la population de cette ville ne pourra **jamais dépasser 600 000 habitants** mais certains élèves de la classe pensent le contraire. Une discussion s'engage entre eux.

En tant que major de ta classe en mathématiques, utilise tes connaissances mathématiques pour les **départager**.

Présentation : (0.5 pt)

BONNE INSPIRATION ! ! !