NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDES

Forme algébrique

Exercice 1

Détermine les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + i$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_5 = 3 + i\sqrt{3}$; $z_6 = 2i$; $z_7 = -3$

$z_8 = -4 + 4i$; $z_9 = -\sqrt{3} + 3i$; $z_{10} = 1 - i$; $z_{11} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_{12} = 2$; $z_{13} = 2 + 2i$; $z_{14} = 3 + 3i$

$z_{15} = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$; $z_{16} = \frac{x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2}{(x+1)^2 + (y-3)^2} + \frac{3x - y + 6}{(x+1)^2 + (y-3)^2}i.$

Exercice 2

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = 1 + i$.

Ecris sous forme algébrique : $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \times z_2$; z_1^2 ; $\frac{1}{z_2}$; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1 - 2z_2$; $\frac{z_2}{z_1 - z_2}$; $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$.

Exercice 3

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$a)\ z = (1+i)(1-2i)$; $b)\ z = \frac{1+i}{-1+i}$; $c)\ z = \frac{8}{-1+i\sqrt{3}}$; $d)\ z = \frac{1}{-\sqrt{3}+i}$; $e)\ z = (1+i)^2(3-2i)$ $f)\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

$g)\ z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$; $h)\ z = \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}{(1+i)^3}$; $i)\ z = (2-2i)^3\left(\sqrt{3}-i\right)^4$; $j)\ z = \left(\frac{1+i}{3+2i}\right)^2$; $k)\ z = (1-i)^3 \times i^{11}$.

$l)\ z = \frac{3+i}{2+5i}$; $m)\ z = \frac{i}{2+3i}$; $n)\ z = (1+i)^{10}$; $o)\ z = \frac{3i+2}{5+3i}(2-3i)$; $p)\ z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2i}$

$q)\ z = i^{2003}$; $r)\ z = i^{34}$; $s)\ z = i^{1984}$; $t)\ z = i^{2045}$; $u)\ z = i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28}$; $v)\ z = \sum_{k=0}^{2000} i^k$.

Nombre réel et imaginaire pur

Exercice 4

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par : $z = (x+2i)(1-xi)$.

1) Détermine l'écriture algébrique du nombre complexe z.

2) a) Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un nombre réel ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un imaginaire pur ?

Exercice 5

1) Montre que le nombre $z = \frac{2+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-i} + \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+i}$ est un nombre réel.

2) Montre que le nombre $z = \frac{2+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-i} - \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+i}$ est un imaginaire pur.

3) Démontre que si z_1 et z_2 ont pour module 1 alors le nombre complexe $\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2 + 1}$ est réel.

4) Démontre que si z_1 et z_2 ont pour module 1 alors le nombre complexe $\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 + 1}$ est un imaginaire pur.

Forme trigonométrie et exponentielle

Exercice 6

Détermine un angle α tel que :

1) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$; 5) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$; 7) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; 10) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

11) $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; 13) $\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -1 \end{cases}$; 14) $\begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$; 15) $\begin{cases} \cos\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$; 16) $\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \end{cases}$

Exercice 7

Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + i$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_5 = 3 + i\sqrt{3}$; $z_6 = 2i$; $z_7 = -3$

$z_8 = (-4+4i)^2$; $z_9 = \left(-\sqrt{3}+3i\right)^2$; $z_{10} = (1-i)\left(\sqrt{3}+i\right)$; $z_{11} = \frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^3}$; $z_{12} = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$.

Exercice 8

Complète le tableau suivant :

Formes algébriques de z	$2\sqrt{3} - 2i$		
Formes trigonométriques de z		$2\left[Cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$	
Formes exponentielles de z			$4e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

Exercice 9

Détermine la forme trigonométrique et exponentielle des nombres complexes suivants :

$a)\ z = -i$; $b)\ z = \sqrt{3}$; $c)\ z = \frac{1-i}{2}$; $d)\ z = 1 - i\sqrt{3}$; $e)\ z = 1 + i$

$f)\ z = -1 - i$; $g)\ z = -i$; $h)\ z = 1 + i\sqrt{3}$; $i)\ z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{2014}$; $j)\ z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3$

$k)\ z = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^6}{(5+5i)^4}$; $l)\ z = (1+i)(-2-2i)$; $m)\ z = \cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}$; $n)\ z = -i^3$

$o)\ z = (-1+i)^2(1+i)^{\ 2}$; $p)\ z = (1+i)^4\left(\sqrt{3}-i\right)^3$; $q)\ z = -7\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$r)\ z = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$; $s)\ z = (1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $t)\ z = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$; $u)\ z = (1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 10

Détermine le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$; $z_2 = -\cos\theta - i\sin\theta$; $z_3 = -\sin\theta + i\cos\theta$; $z_4 = -\sin\theta - i\cos\theta$; $z_5 = \sin\theta + i\cos\theta$

$z_6 = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$; $z_7 = \frac{1 - \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$ et $\theta \in [0;\pi[$; $z_8 = \left(\frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}\right)^n$; $z_9 = \frac{1}{1 + i\tan\theta}$ et $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

$z_{10} = 1 + i\tan\theta$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; $z_{11} = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta$ et $\theta \in]0;\pi]$; $z_{12} = 2\cos^2\theta + i\sin 2\theta$ et $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

$z_{13} = \frac{(1+i)(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\sqrt{3}+i)(\sin\theta - i\cos\theta)}$; $z_{14} = \frac{-\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{2(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)}$; $z_{15} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$

$z_{16} = 1 + i + (1-i)\tan\alpha$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; $z_{17} = \sin\alpha + i(1+\cos\alpha)$, $\alpha \in [0;\ \pi[$.

Exercice 11

α est un nombre réel élément de $]0;\pi[$. Détermine le module et un argument de $z_1 = 1 - e^{i\alpha}$ et $z_2 = 1 + e^{i\alpha}$.
En déduis le module et un argument de z_1, z_2, $\frac{z_1}{z_2}$ et $z_1 \times z_2$.

Exercice 12

On pose : $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calcule z^2 puis en déduis sa forme trigonométrique
2) En déduis la forme trigonométrique z.
3) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 13

On donne $A = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $B = -5\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

1) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $A, \overline{A}, B, \frac{1}{A}, A \times B, \frac{B}{A}$ et $\frac{A}{B^2}$.

2) Soit Z un nombre complexe tel que $AZ = B$.

a) Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et de $\sin\frac{13\pi}{12}$.

c) Calcule $(Z)^{2008}$.

Exercice 14

On pose : $z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$

1) Met sous forme trigonométrique z, z' et $Z = \frac{z}{z'}$.

2) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2$.

b) Place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 15

On considère le nombre complexe : $z = \left(\sqrt{3}+1\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)$

1) Ecris z^2 sous forme algébrique.

2) Détermine le module et un argument de z^2. En déduis le module et un argument de z.

3) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\sin x = \sqrt{2}$ et place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Trigonométrie

Exercice 16

Linéarise les expressions suivantes :

$\sin^4 x$; $\cos^4 x$; $\sin^6 x$; $\cos^6 x$; $\sin^2 x.\cos x$; $\sin^3 x.\cos^2 x$; $\sin x.\cos^3 x$; $\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)$; $\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$.

$\sin^5 x$; $\cos^5 x$; $\sin^4 x$; $\cos^3 2x$; $\sin^3 x + \cos^2 x$; $\sin 3x.\cos^2 2x$; $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Exercice 17

Exprime en fonction de $\cos x$ et $\sin x$: $\sin 3x$; $\cos 3x$; $\cos 4x$; $\sin 4x$; $\sin 5x$; ; $\cos 5x$; $\cos 6x$; $\sin 6x$.

Ensemble des points

Exercice 18

Détermine puis construis :

1) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes z tels que : $|z - i| = 2$

2) L'ensemble (λ) des points M d'affixes z tels que : $|z + 1 - 2i| = |z - 1 - i|$

3) L'ensemble (φ) des points M d'affixes z tels que : $arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4) L'ensemble (ω) des points M d'affixes z tels que : $arg(3\bar{z} - 1 + i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5) L'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que : $arg\left(\frac{z+2i}{z+1-3i}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6) L'ensemble (F) des points M d'affixes z tels que : $|\bar{z} + 1 + 2i| \leq 1$

7) L'ensemble (H) des points M d'affixes z tels que : $\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 6$

8) L'ensemble (G) des points M d'affixes z tels que : $|iz - 1| = |-z + 2 - i|$

9) L'ensemble (R) des points M d'affixes z tels que : $|2iz + 2 + i| = 3$

10) L'ensemble (I) des points M d'affixes z tels que : $arg(iz - 1 + 2i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

11) L'ensemble (K) des points M d'affixes z tels que : $z + \bar{z} = |z|^2 + 1$

12) L'ensemble (S) des points M d'affixes z tels que : $arg(\frac{z}{1+i}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

13) L'ensemble (O) des points M d'affixes z tels que : $1 \leq |z + 1| \leq 2$.

Exercice 19

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de $2i$ et soit $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.

Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

1) $|Z| = 1$.
2) Z est un imaginaire pur.
3) Z est un réel.
4) Z est un argument égale à $\frac{\pi}{2}$.
5) Z est un réel strictement positif.

Figures géométries

Exercice 20

A// Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : -2 ; $-3i$ et $2 - 6i$.
Démontre que ces trois points sont alignés.

B// Soient A, B, C, D et E trois point points d'affixes respectives : $1 - 3i$; 3 ; $2i$; $1 - i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} + i$.
1) Détermine l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$.
2) Détermine les distances AB, BD et EC.

C// Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$ et $2 - 2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B et C.
2) Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.
3) Détermine l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme.

D// Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $-1 + i\sqrt{3}$; 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B et C.
2) Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

E// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2 + i$; $2 - i$; $5 - 2i$ et $5 + 2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

F// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-1 + 2i$; $4 + 3i$; $3i$ et $4 - 3i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

G// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2 - 2i$; $-1 + 7i$; $4 + 2i$ et $-4 - 2i$ et Ω le point d'affixe $-1 + 2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C, D et Ω.
2) Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre Ω et le rayon 5.

H// Soient A, B, C et D trois points d'affixes respectives : $-3 - i$; $-2 + 4i$; $3 - i$ et -2..
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires (vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux).

I// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $5 + i$; -2 ; $1 + i$ et $-4 - 2i$.
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles (vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires).

K// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $1 + i$; $-2i$; $3 + i$ et $4 + 2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre que le quadrilatère ABCD est un losange.

L// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $3i$; $-2 + i$; $1 - 2i$ et 3.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

M// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-5 - i$; $-3 - 3i$; $-1 - i$ et $-3 + i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre le quadrilatère ABCD est un carré.

N// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2i$; 1 ; $3 + i$ et $4 + 4i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.

O// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-1 + 3i$; -2 ; $-1 - i$ et $-2 + 2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

P// Soient A, B et C trois point points d'affixes respectives : $1 - 3i$; $4 + 5i$ et $-3 + 2i$.
1) Détermine l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Détermine l'affixe des points D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$
3) Démontre que A, D et E sont alignés.

Les symétriques

Exercice 21

On considère les points A d'affixe $3+i$ et I d'affixe 1.

1) On note B le symétrique de A par rapport au point O, détermine l'affixe de B.

2) On note C le symétrique de A par rapport au point I, détermine l'affixe de C.

2) On note D le symétrique de A par rapport à (OJ), détermine l'affixe de D.

3) On note E le symétrique de A par rapport au point (OI), détermine l'affixe de E.

Racines carrées

Exercice 22

Détermine les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de chacun des nombres complexes suivants :

$45+28i$; $-5+12i$; $8-6i$; $120-22i$; $-2i$; $8i$; $46-14\sqrt{3}i$; -3 ; $6+6i\sqrt{3}$; $-7-24i$.

Résolution d'équations et systèmes

Exercice 23

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)$ $2iz-3=z+i$; $b)$ $\frac{Z-1}{iZ+3}=4i$; $c)$ $3z-5+2iz=2i-3z+4iz$; $d)$ $(z+4)(6-2i)=(3+2i)z$

$e)$ $-i(1+5i)z+(z-1)(i-2)-2=3z-i$; $f)$ $6+2i-4iz=3z+2$; $g)$ $2z-3+4i=5+i$

Exercice 24

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)$ $iz-3=2\overline{z}$; $b)$ $3\overline{z}-2iz=2-3i$; $c)$ $(3z+i)(\overline{z}+1+2i)=0$; $d)$ $3z^2+z.\overline{z}-6i\sqrt{2}=0$

$e)$ $z-2+i+\overline{z+\imath-1}=0$; $f)$ $z^2-\overline{z}+1=0$; $g)$ $iz^2-2\overline{z}-i=0$; $h)$ $iz^2-2\overline{z}+2-i=0$

Exercice 25

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)$ $z^2+2i=0$; $b)$ $z^2-4(1+i)z+10i=0$; $c)$ $z^2-3z+3-i=0$; $d)$ $z^2+\sqrt{3}z+1=0$

$e)$ $z^2-(2+6i)z-16+12i=0$; $f)$ $z^2+2=0$; $g)$ $z^2-4=0$; $h)$ $z+\frac{1}{z}=1$; $h)$ $z+\frac{1}{z}=1+\sqrt{3}i$

$i)$ $z^2=-3+4i$; $j)$ $z^2-2z\cos\theta+1=0$; $k)$ $z^2+(2-3i)z-6i=0$; $l)$ $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2-6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)+13=0$

$m)$ $z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$; $n)$ $(1+i)z^2-(5+i)z+6+4i=0$; $o)$ $z^2=i$

$p)$ $z^2-(\sqrt{3}+i)z+1+i\sqrt{3}=0$; $q)$ $iz^2-2(\sin\theta+i)z+2\sin\theta=0$; $r)$ $z^2-4\sin\theta z+4=0$

$s)$ $z^2-(2+mi)z+2+m(-1+i)=0$; $t)$ $iz^2-(1-5i)z+6i=0$; $u)$ $z^2=-7-24i$.

Exercice 26

1) Calcule $(1+8i)^2$.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2+i)z^2-(9+2i)z+5(3-i)=0$.

Exercice 27

Montre que chacune des équations ci-dessous admet une solution réelle et termine sa résolution.

1) $z^3+(-4+i)z^2+3z+8-i=0$.

2) $z^3-(3+2i)z^2+(1+4i)z+1-2i=0$.

3) $8z^3-8(1+i)z^2+6iz+1-i=0$.

4) $z^3-(3+2i)z^2+(1+5i)z+2-2i=0$.

5) $z^3-(6+i\sqrt{3})z^2+(11+4i\sqrt{3})z-6-3i\sqrt{3}=0$ (admet 2 solutions).

Exercice 28

Montre que chacune des équations ci-dessous admet une solution imaginaire pure et termine sa résolution.

1) $z^3-2iz^2+4(1+i)z+16+16i=0$.

2) $z^3+(1-i)z^2+(2+2i)z-8i=0$.

3) $z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=0$.

4) $z^3-(2+i\sqrt{2})z^2+2(1+i\sqrt{2})z-2i\sqrt{2}=0$.

5) $z^3-(2+3i)z^2+2(5+3i)z-20=0$ (admet 2 solutions imaginaires pures).

Exercice 29

Vérifie que $P(\alpha) = 0$ et termine la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

1) $P(z) = z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i$ et $\alpha = -2 + i$.

2) $P(z) = z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i$ et $\alpha = 3 - 2i$.

3) $P(z) = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4$ et $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

4) $P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$ et $\alpha = -1 - 2i$.

5) $P(z) = z^3 + (3 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3}$ et $\alpha = \sqrt{3} - 1$.

Exercice 30

Soit $P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$

1) Vérifie que $P(1) = 0$.

2) En déduis une factorisation de $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.

3) En utilisant la première question, résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 31

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)$ $z^3 = 1$; $b)$ $z^3 = 8i$; $c)$ $z^3 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$; $d)$ $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2 = 0$.

Exercice 32

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)$ $z^4 - (5 - 14\,i)z^2 - (24 + 10i) = 0$; $b)$ $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$; $c)$ $2z^4 - 5z^2 - 12 = 0$; $d)$ $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 33

Soit $P(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 20$

1) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 2i)(az^2 + bz + c)$.

2) Résous l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 34

Soit $P(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 - 3z + 1$.

1) Soit α un complexe quelconque. Montre que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.

2) En déduis que si $P(\alpha) = 0$ alors $P(\bar{\alpha}) = P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

3) a) Calcule $P(1 + i)$.

b) En déduis la résolution de l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 35

Soit $P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$

1) Détermine les nombres réels a et b tels que : $P(z) = z^2\left[\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z - \frac{1}{z}\right) + b\right]$.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 36

Soit $P(z) = z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z - 4$

1) Calcule $P(2)$ et $P(-2)$.

2) Montre que $P(z)$ peut s'écrire comme produit de deux polynômes du second degré dont l'un est $z^2 - 4$.

3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 37

Résous dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

$a)$ $\begin{cases} z_1 \times z_2 = 9 \\ z_1 + z_2 = 3 \end{cases}$; $b)$ $\begin{cases} (2 + 3i)z - 5z' = -1 \\ (1 - i)z + 2z' = 2(1 + i) \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} ix - 3y = 2 - 3i \\ (1 + i)x + 2iy = 5 - i \end{cases}$; $g)$ $\begin{cases} ix - 3y = 2 - 3i \\ (1 + i)x + 2iy = 5 - i \end{cases}$

$d)\begin{cases}2z_1\times z_2=3\\ \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$; $e)\begin{cases}(2+i)x+7y=1+2i\\ (1-i)\bar{x}-i\bar{y}=4-i\end{cases}$; $f)\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i\\ (4+2i)x-(2+3i)y=5+4i)\end{cases}$

Exercice 38

Résous dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants :

$a)\begin{cases}x-y+iz=0\\ x+y-z=0\\ (1+i)x-2y=2z-2i\end{cases}$; $b)\begin{cases}x+yi-2z=10\\ x-y+2i\,z=20\\ ix+3iy-(1+i)z=30\end{cases}$; $c)\begin{cases}z_1+z_2+z_3=1\\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=1\\ z_1z_2z_3=1\end{cases}$

Racine n^ièmes d'un nombre complexe et d'unité

Exercice 39

Détermine dans $\mathbb{C}$ **:**

1) Les racines cubiques de 1 ; 8 ; $8i$; $4\sqrt{3}-4i$; $4\sqrt{2}(-1+i)$; $-27i$; $18+26i$.

2) Les racines quatrièmes de 1 ; $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $8\sqrt{2}(1-i)$; $1+4i\sqrt{5}$; $3+4i$; $8\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

3) Les racines cinquièmes de 1 et i.

4) Les racines sixièmes de 1 et $4\sqrt{2}(-1+i)$.

Exercice 40

z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E): $z^4=-7+4i\sqrt{2}$.

1) Vérifie que $u=\sqrt{2}+i$ est une solution de (E).

2) Détermine sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduis dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

Exercice 41

1) Résous dans $\mathbb{C}$, $z^3=1$

2) a) Développe $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^3$

b) Soit l'équation (E): $z^3=4\sqrt{2}(-1-i)$.

En posant $u=\frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, détermine sous forme algébrique et trigonométrie les racines de l'équation (E).

c) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 42

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)\ z^6-(1-i)z^3-i=0$; $b)\ z^6-\sqrt{2}z^3+1=0$; $c)\ z^6-9iz^3+18-26\,i=0$ (On calculera $(2+i)^2$ et $(1-i)^2$)

Similitudes

Exercice 43

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-1-i$; i ; $1+3i$ et $5+i$.

Détermine dans chaque cas, l'écriture complexe de la similitude directe f donnée :

1) f transforme O en A et B en C.

2) f transforme A en C et B en D.

3) f admet un centre A et transforme C en D.

4) f laisse invariant le point C et transforme A en B.

Exercice 44

Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe (S) dont l'écriture complexe est :

$z'=(1+i)z+1-i$; $z'=(1-i)z+i$; $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2i\sqrt{3}$; $z'=-iz+2+6i$.

Exercice 45

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-i$; $2i$ et $3-i$.

1) Détermine l'affixe du point I, l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2+4i$.

2) Détermine l'affixe du point D, l'image du point C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Détermine l'affixe du point E, l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4) Détermine l'affixe du point F, l'image du point E par l'homothétie de centre B et rapport 2.

5) Détermine l'affixe du point G, l'image du point F par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 46

Pour chacune des transformations f, donne la nature et les éléments caractéristiques :

1) f d'écriture complexe $z' = -3z + 1 - i$; 2) f d'écriture complexe $z' = z + 1 - 2i$

3) f d'écriture complexe $z' = e^{-\frac{\pi}{4}i}z + 1 + \sqrt{2} - i$; 4) f d'écriture complexe $z' = iz + 1$

5) f d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 + i$; 6) f d'écriture complexe $z' = e^{\frac{2\pi}{3}i}z$

7) f d'écriture complexe $z' = \overline{z} - 4i$; 8) f d'écriture complexe $z' = -z - 2i$.

9) f d'écriture complexe $z' = i\overline{z} + 1$; 10) f d'écriture complexe $z' = (1 + i)\overline{z} + i$.

Exercice 47

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $4i$; $2 + 2i$ et $3 + 3i$.

Soit S la similitude directe transformant O en B et A en C.

1) Détermine le rapport k et l'angle θ de S

2) Détermine l'écriture complexe f associée à S.

3) Détermine l'affixe de Ω le centre de S.

Exercice 48

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2i$; $z_B = 2 + i$ et $z_C = 1 - i$.

Soit S la similitude directe de centre C, d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

1) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + 1 + i$.

2) Soient D et E deux points du plan tels que $S(D) = A$ et $S(B) = E$.
Détermine les affixes des points D et E.

Exercice 49

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$.

1) Détermine l'écriture complexe de f.

2) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

3) Détermine la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}.

Exercice 50

Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = 3iz - 1 - 7i$.

1) a) Justifie que S est une similitude directe et précise ses éléments caractéristiques.
b) Détermine l'expression analytique de S.

2) Détermine une équation de l'image par S de la droite (BC), B et C étant les points d'affixes respectives 2 et $3 - i$.

3) Détermine une équation de $(\mathcal{C}')$, image du cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

Exercice 51

Détermine l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1) f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 3i$.

2) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. (avec $z_A = 3 + i$ et $z_B = 2i$)

3) f est la translation qui transforme A d'affixe $2 - i$ en B d'affixe $1 - 3i$.

4) f est l'homothétie de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + \sqrt{3}i$ en B d'affixe $-1 + i$.

5) f est l'homothétie de centre A d'affixe $2 + 2i$ et de rapport -3.

6) f est l'homothétie de centre O et de rapport 2.

7) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$.

8) f est la rotation de centre C d'affixe $2+i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
9) f est la rotation de centre J et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. (Le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$).
10) f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
11) f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1-i$ en B d'affixe $-i$.
12) f est la similitude directe plane de centre $A(1;-1)$, de rapport 3 et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.
13) f est la similitude directe plane de centre A d'affixe i, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
14) f est la similitude directe plane de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
15) f est la similitude directe plane de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, transformant A en B. (avec $z_A=3$ et $z_B=2i$)
16) f est la similitude indirecte plane de centre $A(1;2)$, d'axe $(D): 2x-y=0$ et de rapport 3.

Exercices de perfectionnement

Exercice 52

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-3z+3-i=0$.
2) Soit $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+5i)z-2-6i$.
   a) Vérifie que $P(2i)=0$.
   b) En déduis une factorisation de P(z) sous la forme $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.
   c) En utilisant la première question, résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.
3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives
   $z_A=2i$; $z_B=2+i$; $z_C=1-i$
   a) Place les points A, B et C dans le repère. (Unité graphique : 2cm)
   b) Écris le nombre complexe $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ sous forme trigonométrique.
   c) Déduis de la question 3-b) que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.
4) Soit S la similitude directe de centre C, d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
   Démontre que l'écriture complexe de S est : $z'=(1-i)z+1+i$.
5) Soient D et E deux points du plan tels que S(D) = A et S(B) = E.
   a) Détermine les affixes des points D et E.
   b) Construis les points D et E puis démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

Exercice 53

1) Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$
   a) Calcule $P(-1)$.
   b) Détermine les réels a et b tels que pour tout nombre z, on ait : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (unité : 2cm) .On désigne par A,B,C et G les points du plan d'affixes respectives : $z_A=-1$, $z_B=2+\sqrt{3}i$, $z_C=2-i\sqrt{3}$, $z_G=3$.
   a) Réalise une figure et place les points A, B, C et G.
   b) Calcule les distances AB, AC et BC puis en déduis la nature du triangle ABC.
   c) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC

Exercice 54

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.
1) Résous l'équation : $z\in\mathbb{C}, z^2+(1-3i)z-4=0$.
2) On pose : $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=z^3+(1-i)z^2+(2+2i)z-8i$.
   a) Justifie que : $P(-2i)=0$.
   b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$.
   c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation : $z\in\mathbb{C}, P(z)=0$.
3) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-2i$; $-2+2i$ et $1+i$.
   On note D le symétrique de A par rapport au point O.
   a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.
c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 55

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 4(2+4i)$
1) Calcule $P(2i)$. Que peut-on conclure ?
2) Détermine les réels complexes a, b et c tels que pour tout nombre z, on ait : $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$.
3) a) Calcule $(1+3i)^2$
b) En déduis la résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$.
4) On désigne par A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2i, z_B = 3+i, z_C = 2-2i$.
a) Place les points A, B et C.
b) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduis la nature du triangle ABC.
c) Soit D un point d'affixe z_D telle que $z_D - z_C = z_A - z_B$.
Détermine z_D puis place sur la figure précédente. En déduis la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 56

1) Soit $P(z)$ le polynôme complexe défini par : $P(z) = z^3 + (4-2i)z^2 + (8-6i)z + 8 - 4i$
a) Calcule $P(-1-i)$.
b) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$
c) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -1 + 3i$; $z_B = -2$ et $z_C = -1 - i$ (unité graphique : 2 cm)
On considère la rotation r de centre Ω d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
a) Place les points A, B et C.
b) Détermine l'écriture complexe de r.
c) Démontre que le point B est l'image du point A par la rotation r.
d) Soit D l'antécédent du point C par la rotation r. Détermine l'affixe de D et place D dans le repère.
3) a) Montre que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
b) Montre que ADBC est un trapèze isocèle.

Exercice 57

On considère l'équation (E) : $z^3 + (-6-4i)z^2 + (12+21i)z + 9 - 45i = 0$
1) a) Détermine la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E).
b) Achève la résolution de (E).
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = 3i$; $z_B = 3 + 3i$ et $z_C = 3 - 2i$
a) Place les points A, B et C dans le repère.
b) Calcule $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduis la nature de ABC.
3) soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
a) Détermine l'écriture complexe de f.
b) Détermine les éléments caractéristiques de f.

Exercice 58

Soit a un nombre réel quelconque. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :
$z^3 - (ai + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai = 0$.
1) Détermine le réel a pour que $-2i$ soit une solution de (E).
2) Détermine le polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que :
$z \in \mathbb{C}, z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = Q(z).(z - \sqrt{3} - i)$
3) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) pour $a = -2$.
4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -2i$ et $z_C = \sqrt{3} - i$
a) Place les points A, B et C.
b) Détermine le module et l'argument de des nombres complexes z_A et z_C.
c) D désigne le symétrique de A par rapport à (OJ). Montre que le triangle CDA est rectangle en A.

d) Montre que les points ACBD sont cocyclique.

Exercice 59

Soit $P(z)$ le polynôme complexe défini par : $P(z) = z^3 - 5(1+i)z^2 - 2(1-9i)z + 16 - 8i$

1) Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. On désignera par z_1 et z_2 les solutions telles que $\mathrm{Im}(z_1)<\mathrm{Im}(z_2)$.
3) le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) : unité : 1cm.
   a) Place les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_0 et $\overline{z}_2$ où z_1 désigne le conjugué de $\overline{z}_2$.
   b) Calcule $\frac{\overline{z}_2 - z_1}{z_0 - z_1}$.
   c) En déduis la nature du triangle ABC.
4) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z' tels que M' soit l'image de M par la translation.
   a) Exprime z' en fonction de z.
   b) Calcule l'affixe du point D image du point C par t.
   c) Donne la nature exacte du quadrilatère ABCD. Justifie.

Exercice 60

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - 8i = 0$. (Donner le résultat sous forme algébrique)
   b) Développe, réduis et ordonne $P(z) = \left(z - \sqrt{3} + i\right)(z^3 - 8i)$
   c) En déduis les solutions de l'équation : (E) : $z \in \mathbb{C}, z^4 + \left(-\sqrt{3} + i\right)z^3 - 8iz + 8\left(1 + i\sqrt{3}\right) = 0$.
2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$ et $-2i$.
a) Détermine le module et un argument de z_A, z_B et z_C.
   b) Place les points A, B et C.
   c) Justifie que le triangle ABC est équilatéral.
3) Soit Ω le milieu du segment $[AC]$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme A en B.
   a) Détermine les éléments caractéristiques de S.
   b) Détermine l'écriture complexe de S.
4) Soit E le point d'affixe $z_E = 2\sqrt{3}$.
   a) Détermine l'affixe z_D du point D tel que $S(E) = D$.
   b) Démontre que le quadrilatère BDAC est un losange.

Exercice 61

Soit $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$.
2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :
   $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z}_C$
   a) Place les points A, B, C et D.
   b) Quelle est la nature de triangle ACD ?
   c) Montre que les points A, B, C et D appartiennent à même cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon. Donne une équation de $(\mathcal{C})$.
4) On note E le symétrique de C par rapport à O.
   Précise l'affixe de E et détermine la nature du triangle BED.

Exercice 62

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1) Détermine deux nombres réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20)$.
2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3) Place dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i, n = -2 - 4i, p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$.
4) a) Détermine le nombre complexe z vérifiant $\frac{z - p}{z - m} = i$. Place son image K.
   b) En déduis que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.
4) a) Détermine par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.
   b) Détermine l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.
   c) Montre que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Exercice 63

1) On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par : $P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$.
   a) Calcule $P(i)$ et $P(-i)$.
   b) Montre qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}, P(z) = (z^2+1)Q(z)$.
2) Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.
3) Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm).
   a) Place dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
   $z_A = i,\ z_B = -i,\ z_C = -\sqrt{3} + 2i$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2i$.
   b) Montre que ces quatre points appartiennent au cercle de diamètre [CD].
4) Montre qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D.
   Calcule une valeur entière approchée à un degré près d'une mesure de l'angle de cette rotation.
5) Calcule sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.
   Interprète géométriquement le module et l'argument de ce rapport.

Exercice 64

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z + 20$, où z est un nombre complexe.
1) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + az + b)$.
2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3) Place dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les images A, B, C et D des nombres complexes respectifs
   $z_A = -2 + 4i,\ z_B = -2 - 4i,\ z_C = 2 + 3i$ et $z_D = 2 - 3i$. Fais une figure.
4) Soit S la similitude directe qui transforme A en A et C en B.
   a) Détermine l'écriture complexe de S.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
   a) Détermine l'image du point B par S.

Exercice 65

1) Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante : $z^4 + (i - \sqrt{3})z^3 - iz + 1 + i\sqrt{3} = 0$.
   a) Développe, réduis et ordonne le polynôme : $p(z) = (z - \sqrt{3} + i)(z^3 - i)$.
   b) Résous (E).
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives :
   $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_C = -i$.
   a) Place les points A, B et C.
   b) Justifie que le triangle ABC est équilatéral.
3) Soit Ω le milieu de $[AC]$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme A en B.
   a) Détermine l'écriture complexe de S.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
   a) Démontre que l'image du point O par S est le point C.

Exercice 66

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A;\ \vec{u};\ \vec{v})$, unité graphique 1cm.
On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que ABCD soit un carré.
1) Fais une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2) Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe z_E de E. Construis E.
3) Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1.
4) On considère la similitude directe $\mathcal{s}$ qui transforme A en E et B en F.
   a) Exprime z' en fonction de z où z' est l'affixe du point M' image de M par $\mathcal{s}$.
   b) Détermine le centre Ω, l'angle θ et le rapport k de la similitude $\mathcal{s}$.
   c) Détermine les images de C et D par $\mathcal{s}$.
   d) Calcule l'aire de l'image par $\mathcal{s}$ du rectangle ABCD.

Exercice 67

1) Soit l'équation $(E) : z^2 - 6z + 12 = 0$ où z est l'inconnue complexe.
   a) Montre que (E) admet deux solutions complexes conjuguées u et $\overline{u}$, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.
   b) Calcule le module et un argument de u. En déduis le module et un argument de $\overline{u}$.

c) Ecris $u-4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

d) Calcule le module et un argument de $\frac{u}{u-4}$. En déduis le module et un argument de $\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3$; $z_B = 2+2i$ et $z_C = 7i$.

a) Construis le triangle ABC.

b) Calcule les distances AB et BC.

c) Ecris le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique.

d) Déduis des questions a) et b) la nature du triangle ABC.

Exercice 68

1) On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$

a) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que $z^3 + 8 = (z+2)(az^2 + bz + c)$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E). (on donnera les solutions sous forme $x+iy$)

c) Ecris ces solutions sous forme de $re^{i\theta}$, où r est un réel positif.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -2$; $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 + i\sqrt{3}$; le point D milieu de [OB] et la rotation $\mathcal{R}$ de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Place les points A, B et C.

b) Montre que $\mathcal{R}(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$, $\mathcal{R}(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ et $\mathcal{R}(\mathrm{C}) = \mathrm{A}$. En déduis le triangle ABC est équilatéral.

c) On considère le point L défini par $\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$. Détermine son affixe z_L.

Détermine un argument de $\frac{z_L}{z_D}$. En déduis que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ et au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$.

d) Montre que L est sur le cercle de diamètre [AO].

Exercice 69

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 8 = 0$.

2) On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$..

a) Ecris z_A et z_C sous la forme trigonométrique.

b) Place les points A, B et C.

c) Détermine la nature du triangle ABC.

3) On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} z$.

a) Caractérise géométriquement l'application f.

b) Détermine les images des points A et C par f.

En déduis l'image de la droite (AC) par f.

Exercice 70

1) Pour tout nombre Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.

a) Factorise $P(Z)$.

b) En déduis les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$.

c) Déduis de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

2) a) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (l'unité graphique est 5 cm).

Place les points A, B et C d'affixes respectives : $a = -2$, $b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ et $c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

b. Démontre que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3) Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.

Exprime sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{a-c}{d-c}$.

En déduis le rapport $\frac{CA}{CD}$. Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Exercice 71

1) a) Montre que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - 1 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

c) Déduis des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2) a) Ecris $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

b) En déduis les arguments des solutions de (E).

3) Déduis des questions 1) c) et 2) b) les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 72

On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1) Donne une écriture trigonométrique de z_0.

2) Montre que : $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

3) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 1$.

4) En déduis les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$.

5) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm, place les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1 - i\sqrt{3}$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$; $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.

6) Donne une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

7) Vérifie que : $r(A) = C$; $r(C) = B$ et $r(B) = D$.

8) En déduis que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 73

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$,des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Montre que $(1+i)^6 = -8i$.

2) On considère l'équation $(E) : z^2 = -8i$.

a) Déduis de 1) une solution de l'équation (E).

b) L'équation (E) possède une autre solution, écris cette solution sous forme algébrique.

3) Déduis également de 1) une solution de l'équation $(E') : z^3 = -8i$.

4) On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Détermine l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b) Montre que b et c sont solutions de (E').

5) a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm). Représente les points A, B et C.

b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c) Détermine le centre de gravité de cette figure.

Exercice 74

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i, -i$, z et z' avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$

1) Exprime les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles $(x\,;\,y)$ de M.

2) Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel.

b) z' soit imaginaire pur.

3) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifie que $ZZ' = -3 + 4i$. Puis calcule $|ZZ'|$.

4) a) Détermine l'ensemble des ponts M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

b) Détermine r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Exercice 75

A//Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

1) Montre que $-i$ est solution de (E).

2) Détermine les nombres réels a, b, c tels que : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2+bz+c)$

3) Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

B// On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i$; $4-i$; $-i$

1) Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2) Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$z' = iz - 2i + 2$. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r. Calcule l'affixe **s** de S.

3) Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Trace ce cercle.

4) A tout point d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' : $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$

a) Détermine les affixes des points A′, B′, C′ associés respectivement aux points A, B, C.

b) Vérifie que A′, B′, C′ appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. Détermine son rayon et tracer $\mathcal{C}'$.

c) Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, Exprimer $|z' - i|$ en fonction de z.

d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontre que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$

e) En déduis à quel ensemble appartiennent les points M′ associés aux points M..

Exercice 76

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$.

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1 + 3i$, $z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3-3i}{2}$.

Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distinct de z_A associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

1) Résous, dans ℂ, l'équation : $z^2 - 3iz - 2 = 0$.

2) Détermine les affixes des points invariants par f.

3) Détermine l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

4) En posant $z = x + iy$, détermine $\mathrm{Im}(z')$ en fonction de x et y.
Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.

5) a) Montre que pour tout $z \neq -1 + 3i$, on ait l'équivalence : $\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2}$.

b) Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure.

Exercice 77

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, de point image M, on pose : $f(z) = (iz - 2)(\bar{z} - 1)$.

1) Calcule $f(3 - 2i)$ sous forme algébrique.

2) Résous dans ℂ, l'équation $f(z) = 0$.

3) Montre que $f(z) = (-2x + y + 2) + i(x^2 - x + y^2 + 2y)$.

4) Prouve que l'équation $f(z) = 2$ possède deux solutions que l'on donnera sous forme algébrique.

5) a) Détermine l'ensemble (Φ) des points M tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

b) Détermine l'ensemble (Ψ) des points M tels que $f(z)$ soit un réel. (On donnera ses éléments caractéristiques)

c) Construis les ensembles (Φ) et (Ψ).

d) Justifie que les points images des solutions de l'équation $f(z) = 0$ appartiennent aux ensembles (Φ) et (Ψ).

e) Détermine l'ensemble (Π) des points M tels que $f(z)$ soit un réel strictement positif.

f) Représente (Π).

6) Soit A le point d'affixe $z_A = -2i$. Démontrer que $|f(z)| = AM \times IM$.

Exercice 78

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm).

On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3 + 2i$.

On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = \frac{z - 1 + 2i}{z - 1}$.

1) Calcule les affixes des points O′ et B′ images respectives des points O et B par f.
Place les points A, O′, B et B′ dans le plan.

2) a) Calcule pour tout complexe z différent de 1, le produit $(z' - 1)(z - 1)$.

b) En déduis que pour tout point M distinct de A, on a : $AM \times AM' = 2$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3) Démontre que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C').
En précise le centre et le rayon.
Construire (C) et (C').

4) a) Détermine l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$.

b) Démontre que si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

5) On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (d).
Place son image P' sur la figure.

Exercice 79

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm.
Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2, associe $Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1) Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprime la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
   On vérifiera que $\mathcal{R}(Z) = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.
   En déduis la nature de :
   a) l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel;
   b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   c) Représente ces deux ensembles.
2) On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.
   En remarquant que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouve les ensembles E et F par une méthode géométrique.
3) Calcule $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et en déduis que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

Exercice 80

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i.

À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1) a) Calcule l'affixe du point C′ associé au point C d'affixe $-i$.
   b) Place les points A, B et C.
2) Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.
   a) Montre l'égalité : $z' = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\,\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}$.
   b) Détermine l'ensemble E des points M d'affixe z telle que z' soit réel.
   c) Détermine l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $Re(z')$ soit négatif ou nul.
3) a) Écris le nombre complexe $(1 - i)$ sous forme trigonométrique.
   b) Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B.
      Montre que : $\frac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R}^*$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
   c) En déduis l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
   d) Détermine l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Exercice 81

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f, du plan (P) dans lui-même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z′ tel que : $z' = \frac{iz}{z+1}$

1) Détermine l'affixe des points M tels que $M' = M$.
2) Démontre que pour tout point M distinct de A et de O, on a : $OM' = \frac{OM}{AM}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près.
3) a) Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$. Place dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA].
   b) Calcule sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f.
      Etablis que B′ appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1.
      Place le point B' et tracer le cercle (C) dans le repère.
   c) En utilisant la question 2, démontre que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle (C).
   d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct. En s'aidant des résultats de la question 2, construis, à la règle et au compas, l'image du point C par f (On laissera apparents les traits de construction).
4) Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M′ par f appartient à l'axe des abscisses.
   Les questions a) et b) peuvent être traitées de façon indépendante.
   a) On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.
      Démontre que la partie imaginaire de z′ est égale à : $Im(z') = \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$.

En déduis la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le trace dans le repère.

b) A l'aide de la question 2, retrouve géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

Exercice 82

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z $(z \neq -1)$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-iz-2}{z+1}$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1) Soit C' l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2) Calcule l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.

3) Pour tout nombre complexe z différent de -1, on note p le module de $z+1$ (c'est-à-dire $|z+1| = p$) et p' le module de $z' + i$ (c'est-à-dire $|z'+i| = p'$).

a) Démontre que pour tout nombre complexe z différent de -1, on a : $pp' = \sqrt{5}$.

b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montre qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon.

4) Pour tout nombre complexe z différent de -1, on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z-2i}{z+1}$.

a) Interprète géométriquement l'argument du nombre complexe ω.

b) Montre que $z' = -i\omega$.

c) Détermine l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.

d) Vérifie que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).

5) Représente les ensembles (Γ), (F) et (Γ') en prenant 4 cm pour unité graphique.

Exercice 83

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = i$, $z_C = -1+i$, $z_D = 1+i$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1) Soit la fonction f de $\mathcal{P} - \{B\}$ dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où $z' = i\frac{z-2i}{z-i}$.

a) Développe $(z+1-i)(z-1-i)$.

b) Cherche les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprime leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2) a) Montre que, pour tout z différent de i, $|z'| = \frac{AM}{BM}$; et que, pour tout z différent de i et de $2i$, $\arg(z') = \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

b) Détermine et construis (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

c) Détermine et construis l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

3) a) Démontre que $z' - i = \frac{1}{z-1}$ et en déduis que $|z'-i| \times |z-i| = 1$, pour tout complexe z différent de i.

b) Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$.

Prouve que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

Exercice 84

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (Unité graphique : 2 cm.)

1) a) Résous l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

b) On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Détermine le module et l'argument de z_1 et z_2, place M et N sur la figure.

c) Détermine les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$.

Place P et Q sur la figure.

Montre que MNPQ est un carré.

2) Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$. Place ces points sur la figure.

Calcule les affixes de R et de S. Montre que S appartient au segment [MN].

3) On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

a) Montre que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

b) Exprime les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de α.

c) Montre que $|Z| = |Z'|$ et que $\frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
d) Déduis des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 85

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue z complexe (E) :
$(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$.

1) Soit z une solution de (E).
   a) Montre que $|1+iz| = |1-iz|$.
   b) En déduis que z est un réel.

2) a) Exprime $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
   b) Soit z un nombre réel, on pose $z = \tan\varphi$ où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
   Ecris l'équation portant sur φ traduisant (E) et le résoudre.
   c) Détermine les solutions z_1 ; z_2 et z_3 de (E).

Exercice 86

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm).
On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et -2. Le point K est le milieu du segment $[IA]$.
On appelle (C) le cercle de diamètre $[IA]$. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1) Soit B le point d'affixe $b = \frac{1+4i}{1-2i}$. Écris b sous forme algébrique et montre que B appartient au cercle (C).
2) Soit D le point du cercle (C) tel que l'angle $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KD}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où k est un entier relatif et soit d l'affixe de D.
   a) Quel est le module de $d + \frac{1}{2}$? Donne un argument de $d + \frac{1}{2}$.
   b) En déduis que $d = \frac{1}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{4}$.
   c) Détermine un réel a vérifiant l'égalité $\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{4}$.
3) Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \frac{1+2ix}{1-ix}$. On pose $Z = \frac{m-1}{m+2}$.
   Calcule Z et en déduire la nature du triangle AIM.
4) Soit N un point, différent de A du cercle (C) et n son affixe.
   Démontre qu'il existe un réel y tel que $n = \frac{1+2iy}{1-iy}$.

Exercice 87

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ (unité graphique: 5cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}, \alpha \in [0; 2\pi[$.
   On considère l'application f qui à tout point M de (C), associe $f(M) = MA \times MB$.
   a) Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.
   b) Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.
   c) En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.
3) a) En utilisant 2) c), montre qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.
   b) En utilisant 2) c), montre qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

ARITHMÉTIQUE

Démonstration par récurrence

Exercice 1

Démontre par récurrence les propositions suivantes :

1) $\forall\, n \geq 5\,, on\ a :\ 2^n > 5(n+1)$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a :\ 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

4) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, on\ a :\ 1 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

5) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, on\ a : 2 \times 6 \times 10 \times \ldots\ldots. \times (4n-2) = (n+1)(n+2)\ldots.. \times 2n$

7) $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, on\ a :\ n! \geq 2^{n-1}$.

8) $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, on\ a :\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

9) $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, on\ a :\ 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

10) $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1$.

11) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Diviseurs

Exercice 2

1) La division de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

2) Détermine les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

3) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b.
Sachant que $a + b + c = 3025$ et $q = 50$. Rétablis la division.

4) Trouve les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calcule l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

Exercice 3

Résous dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :

$a)\ x^3 - y^3 = 469$; $b)\ x^3 - y^3 = 631$; $c)\ x^2 - y^2 = 13$; $d)\ x^2 - y^2 = 28$; $e)\ 9y^2 - (x+1)^2 = 32$
$f)\ x^2 - y^2 = 35$; $g)\ 4x^2 - y^2 = 20$; $h)\ x^2 - 49 = y^2$; $i)\ x^2(y-1) = 3$; $j)\ 2x^3 + xy - 11 = 0$

Exercice 4

α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N.

1) Prouve que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

2) En déduis les valeurs de N.

Exercice 5

1) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n^2+3n+1}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

3) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n+17}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $\frac{n+16}{n-2}$ est-il un entier naturel ?

5) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $\frac{2n+18}{n+3}$ est-il un entier naturel ?

Congruences

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$a)\ 2x \equiv 3[7]$; $b)\ 9x \equiv 4[11]$; $c)\ 3x \equiv 1[5]$; $d)\ 5x \equiv 2[7]$; $e)\ x^2 \equiv -1[5]$; $f)\ 4x \equiv 5[9]$

$g)\ x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$; $h)\ 15x \equiv 9[12]$; $i)\ 2x + 1 \equiv 5[9]$; $j)\ 424 + 161x \equiv 0[16]$; $k)\ 34x \equiv 2[15]$

$l)\ 3x \equiv 7[9]$; $m)\ 4x \equiv 2[5]$; $n)\ 2x \equiv 6[8]$; $o)\ 14x \equiv 3[4]$; $p)\ 11x \equiv 79[8]$; $q)\ 15x \equiv 25[35]$

Exercice 7
Démontre par congruence les propositions suivantes :
1) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
2) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
3) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ n^3 - n$ est un multiple de 3.
4) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ n^7 - n$ est un multiple de 7.
5) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.
6) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 8^{2002} + 2$ est divisible par 11.
7) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111.
8) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5.
9) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.
10) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 8
A// Résous dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$a)\ \begin{cases} x \equiv 7[8] \\ x \equiv 11[12] \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$; $d)\ \begin{cases} 15x \equiv 9[12] \\ 4x \equiv 5[7] \end{cases}$; $e)\ \begin{cases} x \equiv 3[11] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$; $f)\ \begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$

$g)\ \begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$; $h)\ \begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$; $i)\ \begin{cases} x \equiv 1[6] \\ x \equiv 5[9] \end{cases}$; $j)\ \begin{cases} 7x \equiv 5[19] \\ 3x \equiv 1[11] \end{cases}$; $k)\ \begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 7x \equiv 9[11] \end{cases}$; $l)\ \begin{cases} x \equiv -1[34] \\ x \equiv 1[15] \end{cases}$.

B// Résous dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :
$a)\ \begin{cases} 7x + 5y \equiv 2[8] \\ 5x + 4y \equiv 16[8] \end{cases}$ et $b)\ \begin{cases} 7x + 5y \equiv 2[9] \\ 5x + 4y \equiv 16[9] \end{cases}$

Reste de la division

Exercice 9
Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de :
$a)\ 11^n$ par 7 ; $b)\ 4^n$ par 7 ; $c)\ 5^n$ par 11 ; $d)\ 3^n$ par 11 ; $e)\ 3^n$ par 7 ; $f)\ 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7.

Exercice 10
Détermine le reste de la division euclidienne de :
$a)\ 200^{539}$ par 17 ; $b)\ 2^{437}$ par 7 ; $c)\ 7^{2002} + 2$ par 9 ; $d)\ 11^{1999}$ par 7 ; $e)\ 2^{456}$ par 5 ;
$f)\ 32064512$ par 9 ; $g)\ \overline{2103211}^4$ par 7 ; $h)\ 9998887776665554443332221111$ par 7.

Exercice 11
Soient a et b deux entiers relatif vérifiant $a \equiv 4[5]$ et $b \equiv 3[5]$.
Détermine le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5.

PGCD et PPCM

Exercice 12
Dans chacun des cas suivants, vérifie si les nombres a et b sont premiers entre eux :
1) $a = 122$ et $b = 32$; 2) $a = 85631$ et $b = 111$; 3) $a = 712379$ et $b = 1551$; 4) $a = 96777$ et $b = 45777$.

Exercice 13
Dans chacun des cas suivants, détermine le PGCD et le PPCM des réels a et b.
1) $a = 24$ et $b = 33$; 2) $a = 48$ et $b = 46$; 3) $a = 1455$ et $b = 335$ 4) $a = 17787$, $b = 689$ et $c = 297$

Exercice 14
d et m désignent respectivement le PGDC et le PPCM des entiers a et b.
Détermine l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels vérifiant les conditions données ci-dessous :

1) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 801 \\ m = 120 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} d = 7 \\ m = 84 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a + b = 60 \\ d = 12 \end{cases}$ 5) $m^2 + 16d^2 = 16660$

6) $m^2 - 127d^2 = 612$ 7) $\begin{cases} m = 168 \\ ab = 1008 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} a + b = 35 \\ m = 216d \end{cases}$ 10) $2m + 5d = 123$

11) $\begin{cases} a+b &= 135 \\ m &= 504 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} d = 9 \\ ab = 972 \end{cases}$ 13) $3m - 2d = 30$ 14) $\begin{cases} m+d = 126 \\ 5 < d < 10 \end{cases}$ 15) $m + d = y + 9$

Exercice 15

1) Détermine les entiers naturels n tels que : $a)$ $PPCM(n\,;6) = 96$ et $b)$ $PPCM(72\,;\,n) = 216$.

2) Détermine l'entier naturel n tel que : $\begin{cases} 600 < n < 1100 \\ PGCD(n\,;630) = 105 \end{cases}$.

Exercice 16

1) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{12n+1}{30n+2}$ est irréductible.

2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $\frac{n+16}{n-2}$ est-il irréductible ?

3) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $\frac{2n+18}{n+3}$ est-il irréductible ?

Exercice 17

Soit n un entier naturel non nul. On pose $A = n + 3$ et $B = 3n + 4$.

1) Montre que tout diviseur commun de A et B est un diviseur de 5.

2) Pour quelles valeurs de n le PGCD de A et B est-il égal à 5 ?

Exercice 18

Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110 cm de longueur sur 88 cm de largueur. Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possible, de façon à ne pas avoir des pertes.

1) Détermine la longueur du coté de carré qui convient.

2) Détermine le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.

Exercice 19

On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

1) La distance comprise entre deux arbres.

2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

Exercice 20

Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement $119m$ et $91m$; les deux autres cotés mesurent $56m$ et $35m$. Pour la clôture, le propriétaire M. KONAN a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

1) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques ?

2) Détermine le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

Exercice 21

Deux voitures A et B démarrent en même temps d'une même ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1) Détermine un autre moment (autre que le départ) où les deux voitures se croisent sur la ligne de départ.

2) Précise le nombre de tours effectués par chaque voiture.

Equations diophantiennes

Exercice 22

Résous dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$a)$ $11x - 7y = 1$; $b)$ $6x - 3y = 5$; $c)$ $x + 3y = 2$; $d)$ $3x - 5y = 6$; $e)$ $35x - 27y = 2$

$f)$ $3x - 7y = 23$; $g)$ $34x - 15y = 0$; $h)$ $2x - 3y = 3$; $i)$ $22x - 18y = -2$; $j)$ $23x + 7y = 1$

Exercice 23

Un général décide de compter ses soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 16 ; il reste 3 soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 25 ; il reste 5 soldats. Sachant que la troupe est constituée de moins de 400 soldats.

Détermine le nombre de soldats.

Système de numération

Exercice 24

1) Ecris dans le système décimal les nombres : $\overline{432}^5$; $\overline{F0A3}^{16}$; $\overline{10110011100011110000}^2$.

2) Ecris dans le système binaire les nombres : $\overline{127}^{10}$; 2021 ; $\overline{DA00DA}^{16}$.

3) Ecris dans le système de base 8 les nombres : $\overline{BABA}^{16}$; $\overline{F0A3}^{16}$; $\overline{10110011100011110000}^2$.

4) Ecris dans le système binaire le nombre : $\overline{21210}^4$ sans passer par le système décimal.

5) Ecris dans le système de base 5 le nombre : $\overline{729}^{10}$.

Exercice 25

On considère l'entier naturel N qui s'écrit $\overline{53x4}^8$

Détermine x tel que :

1) N soit divisible par 7.
2) N soit divisible par 6.
3) En déduis la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.
4) On prend $x = 2$. Détermine l'écriture décimale de A. Quel est le nombre de diviseurs de A ?
   Trouve le plus petit nombre entier naturel non nul par le quel il faut multiplier A pour que le produit soit un carré parfait.

Exercice 26

Soit x un entier naturel $x \geq 5$ on considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base $(x + 1)$.

1) Ecris n et n' dans le système de base x.
2) Ecris $n + n'$ dans le système de base x et vérifier que $n + n'$ est divisible par $(x + 1)$ puis donne le quotient q de cette division en base x.
3) Détermine les entiers a et b tels que : $q = \overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x$.

Exercice 27

Dans le système de numération de base trois, un nombre s'écrit : $\overline{21013}^3$.

1) Dans quel système de numération n ce nombre s'écrit : $\overline{224}^n$?
2) Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$.
3) Soit a un entier naturel strictement supérieur à 2. On considère les nombres $\mathrm{N} = 2(a - 1)$ et $\mathrm{N'} = (a - 1)^2$.
   Ecris N et N' dans le système de base a.
4) Démontre que dans tout système de numération de base b (avec $b \geq 4$) le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier x.

Exercice 28

1) Un nombre s'écrit $\overline{x2x31}$ dans le système décimal. Détermine x pour qu'il soit divisible par 11.
2) Un nombre s'écrit $\overline{x3y1x}$ dans le système décimal. Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 35.
3) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimal. Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.
4) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11.
5) Soit N en entier naturel tel que $N = \overline{a0b}^5$ et $N = \overline{bac}^7$. Détermine les entiers a, b et c.
6) a) Trouve trois entiers naturels a, b et c différents de 1, premiers entre eux deux à deux et tels que : $a \times b \times c = 495$.
   b) x, y, z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix.
      Détermine tous les triplets (x, y, z) pour les quelles A soit divisible par 495.

Exercice 29

1) Trouve dans le système décimal un entier $N = abcd$ divisible par 45 et tels que le couple $(b\,; c)$soit solution de l'équation : $x^2 - y^2 = 24$.
2) Un entier naturel s'écrit $xy7$ dans le système décimal et $y00x$ dans le système à base 8.
   a) Sachant que $x = y = 4$. Détermine x et y.
   b) Ecris ce nombre en système décimal, binaire, octal, décimal et hexa décimal.

Exercice 30

Effectue les opérations suivantes : $\overline{101101}^2 + \overline{10011}^2$; $\overline{10110101}^2 - \overline{11011}^2$; $\overline{1010}^2 \times \overline{110}^2$; $\overline{2357}^8 - \overline{263}^8$
$\overline{9654}^{16} - \overline{5321}^{16}$; $\overline{974B}^{16} - \overline{587C}^{16}$; $\overline{FACE}^{16} + \overline{8B7}^{16}$; $\overline{94}^{16} \times \overline{12}^{16}$; $\overline{ABC}^{16} \times \overline{23}^{16}$; $\overline{477}^8 + \overline{342}^8$

Les classes modulo n

Exercice 31

1) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $\dot{3}x^2 - x + \dot{4} = \dot{0}$
2) Résous dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$
3) Résous dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$
4) Résous dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$
5) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$
6) Résous dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ et dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y = \dot{3} \\ \dot{2}x + y = \dot{5} \end{cases}$
7) Résous dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$

Exercices de perfectionnent

Exercice 32

1) On appelle diviseur strict d'un entier naturel n tout diviseur de n positif et autre que lui-même.
   Détermine les diviseurs stricts de 220.
2) On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre. Vérifie que : 220 et 284 sont amiables ; 17296 et 18416 sont amiables.
3) On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (c.-à-d. amiable avec lui-même).
   a) Le nombre 28 est-il parfait ?
   b) Détermine un nombre premier p tel que 2^4p soit un nombre parfait.
   c) Soit n et p deux entiers naturels, tel que p est premier.
      Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que 2^np soit parfait ?
      Dresse la liste des nombres parfaits de cette forme, pour $n < 10$.

Exercice 33

Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres *x, y, z, t* et *h* dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

■ Le 1er chiffre est pair ;
■ La somme des deux premiers chiffres est 15;
■ Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème);
■ Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième;
■ Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ?

Exercice 34

I// 1) Démontre qu'il existe un couple $(a\,;\,b)$ d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$.
  2) Soit l'équation (E) : $(a\,;\,b) \in \mathbb{Z}^2,\ 45x - 16y = 2$.
    a) Vérifie que $(10\,;\,28)$ est solution de particulière (E).
    b) Résous (E).

II// Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.
Le navire A accoste tous les 90 jours et B tous les 32 jours.
Le navire A accoste un jour J_o au port et quatre jours plus tard, B accoste au port à son tour.
On note J_1 le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

1) Soit u et v le nombre d'entrées au port effectuées respectivement par A et B entre J_o et J_1 (J_o non compris).
   Démontre que le couple $(u\,;\,v)$ est une solution de (E).
2) Détermine le couple $(u\,;\,v)$.
3) Calcule le nombre de jours qui s'écoulent entre J_o et J_1 (J_o non compris).

Exercice 35

1) Montre que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
2) On considère l'équation (E): $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Vérifie en utilisant par exemple la question 1) que 87 et 31 sont premiers entre eux.
      En déduis un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution (x_0, y_0) de (E).
   b) Détermine l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c) *Application :* Détermine les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
Indication : On remarquera que le point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x\,; -y)$ vérifie l'équation (E).

Exercice 36

1) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation (E) : $5y + 8x = 1$.

2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 1 + 8a \\ N = 2 + 5b \end{cases}$

a) Prouve que le couple $(a\,; -b)$ est solution de (E).

b) Détermine le reste de la division euclidienne de N par 40.

3) a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation $5y + 8x = 100$.

b) Au VIII*e* siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 37

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard (J_0 + 6), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (u ; v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2) a) Détermine un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) : $35x - 27y = 1$.

b) En déduis une solution particulière $(u_0\,;\ v_0)$ de (E_1).

c) Détermine toutes les solutions de l'équation (E_1).

d) Détermine la solution (u ; v) permettant de déterminer J_1.

3) a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b) le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile).

c) Si l'astronome manque ce futur rendez – vous, combien de jours devra – t – il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice 39

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne le point $A(12\,; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O, \vec{\imath})$ et par C un point de l'axe $(O, \vec{\jmath})$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1) Démontre que le couple (x, y) est solution de l'équation (E): $2x + 3y = 78$.

2) On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnés des entiers relatifs.

a) Montre que l'on est ramené à l'équation (E) avec x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

b) A partir de la définition de B et de C, trouve une solution particulièrement $(x_0\,;\ y_0)$ de (E), avec x_0 et $y_0 \in \mathbb{Z}$.

c) Démontre qu'un couple (x, y) est solution de (E) et seulement s'il est de la forme $(12 + 3k, 18 - 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

d) Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des entiers relatifs tels que :
$-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$?

Exercice 40

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

1) On considère l'équation $(E) : (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 1$.

a) Soit $(x; y)$ un couple solution de (E). Démontre que $2x \equiv 1[7]$.

b) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x \equiv 1[7]$.

c) En déduis que l'ensemble des solutions de (E) est $\{(4 + 7k\,; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$.

2) Résous l'équation $(E') : (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 200$.

3) L'AMAD est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes.
Les cotisations sont de 900 F CFA pour les hommes et de 700 F CFA pour les femmes.
Pour sa fête annuelle, le parrain de l'AMAD désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes.
Malheureusement, il ne connait pas le nombre d'hommes et de femmes de cette association.
Cependant sait que les cotisations de tous les membres s'élèvent à 20000 F CFA.
Détermine le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

Exercice 41

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1) Détermine un couple $(\alpha\,;\,\beta)$ d'entiers relatifs solution de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$.
2) En déduis un couple $(u_0\,;\,v_0)$ solution de l'équation $(E)\;:\;23u - 7v = -6$. Résoudre complètement l'équation (E).
3) Démontre que x est solution de l'équation (S) si et seulement si il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$. En déduis l'ensemble des solutions de (S).
4) Détermine la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

Exercice 42

I/ On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions $525\ m$ et $285\ m$.
Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :
1) La distance comprise entre deux arbres.
2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

II/ On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.
1) Vérifie que le couple $(-7\,;-3)$ est une solution de (E).
2) Résous alors l'équation (E).
3) En déduis le couple d'entiers relatifs $(p,\ q)$ solution de (E) tel que : $0 \leq p \leq 25$.

Exercice 43

1) On considère l'équation $(E_1)\,:\,(x;y) \in \mathbb{Z}^2, 11x + 8y = 79$.
   a) Soit $(x;y)$ un couple solution de (E_1). Démontre que $y \equiv 3[11]$.
   b) Résous alors l'équation (E_1).
2) On considère l'équation $(E_2)\,:\,(x;y) \in \mathbb{Z}^2, 3y + 11z = 372$.
   a) Soit $(y;z)$ un couple solution de (E_2). Démontre que $z \equiv 0[3]$.
   b) Résous alors l'équation (E_2).
3) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_3) : $3x - 8z = -249$.
4) Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 72000 F.
   Le prix d'une pièce du 1^er^ lot est 7200 F; le prix d'une pièce du 2^ème^ lot est 5400 F et le prix d'une pièce du 3^ème^ lot est 600 F.
   Détermine le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice 44

On considère l'équation (E) définie par : $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2, 35x - 27y = 2$.
1) a) Utilise l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de 35 et 27.
   b) En déduis une solution de l'équation (E') : $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2, 35x - 27y = 1$.
2) a) Vérifie que $(-20\,;\,-26)$ est solution de (E).
   b) Démontre que les solutions de (E) sont les couples $(x,\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant :
      $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3) Les habitants d'un village adorent deux génies N'Gouan et Moayé. Le génie N'Gouan est adoré tous les 140 jours et le génie Moayé tous les 108 jours. Les jours où les cultes coïncident sont appelés jours de grâce. Un matin, le village a adoré le génie Moayé. Détermine le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré Le génie N'Gouan 8 jours auparavant.

Exercice 45

En un temps T_0 un athlète A_1, étant à son 2^ème^ tour pénétrait dans le champ visuel de la caméra d'arrivée d'un marathon de tour du quartier. Six (6) minutes plus tard, avant que A_1 n'échappe à la caméra un autre athlète A_2 étant à son 1^er^ tour y fait son entrée. Des investigations sportives ont affirmé que A_1 fait le tour du quartier en 32 minutes tandis que A_2 le fait en 58 minutes. On se propose de déterminer le nouveau temps T_1 auquel A_1 et A_2 réapparaitront ensemble dans le champ de la camera. Pour cela on note n_1 le nombre de tours effectués par A_1 et n_2 celui effectués par A_2 entre T_0 et T_1.
1) Vérifie que $(n_1\,;\,n_2)$ est solution de l'équation (E) : $16x - 29y = 3$.
2) a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
   b) En déduis les valeurs de n_1 et n_2 permettant de déterminer T_1.
3) a) Détermine le nombre de minutes s'écoulant entre T_0 et T_1.
   b) Sachant que T_0 était 8h00, détermine le temps T_1 en heures et minutes.
4) A cause d'une panne électrique, la camera manque le spectacle simultané de T_1. Combien de minutes doit-on attendre

pour un nouveau spectacle simultané en un autre temps T_2 ? Evalue ces minutes en heures.

Exercice 46

1) On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) : $91x + 10y = 1$.
   a) Enonce un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
   b) Détermine une solution particulière de (E) et en déduis une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
   c) Résous (E').
2) Montre que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.
3) On considère l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3296$.
   a) Détermine les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation (E'').
   b) Montre que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Détermine-le.

Exercice 47

1) a) Détermine, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n.
   En déduis le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.
   b) Donne le système de numération décimale, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.
   Détermine x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.
2) a) Détermine le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525.
   b) Détermine l'ensemble des entiers x tels que $34x \equiv 2[15]$.
   c) Résous l'équation : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2\,;21590x\ + 9525y = 1270$
   d) Quel est le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{1980} écrit dans le système décimal ?

Exercice 48

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}^7$
1) Détermine x pour que :
   a) A soit divisible par six.
   b) A soit divisible par cinq.
   c) En déduis qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.
2) On donne à x une valeur zéro. Détermine l'écriture décimale de A.
   Dans ce cas quel est le nombre de diviseurs positifs de A ?
   Quel est l'ensemble des diviseurs positifs qui sont premier avec trois ?

Exercice 49

N et M sont deux nombres tels que : $\mathrm{N} = \overline{1a3a}^4\ et\ \mathrm{M} = \overline{bca35}^7$.
1) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n les reste de la division de 6^n par 11.
2) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $7x + y = 46$.
3) Sachant que N est divisible par 11 et que le couple $(b\,;c)$ est solution de $7x + y = 46$.
   Donne les écritures en base 4 de N et en base de 7 de M.
4) Détermine l'entier naturel n tel que $\mathrm{M}^n \equiv 3[5]$.
5) a) Ecris dans le système décimal N et M.
   b) Résous dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnue a et b : $\begin{cases} \mathrm{PPCM}(a\,;b) = \mathrm{M} - \mathrm{N} \\ \mathrm{PGCD}(a\,;b) = 5\mathrm{N} + 14 \end{cases}$.

Exercice 50

Dans un système de numération de base a, on considère les nombres : $A = 211$; $B = 312$ et $C = 133032$.
1) Explique pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.
2) a) Sachant que $C = A \times B$; montre que : $a^2 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. En déduis que a divise 8.
   b) Détermine alors a.
3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrit ce nombre en base 4
4) Dans cette question, on suppose que $a = 4$.
   a) Ecris A, B et C dans le système décimal
   b) Montre alors que : $C = A \times B = PPCM(A; B)$.
   En déduis que l'équation $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
5) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$.
   Vérifie que $(19; -13)$ est une solution de l'équation. Résous cette équation.

Exercice 51

Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 119m et 91m; les deux autres cotés mesurent 56m et 35m.

Pour la clôture, le propriétaire M. KONTE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

1) a) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques?
   b) Détermine le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.
2) Selon le type de clôture et la qualité de fil de fer choisi, M. KONTE a dépensé $\overline{\alpha 1630}^{11}$ F CFA (où α = 10) pour un nombre entier x rangées de fil de fer et $\overline{53008}^{9}$ F CFA pour un nombre entier y de jours de mains d'œuvre.
   Après évaluation M. KONTE s'est rendu compte que le coût total des travaux était de $\overline{656\alpha 5}^{13}$ F CFA et le nombre de rangées de clôture dépassait le nombre de jours de travail.
   a) Exprime tous les montants dans le système décimal.
   b) Précise le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre.

Exercice 52

Deux commerçantes Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5 F l'unité.
Awa dit à Fanta, j'ai en poche n F et Fanta lui répond moi aussi j'ai en poche m F. Les entiers n et m s'écrivent respectivement comme suit : $n = \overline{1x00y2}^{8}$ et $m = \overline{x1y003}^{7}$

1) Détermine les chiffres x et y sachant que chacune d'eux puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.
2) Détermine le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduis le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.
3) a) Décompose n et m en produit de facteurs premiers.
   b) En déduis le PGCD et le PPCM de n et m.
4) Résous dans ℤ l'équation : $nu + mv = 5$ où n et m sont deux entiers relatifs.

Exercice 53

1) Résoudre dans ℝ² le système d'inconnues p et q suivant : $\begin{cases} 52p + 89q = 15103 \\ 15p + 22q = 3993 \end{cases}$.
2) En Novembre 2011, Mr DEMBELE a profité de la crise pour payer x kgs de bananes et y sacs de goyaves à, seulement $\overline{284\alpha\beta}^{13}$ FCFA (avec $= 10$ et $\beta = 11$) dans le champ d'un cultivateur désespéré. A la même date en 2012, le cultivateur n'ayant pas connu de disette, Mr DEMBELE, pour avoir le même nombre de kg de bananes et le même nombre de sacs de goyaves fut contraint de dépenser $\overline{69000}^{11}$ FCFA en raison de $\overline{567}^{8}$ FCFA le kg de bananes et $\overline{202101}^{3}$ FCFA le sac de goyaves. Les statistiques locales ont montré que la disette avait occasionné une baisse de $\overline{223}^{7}$ FCFA sur le kg de bananes et une baisse de $\overline{1221}^{4}$ FCFA sur le sac de goyaves. Détermine :
   a) Tous les montants donnés dans le système de numération décimale.
   b) Le nombre x de kgs de bananes et le nombre y de sacs de goyaves payés par Mr DEMBELE.
   c) $(x + y)$ et $(3y - 2x)$ en base 12. Effectue dans cette base le produit $(x + y)(3y - 2x)$.

Exercice 54

1) a) Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
   b) En déduis que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2) Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3) p étant un entier naturel, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   a) Si $p = 3n$, quel est reste de la division de A_p par 7 ?
   b) Démontre que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
   c) Etudie le cas où $p = 3n + 2$.
4) On considère les nombres : $a = \overline{1001001000}^{2}$ et $b = \overline{1000100010000}^{2}$.
   a) Vérifie que ces deux nombres sont de la forme A_p.
   b) a et b sont-ils divisible par 7 ?

Exercice 55

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5.
On considère les nombres $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1) Montre que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
   On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

2) a) Etablis une relation entre α et β indépendante de n.
b) Démontre que d est un diviseur de 5.
c) Démontre que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.
3) Montre que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.
4) a) Détermine suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.
b) Vérifie les résultats obtenus dans les cas particuliers $n=11$ et $n=12$.

Exercice 56

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.
On pose $A=n^2-2n+2$ et $B=n^2+2n-2$ et $d=pgcd(A,B)$
1) a) Démontre que tout diviseur commun à A et n divise 2.
b) Démontre que tout diviseur commun à A et B divise $4n$.
2) On suppose que n est impair.
a) Démontre que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
b) Démontre que d divise n. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
3) On suppose que n est pair.
a) Démontre que 4 ne divise pas A.
b) Démontre que d est égal à $2p$ où p est un nombre entier impair.
c) Démontre que p divise n. En déduire que d est égal à 2.
4) Déduis de ce qui précède que 197 et 257 sont premier entre eux.

Exercice 57

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $\mathrm{N}=9n+1$ et $\mathrm{M}=9n-1$.
1) On suppose que n est un entier pair. On pose $n=2p$, avec p entier naturel non nul.
a) Montre que M et N sont des entiers impairs.
b) En remarquant que $\mathrm{N}=\mathrm{M}+2$, détermine le PGCD de M et N.
2) On suppose que n est un entier impair. On pose $n=2p+1$, avec p entier naturel.
a) Montre que M et N sont des entiers pairs.
b) En remarquant que $\mathrm{N}=\mathrm{M}+2$, déterminer le PGCD de M et N.
3) Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2-1$.
a) Exprime l'entier $81n^2-1$ en fonction des entiers M et N.
b) Démontre que si n est pair alors $81n^2-1$ est impair.
c) Démontre que $81n^2-1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

Exercice 58

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose $a=4n+3$ et $b=5n+2$. On note d le PGCD de a et b.
1) Donne la valeur de d dans les cas suivants : $n=1, n=11, n=15$.
2) Calcule $5a-4b$ et en déduis les valeurs possibles de d.
3) a) Détermine les entiers naturels n et k tels que $4n+3=7k$.
b) Détermine les entiers naturels n et k' tels que $5n+2=7k'$.
4) Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
Déduis des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7. Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Exercice 59

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n.
Par exemple $\mathcal{D}_{10}\cap\mathbb{N}=\{1;2;5;10\}$ donc $S(10)=1+2+5+10=18$.
1) Calcule $S(n)$ pour les valeurs suivantes : 4; 5; 17 et 21.
2) a) Pour p entier naturel premier, prouve que $S(p)=p+1$.
b) Démontre par récurrence sur α que si p est un entier naturel premier alors : $S(p^\alpha)=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$; $\alpha\in\mathbb{N}^*$.
On remarquera que : $S(p^{\alpha+1})=S(p^\alpha)+p^{\alpha+1}$.
3) En déduis : $S(2^5)$; $S(2187)$ et $S(343)$.

Exercice 60

1) On considère l'équation (1) d'inconnue $(x;y)$ de $\mathbb{Z}^2$: $11x-24y=1$.
a) Justifie à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, détermine une solution particulière de (1).

2) Recherche du PGCD de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

a) Justifie que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

$(x\,;y)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1), montre que l'on peut écrire : $(10^{11x}-1)-10(10^{24y}-1)=9$.

c) Montre que $10^{11}-1$ divise $10^{11x}-1$. (On rappelle que : $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots\ldots+1)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$).

d) Déduis de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$.

e) Montre que $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$ divise 9.

f) Déduis des questions précédentes le PGCD de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

Exercice 61

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres : $a_n=4.10^n-1$, $b_n=2.10^n-1$ et $c_n=2.10^n+1$.

1) a) Calcule $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2$ et c_3.

b) Montre que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montre que b_3 est premier.

d) Montre que pour tout entier naturel non nul n, $b_n\times c_n=a_{2n}$.

En déduis la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e) Montre que PGCD $(b_n,c_n)=$ PGCD $(b_n,2)$. En déduis que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation : (1) $b_3x+c_3y=1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a) Justifie que (1) possède au moins une solution.

b) Applique l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3; en déduis une solution particulière de (1).

c) Résous l'équation (1).

Exercice 62

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0=1$, $y_0=8$ et $\begin{cases} x_{n+1}=\frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1 \\ y_{n+1}=\frac{20}{3}x_n+\frac{8}{3}y_n+5 \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$.

1) Montre par récurrence que les points M_n de coordonnées (x_n,y_n) sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x-y+3=0$. En déduis que $x_{n+1}=4x_n+2$.

2) Montre par récurrence que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduis que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3) Montre que :

a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 alors ils sont premiers entre eux.

4) a) Montre par récurrence que $x_n=\frac{1}{3}(4^n\times 5-2)$.

b) En déduis que $4^n\times 5-2$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

Exercice 63

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x<y$.

S est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que PGCD$(x;y)=y-x$.

1) a) Calcule le PGCD$(363;\ 484)$.

b) Le couple $(363;\ 484)$ appartient-il à S ?

2) Soit n un entier naturel non nul le couple $(n\,;n+1)$ appartient-il à S ? Justifie votre réponse.

3) a) Montre que $(x\,;\,y)$ appartient à S si et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que $x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$.

b) En déduis que pour tout couple $(x\,;\,y)$ de S on a : PPCM$(x\,;\,y)=k(k+1)(y-x)$.

4) a) Détermine l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) En déduis l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ de S tels que PPCM$(x\,;\,y)=228$.

Exercice 64

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique : 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A,B et C les points d'affixes respectives $a=3+5i$, $b=-4+2i$ et $c=1+4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z'=(2-2i)z+1$.

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) a) Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f.

b) Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CB'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

3) Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M' l' image de M par f. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4) On considère l'équation $(E) : x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
a) Vérifie que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E).
b) Résous l'équation (E).
c) En déduis l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. Place ces points sur la figure.

Exercice 65

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}$.

1) On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'. Démontre que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 1) \\ y' = \frac{1}{5}(4x - 3y - 2) \end{cases}$.

2) a) Détermine l'ensemble des points invariants par f.
b) Quelle est la nature de l'application f ?
3) Détermine l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
4) On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
a) Donne une solution particulière $(x_0; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
b) Détermine l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
5) On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$.
Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'. Détermine les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Exercice 66

Les nombres de Fermat sont les nombres F_n de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1, n \in \mathbb{N}$.
1) Calcule F_2 et F_3, sont-ils premiers ?
2) Soit x un entier au moins égal à 2 et a un entier naturel non nul.
a) A quoi est congru x^a modulo $x^a - 1$?
b) En déduis que, si a divise b alors tout entier x au moins égal à 2, $x^a - 1$ divise $x^b - 1$.
3) Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $2^n \geq n + 1$.
4) Montre que F_n divise $2^{2^{n+1}} - 1$.
5) Déduis des questions précédentes que $F_n - 2$ divise $2^{F_n - 1} - 1$pour tout entier naturel n.

Exercice 67

1) a) Calcule : $(1 + \sqrt{6})^2, (1 + \sqrt{6})^4, (1 + \sqrt{6})^6$.
b) Applique l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?
2) Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que : $(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.
a) Que valent a_2 et b_1 ? D'après les calculs de la question 1) a) donne d'autres valeurs de a_n et b_n.
b) Calcule a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
c) Démontre que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.
En déduis que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.
3) a) Démontre que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.
b) En déduis que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 68

1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $4z^4 + 3z^2 + 1 = 0$.
Prouve que les deux solutions sont conjuguées deux à deux.
2) Ecris le polynôme $4z^4 + 3z^2 + 1$ sous forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.
3) En déduis que dans tout système de numération de base b supérieur ou égal à cinq, le nombre $\overline{40301}$ est multiple de $\overline{211}$ (Ces deux nombres sont écrits en base b).
Pour b égal à neuf, écris dans cette base le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$.

LIMITES ET CONTINUITÉ

Domaine de définition

Exercice 1

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = x.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

5) $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$; 6) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$; 7) $f(x) = |x|.\sqrt{\frac{x}{x-1}}$; 8) $f(x) = x^3 - 3x - 4$

9) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$; 10) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$; 11) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$; 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

13) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$; 14) $f(x) = \frac{x^2+2x}{|x|-2}$; 15) $f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}$; 16) $f(x) = \frac{|x^2-3x|}{x+1}$

17) $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$; 18) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x}$; 19) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$; 20) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x-3|-5}$

21) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$; 22) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{9x^2}}$; 23) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$; 24) $f(x) = |x^3 - 3x - 4|$

25) $f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}$; 26) $f(x) = \left|1 + \frac{1}{x}\right|$; 27) $f(x) = |x-1| + \frac{1}{x}$; 28) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

29) $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$; 30) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; 31) $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 32) $f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$

33) $f(x) = \frac{-3x^2-4x+3}{-x^2+1}$; 34) $f(x) = \frac{4x+3}{x^3-x^2}$; 35) $f(x) = \frac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}}$; 36) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$

37) $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$; 18) $f(x) = \sqrt{-6x^3 + 3x}$; 39) $f(x) = \frac{x}{\left|1+\frac{1}{x}\right|}$; 40) $f(x) = \frac{x^2+2}{|x|-1}$

41) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$; 42) $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}+2}$; 43) $f(x) = \frac{x-\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}$; 44) $f(x) = \frac{|x+1|}{1-|x-1|}$

Calcul de limites

Exercice 2

1) Limites de fonctions polynômes et rationnelles quand $x \to \infty$

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -2x^3 - 3x^2 + 1$	2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(1-x)^2}{1-2x^2}$	3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^3-3x^2+1}{5x^2+4x}$	4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{2x^3}$
5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 + 3x^2 + 1$	6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (1-x)^3$	7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (-2x^3 - 3x)(x+1)$	8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x + 1 - \frac{2}{x-3}$

2) Limites de fonctions rationnelles quand $x \to$ réel annulant le dénominateur et le numérateur

1) $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2-25}{x+5}$	2) $\lim\limits_{x\to2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$	3) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{x^2+3x+2}$	4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{1-x^3}{x-1}$
5) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^3+27}{x+3}$	6) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$	7) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$	8) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1+x^3}{x^3+x^2+4x+4}$

3) Limites de fonctions rationnelles quand x → réel annulant le dénominateur

1) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{-2x+1}{x+1}$	2) $\lim\limits_{x\to3} \frac{2-x}{x-3}$	3) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{(x+1)^3}$	4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x+7}{x^2-1}$
5) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{4}{(x+1)^2}$	6) $\lim\limits_{x\to2} \frac{-x+5}{(x-2)(1-x)}$	7) $\lim\limits_{x\to1} \frac{1-3x}{x^2-1}$	8) $\lim\limits_{x\to1} \frac{-5x}{x^2-2x+1}$

4) Limites de fonctions racines carrées quand $x \to \infty$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x+2}-\sqrt{4x+1}$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x^2+1}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+1}-x$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{9x^2}}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+1}-3x$	6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}+x$	7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}}$
10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x}-3x$	11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x}+3x+5$	12) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1}$	13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5-x}-\sqrt{1-x}$

5) Limites de fonctions trigonométriques

1) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos^2 x-1}{1+\cos x}$	2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$	3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$	4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x}$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}$	6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3x-\pi}$	7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$	8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{4+\cos x}$	10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$	11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x}{2\sin x-1}$	12) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$
13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$	14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{x}$	15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 3x-\sin^2 4x}{1-\cos 2x}$	16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x-\tan 2x}{\sin 4x-\tan x}$

6) Limites de fonctions trigonométriques avec taux de variation

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$	2) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$	3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$	4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin x-\sqrt{2}}{2x-\frac{\pi}{2}}$

7) Limites de fonctions trigonométriques avec théorème des gendarmes

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin x}{x+1}$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\cos x}{x^2+1}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sin x+1}$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2+1}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos x}{x^3+1}$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\cos x}{5x}$	7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x+\cos x}{x^2+1}$	8) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

8) Limites des fonctions rationnelles avec taux de variation ou expression conjuguée

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$	2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$	3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{3x+1}-1}$	4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$
5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$	6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$	7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{3x+1}-1}$	8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$
9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{3x-\sqrt{4x^2+5x}}$	10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{4x}$	11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{1-x}$	12) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x^2+5x-1}-7}{\sqrt{x^3+6}-9}$
13) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{2x^2-2}$	14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2-\sqrt{4+x}}$	15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+16}-4}$	16) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

Continuité en point x_0

Exercice 3

Etudie la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \text{ et } x_0 = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \text{ si } x \neq 9 \\ f(9) = \frac{1}{6} \text{ et } x_0 = 9 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{\sin x+1}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \text{ et } x_0 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{2x-2} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{5}{2} \text{ et } x_0 = 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}\ -2}{\sqrt{x+3}\ -1} \text{ si } x \neq -2 \\ f(-2) = -\dfrac{1}{2} \text{ et } x_0 = -2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x-1} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 1 \text{ et } x_0 = 2 \end{cases}$

Continuité sur un intervalle

Exercice 4

1) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \ si\ x \in [0;1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \quad si\ x \in]1;3] \end{cases}$ et 2) $\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5\ si\ x \in]-\infty\,;1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}\ \ x \in [1\,;3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}\ \ x \in [3\,;+\infty[\end{cases}$

Etudie la continuité de f en 1. Etudie la continuité de f en 1 et en 3.

Détermination de a et b pour que f soit Continuité en x_0

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$

Détermine la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$.

Exercice 6

Détermine le nombre réel a pour que la fonction f donnée soit continue.

$a)$ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+2a}{1-x} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$; $b)$ $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} \text{ si } x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + ax + 1 \text{ si } x < 2 \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2x + a \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{4x+1}{4x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 7

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x+a}{x^2+1} \text{ si } x \leq 1 \\ f(1) = b \\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Détermine a et b pour que f soit continue en 1.

Exercice 8

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = ax + 5b - a \text{ si } x \geq 0 \\ f(0) = 4 \\ f(x) = \frac{\sin ax}{bx} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Détermine a et b pour que f soit continue en 0.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \text{ si } x \in]-\infty\,;-1[\\ f(x) = 2x - 1\ \ si\ \ x \in]-1\,;\,1[\\ f(x) = b(x^2-1) \text{ si } x \in]1\,;+\infty[\end{cases}$

1) Détermine a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$

2) Pouvez – vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Prolongement par continuité en x_0

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de définition de la fonction f et détermine (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

$a)$ $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \\ x_0 = 2 \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} \\ x_0 = 3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} f(x) = \frac{2x+\sqrt{x+5}}{x^2-1} \\ x_0 = -1 \end{cases}$

Exercice 11

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

1) Détermine les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g.

2) Vérifie que la fonction g est le prolongement par conitinuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) f admet-elle un prolongement par continuité au point 4 ? Si oui, donne alors ce prolongement.

Asymptotes, positions relatives et branches infinis

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x-3}{1-x^2}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f.

b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

2) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).

Exercice 15

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-5x+7}{3-x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) a) Détermine l'ensemble de définition de f, puis calcule les limites aux bornes de D_f.

b) Interprète graphiquement si possible les résultats obtenus.

2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{3-x}$.

b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).

c) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 17

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^3+2x^2}{x-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) Calcule les limites aux bornes de D_f. Interprète graphiquement le résultat de la limite en 1.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

DÉRIVATION

Calcul de dérivées

Exercice 1

Dérive les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

5) $f(x) = (x^4 - 7)^3$; 6) $f(x) = (3x^2 + 2x - 4)^{-4}$; 7) $f(x) = \left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^3$; 8) $f(x) = x^3 - 3x - 4$

9) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$; 10) $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^3-3}\right)^3$; 11) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$; 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

13) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$; 14) $f(x) = \sqrt{3 + \cos 2x}$; 15) $f(x) = x - \frac{2}{x-1}$; 16) $f(x) = sin^2 4x$

17) $f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1}$; 18) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x}$; 19) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$; 20) $f(x) = cos^4 \pi x$

21) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$; 22) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{9x^2}}$; 23) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$; 24) $f(x) = \frac{x}{2+\cos 4x}$

25) $f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}$; 26) $f(x) = (x^3 - 1)^2\sqrt{x^2 + 1}$; 27) $f(x) = \sin 3x \cos 2x$; 28) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

29) $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3}$; 30) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; 31) $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 32) $f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$

33) $f(x) = \frac{-3x^2-4x+3}{-x^2+1}$; 34) $f(x) = \frac{4x+3}{x^3-x^2}$; 35) $f(x) = \frac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}}$; 36) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$

37) $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(3x+1)^3}$; 18) $f(x) = \sqrt{-6x^3 + 3x}$; 39) $f(x) = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x - 2}$; 40) $f(x) = (1 + \cos^2 x)^4 \sin x$

Dérivabilité en point x_0

Exercice 2

Etudie la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

1) $f(x) = x\sqrt{x}$ et $x_0 = 1$; 2) $f(x) = |x^2 - 4|$ et $x_0 = 2$; 3) $f(x) = x\sqrt{\sin^2 x}$ et $x_0 = 0$

4) $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$ et $x_0 = 2$; 5) $f(x) = x^2 - 3x$ et $x_0 = 4$; 6) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ et $x_0 = 1$

Exercice 3

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; 1[, f(x) = -x^2 + x \\ \forall\, x \in]1; +\infty[, f(x) = x^2 - x \end{cases}$. Etudie la dérivabilité de f en 1.

Continuité et dérivabilité en x_0

Exercice 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} \quad si\ x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a \quad si\ x < -1 \end{cases}$

1) Pour quelle valeur de a la fonction f est – elle continue au point -1 ?

2) Pour cette valeur, étudie la dérivabilité de la fonction f au point – 1.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) Etudie la continuité de f sur $[-1;\ +\infty]$.

3) Montre de f est dérivable en 0 et détermine l'équation de la tangente à sa courbe représentative en $A\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6

Détermine les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points x_0 donnés :

a) $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$ b) $\begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} \text{ si } x > -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$ c) $\begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} \text{ si } x > -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$

Tangentes

Exercice 7

Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 5}$ et $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ et $x_0 = 0$; 3) $f(x) = \cos x$ et $x_0 = \frac{\pi}{3}$

4) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$ et $x_0 = -1$; 5) $f(x) = x^2 - 3x$ et $x_0 = 4$; 6) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $x_0 = 3$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 2$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Montre que (C) admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -2x + 4$.

2) Donne une équation de chacune de ces tangentes.

Détermination de paramètre

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que (C) passe par $A(2\,;\ 6)$ et admet comme tangente au point d'abscisse 6 la droite d'équation $y = -3x + 20$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que f admet 2 comme extremum relatif en 1 et que la tangente à sa représentation graphique au point d'abscisse 2 admet 3 comme coefficient directeur.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que (C) passe par $A(0;\ 4)$ et que la tangente au point $B(2\,;1)$ est parallèle la droite (OI).

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

Détermine les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

ETUDE DE FONCTIONS

Problème 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b} + \frac{c}{x-1}$.
   b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).
   c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
3) Montre que le point $\mathrm{I}(1; -1)$ est un centre de symétrie de (C).
4) Détermine une équation de la tangente (T) aux d'abscisses 2.
5) Détermine les coordonnées du point d'intersection entre (C) et l'axe des ordonnées.
6) Trace (D), (T) et (C).

Problème 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f.
   b) Interprète graphiquement le résultat de la limite obtenu en 1.
3) a) Vérifie que $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$.
   b) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C).
   c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
4) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
5) Démontre que le point $\mathrm{A}(1; 3)$ est un centre de symétrie de (C).
6) Trace (D) et (C).

Problème 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b} + \frac{c}{x-3}$.
   b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).
   c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
3) A est le point d'intersection des asymptotes à (C).
   a) Détermine les coordonnées du point A.
   b) Montre que le point A est un centre de symétrie de (C).
4) Détermine une équation de la tangente (T) aux d'abscisses 1.
5) Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des repères.
6) Trace (D), (T) et (C).

Problème 4

Soit f une fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :
■ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
■ $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
■ $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$; $\forall x \in]0; 2[, f'(x) < 0$.
■ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$.
1) Dresse le tableau de variation de f.
2) (C_f) représentant les variations de f, précise les équations des asymptotes à (C_f).
3) Précise le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4) Trace dans le même repère (C_f) et ses asymptotes.

Problème 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-x-5}{x-3}$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_f puis les limites de f aux bornes de D_f.
2) Montre que la courbe $(\mathcal{C})$de f admet une droite (Δ) asymptote oblique aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
3) Etudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).
4) Etudie le sens de variation de f et construire $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé.
5) Démontre que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie que l'on déterminera.
6) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point E d'abscisse 1.
   Existe-t-il un autre point de $(\mathcal{C})$ en lequel la tangente à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (T) ?
   Si oui, détermine les coordonnées de ce point et une équation de cette tangente (T').
7) Résous et discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2-(m+1)x+3m-5=0$.

Problème 6

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$. On désigne par (C$f$) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montre que (Cf) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
2) Précisez la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique.
3) Etudie les variations de f.
4) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$?
   Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
5) Trace la courbe (Cf) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
6) Montre que la restriction g de f à l'intervalle I $=]1\,;\,2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
7) a) Calcule $(h^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$.
   b) Dresse le tableau de variation de h^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f.

Problème 7

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitide 0,01.
3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par $(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$. Soit C$f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine le domaine de définition de f. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.
2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$. En déduis les variations de f.
3) a) Détermine les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$.
   b) En déduis que Cf admet une asymptote oblique (Δ) et étudie la position de Cf par rapport à (Δ).
   Vérifie en particulier que Cf rencontre (Δ) en un point unique A.
5) Détermine les abscisses des points B et B' de Cf admettant une tangente parallèle à (Δ).
6) Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$. En déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.
7) Trace Cf et (Δ).

Problème 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1-x^3}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 1$

1) Etudie la fonction g (limites et sens de variation).
2) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$, puis en déduis l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

1) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenues.

2) a) Prouve que le signe de la fonction dérivée f' de f dépend en signe et en racine de la fonction g étudier dans la partie A.

b) Détermine $g(x_0)$ où x_0 est l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses obtenu dans la partie A-2).

c) Dresse le tableau de variation de f.

3) trace la courbe (Cf) dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

4) Détermine graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation paramétrique :

(E_m) : $mx^3 + x = m$ où m est un paramètre réel.

Problème 9

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 6x + 5$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) Calcule $g(1)$ et $g(5)$.

4) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-5x+10}{x-3}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 3 et $+\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en 3.

2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-3)^2}$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).

4) Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha+5}{\alpha-3}$.

5) Trace (C) et (D).

Problème 10

I/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$.

1) Etudie les variations de g.

2) a) Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Vérifie que $\alpha \in]-1; 0[$.

3) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(\alpha) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(\alpha) > 0 \end{cases}$.

II/ On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x - \frac{2}{x-1} \end{cases}$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; \mathrm{I}; \mathrm{J})$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont respectivement les courbes de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) a) Démontre que pour tout réel x de $]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

En déduis le sens de variations de f sur $]-\infty; 1[$.

b) Etudie le sens variation de f sur $]1; +\infty[$.

c) Dresse le tableau de variations de f.

3) a) Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_2)$ en $+\infty$.

b) Etudie la position de $(\mathcal{C}_2)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

4) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement le résultat.

5) Détermine les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_1)$ avec l'axe des ordonnées et de $(\mathcal{C}_2)$ avec l'axe des abscisses.

6) Représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(0; \mathrm{I}; \mathrm{J})$. $(\alpha = -0{,}1)$.

7) Soit h la restriction de f sur $]1; +\infty[$.

a) Justifie que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K à déterminer.

b) Dresse le tableau de variation de h et celui de sa bijection réciproque h^{-1}.

c) Calcule $(h^{-1})'(0)$.
d) Représente la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ dans le même repère $(0; \mathrm{I}; \mathrm{J})$.

Problème 11

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3{,}1 < \alpha < 3{,}2$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 1 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en 1.
2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).
4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)^2}$
5) Trace (C) et (D). (On prendra $f(\alpha) \simeq 7$)

PARTIE C : Etude d'une bijection

Soit φ la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1[$

1) Montre que φ réalise une bijection de $]-\infty ; 1[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
2) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ et (C^{-1}) sa représentation graphique.
a) Dresse le tableau de variation de φ^{-1}.
b) Justifie que φ^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(\varphi^{-1})'(0)$.
3) Trace (C^{-1}) dans le même repère que (C).

Problème 12

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x + 4$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ telle que $-2{,}2 < \alpha < -2{,}1$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2-1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$
b) Ecris D_f sous forme de réunion d'intervalles.
2) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, -1 , 1 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat des limites de f en -1 et 1.
3) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
b) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f.
4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}$
5) a) Montre que la droite (Δ) d'équation y = x est asymptote à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (Δ) et (C).
6) Trace (C) et (Δ).

PARTIE C : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

1) Montre que h réalise une bijection de $]1 ; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
2) a) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C_h^{-1}) sa représentation graphique.
Dresse le tableau de variation de h^{-1}.

b) Calcule $h(2)$ et $(h^{-1})'(2)$.
3) Trace (C_h^{-1}) dans le même repère que (C).

Problème 13

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f a pour forme explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.
1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Calcule $f'(x)$.
3) Détermine les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f.
4) Montre que la restriction g de f à $[0; +\infty[$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. Montre que α est compris entre 1 et 2.
Donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
6) Donne une équation de la tangente (T_0) à la courbe $\left(C_f\right)$ de f au point d'abscisse $x_0 = 1$, puis trace (T_0) et $\left(C_f\right)$.
7) Discute graphiquement suivants les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation
(E) : $\frac{-x^3+5+m}{3} - x^2 = 0$.

Problème 14

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$
1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que 0,7< α <0,8.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
PARTIE B : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm)
1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprété graphiquement les résultats obtenus.
2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3) Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$.
4) Trace (C).

Problème 15

A// Soit g la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x+1}$
1) Calcule les limites de g en -1 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
B// Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$: $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Calcule les limites de f en -1 et $+\infty$.
2) Calcule $\lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$. f est-elle dérivable en -1 ? Interprète graphiquement le résultat de cette limite.
3) a) Montre que $\forall\, x \in [-1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{3}{2}g(x)$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

5) Trace (C).

C//

1) a) Montre que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Justifie que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} et dresse le tableau de variation de f^{-1}.

2) f^{-1} est-elle dérivable en -1 ?

3) Trace la courbe représentative (C^{-1}) de f^{-1} dans le même repère.

Problème 16

A// Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

1) Etudie les variations de la fonction g.

2) Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.

3) En déduis le signe de g sur $\mathbb{R}$.

B// Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x \quad et \quad y = x$.

1) Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2) a) Montre que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f\,'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) En déduis le tableau de variation de f.

3) Détermine la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$. Quelle conséquence graphique peut – on déduire de ce résultat ?

4) Montre la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

5) Etudie la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').

6) Trace la courbe (C), les droites (D) et (D').

Problème 17

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2) a) Montre que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{4}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}$.

b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3) Déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm)

1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en $-\infty$.

2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que (C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = 4x$ au voisinage de $+\infty$.

b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

4) Trace (C) et (D).

PARTIE C : Etude d'une bijection

1) Justifie que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble K que l'on précisera.

2) a) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Calcule $f(0)$ et en déduis la valeur de α.

3) Donne les caractéristiques (ensemble de définition et sens de variation) de la bijection réciproque f^{-1} de f.

5) a) Justifie que f^{-1} est dérivable en 1.

b) Détermine le nombre dérivé de f^{-1} en 1.

6) Montre que $\forall\, x \in\,]0\,;\, +\infty[$, $f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{4x}$

7) Représente dans le même repère (C^{-1}), courbe représentative de f^{-1}.

Problème 18

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}, \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x}, \text{si } x > 1 \end{cases}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O, I, J})$.

1) a) Etudie les variations de la fonction numérique g définie sur $]1\,;+\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$.
   b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1\,;+\infty[$ et vérifie que $1{,}28 < \alpha < 1{,}3$.
   c) Détermine le signe de g sur $]1\,;+\infty[$.
2) a) Justifie que l'ensemble de définition D de f est $[-1;+\infty[$.
   b) Etudie la continuité de f en 1.
3) a) Etudie la dérivabilité de f en 1 et en -1, puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.
   b) Détermine l'ensemble de dérivabilité de f.
4) a) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in\,]1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \\ \forall x \in\,]-1;1[, f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$.
   b) Etudie le signe de f'sur $]-1;1[$.
5) Justifie que : $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$ et $-0{,}15 < f(\alpha) < -0{,}10$.
6) Dresse le tableau de variation de f sur $[-1;+\infty[$.
7) Etudie les branches infinies puis donne l'allure de $(\mathcal{C})$.

Problème 19

Soit la fonction f défini par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2-9|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1) a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   b) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2) a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -3 et en 3.
   b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
3) a) Précise l'ensemble de dérivabilité de f.
   b) Calcule $f'(x)$ et étudie son signe.
4) Etudie les variations de f.
5) Démontre que (C_f) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.
6) Construis (C_f).
7) soit h la restriction de f à $]-\infty;-3]$.
   Montre que h définie une bijection de $]-\infty;-3]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

Problème 20

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2-2x-3|}$.
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Ecris $f(x)$ sans valeur absolue.
3) Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interprète graphiquement vos résultats.
4) Montre que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de -∞ et une asymptote oblique (D) au voisinage de +∞.
5) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (Δ) et (D).
6) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
7) Trace dans un repère orthonormé la courbe (C) de f.

Problème 21

Soit la fonction définie par : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto |x| + \sqrt{x^2-2x}$$

1) Montre que :
   a) $\forall x \in\,]-\infty;0[, \sqrt{x^2-2x} - 1 + x \leq 0$.
   b) $\forall x \in\,]2;+\infty[, \sqrt{x^2-2x} - 1 + x \geq 0$.
   c) $\forall x \in\,]-\infty;0[, x - 1 - \sqrt{x^2-2x} \leq 0$.
   b) $\forall x \in\,]2;+\infty[, x - 1 - \sqrt{x^2-2x} \geq 0$.

2) a) Ecris $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0 et en 2, puis interprète géométriquement les résultats obtenus.
3) Dresse le tableau de variation de f.
4) Montre que les droites $(\Delta): y = 2x - 1$ et $(D): y = -2x + 1$ sont des asymptotes à la courbe (C_f) de f.
5) Trace la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
6) a) Montre que $\forall x \in [3; 4]$, on a : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq f'(x) \leq 1 + \sqrt{3}$.
b) En déduis que $\forall x \in [3; 4]$, on a : $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \sqrt{3} \leq f(x) \leq \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} + \sqrt{3}$.
7) a) Soit $\mathrm{I} = [2; +\infty[$. Trouve $f(\mathrm{I})$.
b) Soit $g : \mathrm{I} \to f(\mathrm{I})$
$x \mapsto f(x)$
Montre que g est une bijection.
c) Calcule $(g^{-1})'(3)$.
d) Construis dans le même repère que (C_f) la courbe (Γ) de g^{-1}(où g^{-1} est la bijection réciproque de g).
8) Soit h la fonction défi nie par $h(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ et (C_h) sa courbe représentative.
a) Calcule $g(x - 1)$.
b) Exprime h à l'aide de g.

Problème 22

Soit la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$.
Soit (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
1) Détermine l'ensemble de définition D_f.
2) Etudie la parité et la périodicité de f puis en déduis un intervalle d'étude D_E.
3) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$.
4) Etudie le signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis en déduis les variations de f sur D_E.
5) Détermine les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.
6) En déduis le tracé de (C_f) sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie.

Problème 23

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ et (C) sa courbe représentative.
1) Détermine D_f. Justifie que l'ensemble d'‘étude de f peut être réduit à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
2) a) Démontre que : $\forall x \in D_f$, on a $f'(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{(1 - \cos x)^2}$.
b) Dresse le tableau de variations de f sur $[-\pi; \pi]$.
c) Vérifie que sur cet intervalle, (C) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature.
3) a) Trace (C) et précise les coordonnées des points où la tangente est parallèle à (OI).
b) Détermine une équation des tangentes aux points d'abscisses -π et π.

Problème 24

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ où a, b, c et d sont des réels et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$
1) Trouve les réels a, b, c et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (Cf) passe par les points $A(2, 3), B(4, 7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1$; $b = -1$; $c = -5$ et $d = -3$
a) Etudie la fonction f.
b) Etudie la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique.
c) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[4 ; +\infty[$ réalise une bijection de $[4 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
d) Calcule $g(5)$, $g(6)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{15}{2}\right)$.
3) Montre que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on déterminera.
4) Montre que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions α et β.
5) a) Montre que $\forall x \in [4; 5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

b) En déduis que $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$.

6) Trace (Cf) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}.

Problème 25

Partie A : Soit f la fonction numérique définie sur Df =]1 ; +∞[par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

1) Montre que la dérivée de f garde un signe constant sur Df.

2) Etudie les variations de f (limite et sens de variation).

3) En déduis que l'équation $f(x)$ = 0 admet une solution unique dans l'intervalle]1 ; 2[.

Partie B : On se propose de résoudre l'équation $f(x)$ = 0 dans]1 ; 2[

1) Montre que l'équation $f(x)$ = 0, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.

2) On appelle g la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x)$ = 0

(On a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$)

a) Montre que si x est élément de]1; 2[alors $g(x)$ est aussi élément de]1; 2[.

b) Justifie la dérivabilité de g sur [0; +∞[. Calcule la dérivée de g puis montre que pour tout $x \in [1; 2]$ on a: $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

c) En déduis que pour tout $x \in [1;\ 2]$, on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

Problème 26

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

1) Etudie les variations de g sur ℝ.

2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.

3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

4) En utilisant le sens de variation de g, montre que $\forall x \in [0; 1], |g(x)| \leq 2$.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Détermine le domaine de définition de f. puis calcule la limite aux bornes de D_f.

2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} . g(x)$

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C).

b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).

4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(1-\alpha)}{\alpha^2+1}$

5) Trace (C) et (D).

PARTIE C :

1) Résous dans ℝ l'équation $f(x) = x$.

2) Montre que $\forall x \in [0; 1]$, on a : $x \leq f(x) \leq 1$.

3) Montre que $\forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, on a : $\frac{\sqrt{2}}{8} \leq \frac{x}{(x^2+1)^2} \leq \frac{4}{9}$.

4) En utilisant la 4e) de la partie A, en déduis que $\forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$.

5) en utilisant l'inégalité des accroissements finis à f sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, montre que $|f(x) - 1| \leq \frac{8}{9}|x - 1|$.

PRIMITIVES-INTÉGRALES

Primitives

<u>Exercice 1</u> : Formes simples

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 5$; 2) $f(x) = \cos\left(\frac{x+\pi}{5}\right)$; 3) $f(x) = \sin(-2x + \pi)$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 8x^2$; 6) $f(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{5}{x^2}$; 7) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$; 8) $f(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; 9) $f(x) = \frac{4x^3-3x^2+1}{5x^2}$

<u>Exercice 2</u> : Formes $\boldsymbol{u'u^n}$ ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$)

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x+3)^5$; 2) $f(x) = \sin x.\cos^3 x$; 3) $f(x) = x^2(x^3-9)^5$; 4) $f(x) = (2x+1)^4$

5) $f(x) = (5-2x)^6$; 6) $f(x) = x(x^2+1)^5$; 7) $f(x) = (6x+3)(x^2+x+1)^4$; 8) $f(x) = \cos x.\sin^4 x$

9) $f(x) = \frac{6}{x^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$; 10) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2-x)^4$; 11) $f(x) = \tan^3 x + \tan^5 x$; 12) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

<u>Exercice 3</u> : Formes $\boldsymbol{\frac{u'}{u^n}}$ ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{et\ n \geq 2}$)

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{3x}{(1-x^2)^4}$; 2) $f(x) = \frac{3x+6}{(x^2+4x+3)^4}$; 3) $f(x) = \frac{3}{(3-2x)^4}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^3+3x^2+3x+1}$; 5) $f(x) = \frac{-1}{(3-4x)^2}$

6) $f(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2$; 7) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x}$; 8) $f(x) = \frac{-x+1}{(x^2-2x)^2}$; 9) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 10) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^5}$

11) $f(x) = \frac{-x}{(x^2-9)^5}$; 12) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$; 13) $f(x) = \frac{1}{tan^3 x} + \frac{1}{tan\, x}$; 14) $f(x) = -x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{(x+3)^2}$

<u>Exercice 4</u> : Formes $\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{u}}}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; 2) $f(x) = \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x}}$; 3) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$; 4) $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$; 5) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$

6) $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x+1}}$; 7) $f(x) = \frac{cos\, x}{\sqrt{1+sin\, x}}$; 8) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}$; 9)$f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}$; 10) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

<u>Exercice 5</u> : Formes $\boldsymbol{u'\sqrt{u}}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+5}$; 3) $f(x) = x\sqrt{9+x^2}$; 4) $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$

5) $f(x) = \sqrt{4x+9}$; 6) $f(x) = (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4}$; 7) $f(x) = \sqrt{x+2}$; 8) $f(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$

<u>Exercice 6</u> : Formes $\boldsymbol{f \times g'(f)}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$; 3) $f(x) = \frac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$; 4) $f(x) = 2x\sin(x^2)$

5) $f(x) = (x+1)^3\sin(x+1)^4$; 6) $f(x) = (x+1)\cos(x^2+2x)$; 7) $f(x) = (2x+1)\sin(x^2+x+1)$

<u>Exercice 7</u> : Formes $\boldsymbol{u'v + v'u}$ et $\boldsymbol{\frac{u'v - v'u}{v^2}}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x\cos x + \sin x$; 2) $f(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$; 3) $f(x) = x(2\cos x - x\sin x)$; 4)$f(x) = \sqrt{x}\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$

5) $f(x) = x^2 + 2x\tan x + x^2\tan^2 x$; 6) $f(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$; 7) $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$

8) $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x + \cos x}{(x+1)^2}$; 9) $f(x) = \frac{2x\cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}$; 10) $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

<u>Exercice 8</u> : Formes trigonométriques

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \cos 2x.\cos 3x$; 2) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin 2x}$; 3) $f(x) = \cos^5 x$; 4) $f(x) = \sin^4 x$; 5) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

6) $f(x) = \cos^3 x.\sin^3 x$; 7) $f(x) = \cos^2 x.\sin^3 x$; 8) $f(x) = \sin x.\cos 2x$; 9) $f(x) = \cos^5\left(\frac{3}{2}x\right)$

10) $f(x) = \sin 3x.\cos 4x$; 11) $f(x) = \sin x.\cos 3x$; 12) $f(x) = \cos^6 x$; 13) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

<u>Exercice 9</u> : Formes pièges

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \tan^2 x$; 2) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}$; 3) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$; 4) $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$; 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$

<u>Exercice 10</u> : Primitives vérifiant une condition

Détermine la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée :

1) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et F(0) = 7 ; 2) $f(x) = (x - 3)^6$ et F(3) = 0

3) $f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3}$ et F(0) = 0 ; 4) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}$

5) $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$ et F(0) = $\sqrt{5}$; 6) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

7) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x}$ et F(π) = 1 ; 8) $f(x) = \sin x \cos^4 x$ et $F(\pi) = 0$

<u>Exercice 11</u> : Détermination des réels a, b et c ...

1) $f(x) = \frac{-1}{x^2(1+x)}$ et $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$

Détermine les réels a, b et c, puis en déduire les primitives de f.

2) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-3)^2}$ et $f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$

Détermine les réels a, b et c, puis en déduire les primitives de f.

3) $f(x) = \frac{2x - 5}{-x^2 + 3x - 2}$ et $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}$

Détermine les réels a et b puis en déduire les primitives de f.

4) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x-2)^2}$ et $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$

Détermine les réels a, b et c, puis en déduire les primitives de f.

5) $f(x) = \frac{x^3 \mp x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}$ et $f(x) = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$

Détermine les réels a, b et c, puis en déduire les primitives de f.

Primitive et dérivé

<u>Exercices 12</u>

Soit la fonction g définie sur [3 ; +∞[par : $g(x) = (x - 3)\sqrt{x - 3}$.

1) Détermine $g'(x)$.

2) En déduis la primitive sur [3 ; +∞[de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x - 3}$ prenant la 0 en 5.

<u>Exercices 13</u>

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ par : $f(x) = x\sqrt{1 - 2x}$.

Détermine les nombres réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1 - 2x}$ soit une primitive de f.

Intégration par primitivation

<u>Exercice 14</u>

Calcule chacune des intégrales suivantes

1) $I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)\, dx$; 2) $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; 3) $I = \int_0^1 \frac{3}{(3-2x)^4} dx$; 4) $I = \int_0^2 x\sqrt{9 + x^2} dx$

5) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-2x + \pi)\, dx$; 6) $I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx$; 7) $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^3}\, dx$; 8) $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

9) $I = \int_0^4 \sqrt{4x + 9}\, dx$; 10) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$; 11) $I = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx$; 12) $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2x\, dx$

13) $I = \int_0^1 (x - 1)(x^2 + 6x + 4)^2 dx$; 14) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; 15) $I = \int_1^0 x(x^2 + 1)^5\, dx$

16) I = $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \; dx$; 17) I = $\int_1^0 (x+2)^3 \, dx$; 18) I = $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx$; 19) I = $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x - 3)\, dx$

20) I = $\int_{-1}^{2} \sqrt{x+2}\, dx$; 21) I = $\int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4}\, dx$; 22) I = $\int_0^3 |x^2-3x+2| dx$

23) I = $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$; 24) I = $\int_0^{\ln 2} \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+4} dx$; 25) I = $\int_0^{e} \frac{\ln x}{x}\, dx$; 26) I = $\int_{-3}^{0} x e^{-x^2} dx$

Une intégration par parties

Exercice 15

Calcule chacune des intégrales suivantes à l'aide d'intégration par parties

1) I = $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$; 2) I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; 3) I = $\int_1^2 x\sqrt{3-x} dx$; 4) I = $\int_0^{\pi} x \sin x dx$; 5) I = $\int_0^{\pi} (x-1)\sin 3x dx$

6) I = $\int_0^1 x e^x \, dx$; 7) I = $\int_{-1}^{1} (x+1)e^x \, dx$; 8) I = $\int_1^3 \ln x \, dx$; 9) I = $\int_1^e x \ln x \, dx$; 10) I = $\int_0^1 x e^{2x} \, dx$

11) I = $\int_1^3 (x+2)\ln x \, dx$; 12) I = $\int_0^1 (2x+1)e^x \, dx$; 13) I = $\int_1^2 x^2 \ln x dx$; 14) I = $\int_0^1 (x^3+1)\ln x \, dx$

15) I = $\int_0^1 (x-1)e^{2x} \, dx$; 16) I = $\int_0^1 x e^x \, dx$; 17) I = $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$; 18) I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x dx$.

Deux intégrations par parties

Exercice 16

Calcule chacune des intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties

1) I = $\int_0^1 (x+1)^2 e^x \, dx$; 2) I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$; 3) I = $\int_{-\pi}^{0} x^2 \sin 2x \, dx$; 4) I = $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

5) I = $\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx$; 6) I = $\int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} \, dx$; 7) I = $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$; 8) I = $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x} \, dx$

9) I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$; 10) I = $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx$; 11) I = $\int_1^{e^3} x(\ln x)^2 dx$; 12) I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$

13) I = $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$; 14) I = $\int_1^{e^3} x(\ln x)^2 dx$; 15) I = $\int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x \, dx$; 16) I = $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx$

17) I = $\int_1^{e^3} x(\ln x)^2 dx$; 18) I = $\int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx$; 19) I = $\int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx$; 20) I = $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$

Changement de variable

Exercice 17

En utilisant un changement de variable, calcule les intégrales suivantes :

1) I = $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$; 2) I = $\int_0^1 x\sqrt{1+x} dx$; 3) I = $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Calcul d'aire

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$ et la droite (D) d'équation $y = x$.
Soit λ un nombre réel strictement positif et A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$. (unité graphique 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ)).
Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$
Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$. (unité graphique 2 cm).
Calcule $A(\lambda)$ à l'aide de deux intégrations par parties.

Encadrement

Exercice 20

Encadre les intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$ et $\int_e^{2e} \frac{t}{\ln t}\,dt$

Exercice 21

1) Démontre que $\forall t \in [0\,;x]$, $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$.

2) En déduis que, $x > 0$, on a : $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$.

Exercice 22

1) Démontre que $\forall t \in [x\,;x+1]$, $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) En intégrant sur $[x\,;x+1]$, Démontre que on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercices de perfectionnement

Exercice 23

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1) trouve les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$.

2) En déduis $\mathrm{I} = \int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 24

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.

1) trouve les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

2) En déduis $\mathrm{I} = \int_0^3 f(x)dx$.

Exercice 25

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$.

1) trouve les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$.

2) En déduis $\mathrm{I} = \int_0^2 f(x)dx$.

Exercice 26

1) Soient f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

a) Calcule $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

b) Soit $\mathrm{I}_2 = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. Calcule $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$. En déduis la valeur de I_2.

2) a) Détermine trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $\frac{x^2-1}{2x-1} = ax + b + \frac{c}{2x-1}$.

b) Calcule $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}\mathrm{d}x$.

Exercice 27

On pose : $\mathrm{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

1) Calcule $\mathrm{A} + \mathrm{B}$.

2) Calcule A – B en utilisant une intégration par parties.

3) Déduis des questions précédentes les valeurs de A et B.

Exercice 28

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

1) Calcule $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ puis $\mathrm{I}-\mathrm{J}$.

2) En déduis les valeurs de I et de J.

Exercice 29

Soient les intégrales I et J définies par : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x$.

1) Calcule $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}$.

2) En déduis les valeurs de I et J.

Exercice 30

On pose $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\mathrm{d}x$; $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}$.

1) Calcule I_2.

2) Calcule I_1.

3) En déduis I.

Exercice 31

Soient les intégrales suivantes : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

1) Calcule $\mathrm{I}-\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}$.

2) Calcule la primitive de $\cos 4x$.

3) En déduis la valeur de : $\mathrm{I}-\mathrm{J}-3\mathrm{K}$ puis celles de I, J et K.

Exercice 32

On considère les intégrales $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

1) a) Montre que l'intégrale I peut s'écrire $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \cos x\,(\cos x - \cos x \sin^2 x)\,\mathrm{d}x$. $\mathrm{J} = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\mathrm{I}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montre que $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\mathrm{J}$.

c) Montre de même que $\mathrm{J} = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\mathrm{I}$.

2) a) Montre que $\mathrm{I}+\mathrm{J} = \frac{3\pi}{4}$.

b) Montre que $\mathrm{J}-\mathrm{I} = 0$.

c) En déduis les intégrales I et J.

Exercice 33

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

1) Calcule $\mathrm{I}+\mathrm{J}$.

2) Soit $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$.

a) Détermine $f'(x)$.

b) En déduis $\mathrm{I}-\mathrm{J}$.

3) Calcule I et J.

Exercice 34

On considère les intégrales suivantes : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1) Calcule J.

2) Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Montre que $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b) En déduis une relation entre I et J, puis calcule J.

Exercice 35

Soit $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x \, dx$; $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x \, dx$ et $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x \, dx$

1) A l'aide de 2 intégrations par parties, prouve que $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$.

2) a) Calcule $I + J$.

b) Montre que $K = I - J$.

c) En déduis les valeurs de I et J.

Exercice 36

Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \, dx$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} \, dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} \, dx$

1) Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.

Calcule la dérivée de f. En déduis la valeur de I.

2) a) Sans calculer explicitement J et K, vérifie que : $J + 2I = K$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontre que : $K = \sqrt{3} - J$.

c) En déduis les valeurs de J et de K.

Exercice 37

On se propose de calculer l'intégrale J définie par : $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} \, dx$.

1) Calcule les deux intégrales A et B tel que : $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx$.

2) Détermine les réels a, b et c tels que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$.

3) En posant $t = e^x$, calcule $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} \, dx$.

4) A l'aide d'une intégration par partie, exprime J en fonction de I. En déduis la valeur de J.

Exercice 38

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$

1) Montre que $\forall x \in [0 ; 1]$, $x^n \leq x^n e^{1-n} \leq ex^n$.

2) En déduis $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

3) En utilisant une intégration par parties, démontre que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Exercice 39

Pour tout entier naturel $n > 0$; on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{3+x} dx$.

1) a) Calcule I_0.

b) Calcule I_1 à l'aide d'une intégration parties.

2) Compare x^{n+1} et x^n lorsque $0 \leq x \leq 1$. En déduis que suite (I_n) est décroissante.

3) En procédant par un encadrement, établis que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$. Etudie la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.

4) a) Démontre que, $\forall x \in [0; 1]$, on a : $0 \leq 2 - \sqrt{x+3} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x)$. Déduis que : $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

b) Détermine la limite de (nI_n).

Exercice 40

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

1) Calcule I_0 et I_1.

2) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-2}. (On posera : $\sin^n x = \sin^{n-1} x . \sin x$)

3) En déduis I_2 et I_4.

Exercice 41

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$

1) Calcule I_0.
2) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1 et I_2.
3) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-2}.

Exercice 42

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ($n \geq 0$)

1) Calcule I_0.
2) En intégrant par parties, montre que $\forall\, n \geq 1$ on a : $(2n1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.
3) En déduis la valeur de I_1, I_2 et I_3.

Exercice 43

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx$.

1) Détermine les réels a et b tels que : $\forall\, x \left[0\,;\, \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$.
2) Calcule la valeur de I_0.
3) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.
   $\left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \frac{1}{\cos^2 x}\right)$.

Exercice 44

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$

1) Démontre que $I_0 = \frac{\pi}{4}$.
1) Calcule I_1.
2) En intégrant par parties, montre que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x.x^{n-1}$).

Exercice 45

On pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$ où n est un entier naturel.

1) Calcule I_0 et I_1.
2) Vérifie que $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$.
3) En déduis I_2 et I_3.

Exercice 46

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontre que $I_n = 2\int_0^1 (x^2-1)^n dx$, puis calcule I_0 et I_1.
2) Démontre que $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$.
3) En déduis I_2 et I_3.

Exercice 47

Pour tout n entier naturel non nul, on considère l'intégrale : $I_n = \int_0^e (\ln x)^n dx$.

1) a) Démontre que pour tout x de l'intervalle $[1; e]$ et pour tout n entier naturel on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$.
   b) En déduis que la suite (I_n) est décroissante.
2) a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1.
   b) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
   c) En déduis I_2, I_3 et I_4. Donne les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs exactes à 10^{-3} près par défaut
3) a) Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$.
   b) Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (n+1)I_n \leq e$.

c) En déduis la limite de I_n.
d) Détermine la valeur de $n\mathrm{I}_n + (\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1})$ et en déduis la limite de $n\mathrm{I}_n$.

Exercice 48

On considère les intégrales I_n et J_n définies par : $\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, par $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$, $\mathrm{J}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, par $\mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\, dx$.

1) a) Calcule J_0 et J_n pour tout entier naturel n non nul.
b) Calcule $\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_0$ et démontre que pour tout entier naturel n, $\mathrm{I}_{n+2} - \mathrm{I}_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.
2) a) Calcule I_1.
b) En déduis I_3.
3) Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.
a) Démontre que pour tout réel x : $\cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
b) On pose, pour tout x élément de $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$: $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
Calcule $\frac{u\prime(x)}{u(x)}$. En déduis une primitive de f sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.
c) Calcule I_0 puis I_2 et I_4.

Exercice 49

On pose $\mathrm{I}_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$ où n est un entier naturel.
1) Calcule $\mathrm{I}_{p,0}$ et $\mathrm{I}_{p,1}$.
2) Calcule $\mathrm{I}_{0,n}$ et en déduis $\mathrm{I}_{1,n}$.
3) Etablis pour $n \geq 0$, la relation : $\mathrm{I}_{p,n} = \frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,n-1.}$

Exercice 50

Pour entier naturel, on considère les intégrales : $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x\, dx$ et $\mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x\, dx$.
1) Calcule I_0 et J_0.
2) Soit n un entier naturel non nul.
a) En intégrant par parties I_n puis J_n, prouve que I_n et J_n vérifient le système : $\begin{cases} \mathrm{I}_n + n\mathrm{J}_n = 1 \\ -n\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.
b) En déduis, pour n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
3) Détermine la limite de I_n et de J_n, en $+\infty$.

Exercice 60

On pose pour tout entier naturel n non nul : $\mathrm{I}_n = \int_0^e x^2 (\ln x)^n dx$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
1) Calcule I_0.
2) En utilisant une intégration par parties, calcule I_1.
3) En utilisant une intégration par parties, démontre que pour tout entier naturel n non nul : $3\mathrm{I}_{n+1} + (n+1)\mathrm{I}_n = e^3$. (1)
En déduis I_2.
4) a) Démontre que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.
b) Déduis de l'égalité (1) que, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{I}_n \leq \frac{e^3}{n+1}$.
c) Détermine $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n$.

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Les propriétés

Exercice 1

Exprime en fonction de ln 2 et ln 3 les réels suivants :

$A = \ln 18 + \ln 12$; $B = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{9}{8}\right)$; $C = \ln\left(\frac{1}{12}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; $D = \ln(3^{-2}) + \ln 24$; $E = \ln 3\sqrt{2} + 2\ln 6$

$F = \ln 3\sqrt{2} + \ln 2\sqrt{3}$; $G = \ln 144$; $H = 2\ln 2 - \ln 36 + 3\ln 3$; $I = \ln\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)$.

Exercice 2

Exprime en fonction de ln 2 et ln 5 les réels suivants :

$A = \ln 2000$; $B = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{32}{25}\right) + \ln 8$; $C = \ln 0{,}001 + 3\ln 4$; $D = \ln 0{,}025 + \ln 40$; $E = \ln 0{,}625$

$F = \ln\left(\frac{25}{320}\right)$; $G = \ln 0{,}005 + \ln 16$; $H = 2\ln\left(\frac{2}{5}\right) - 6\ln 10$; $I = \ln 25 + 4\ln 10$; $J = \ln 0{,}5 + \ln 80$

$K = \ln 50 - 2\ln 20$; $L = 3\ln 100 - 5\ln 10$; $M = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$.

Exercice 3

Simplifie les expressions suivantes :

$A = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $B = \ln\sqrt{e}$; $C = \sqrt{6\ln e - \ln e^2}$; $D = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$; $E = 5\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln e^2$

$F = 3\ln e^{-1} + \ln e^2$; $G = 4\ln e\sqrt{e} - 2\ln e$; $H = \ln\sqrt{\sqrt{e}}$; $I = 6\ln e^2\sqrt{e}$; $J = \sqrt{\ln e^4} - 2\ln\sqrt{e}$.

Exercice 4

Simplifie les expressions suivantes :

$A = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)^{20} + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)^{20}$; $B = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{10}$; $C = \ln\left(\sqrt{3}+1\right) + \ln\left(\sqrt{3}-1\right)$

$D = \ln\left(2+\sqrt{2}\right) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$; $F = 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 4\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - 5\ln 2$.

Résolution d'équations, d'inéquations et systèmes

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$A)$ $\ln(2x+7) = \ln(x-3)$; $B)$ $\ln(x^2-2x-3) = \ln(x+7)$; $C)$ $\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1)$

$D)$ $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$; $E)$ $\ln(x-2) + \ln(x+3) = 2\ln(x+1)$

$F)$ $\ln(2x-2) + \ln(x+2) = 3\ln 2$; $G)$ $3(\ln x)^2 - 7\ln x + 2 = 0$; $H)$ $-5(\ln x)^2 + (\ln x) + 6 = 0$.

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$A)$ $\ln(2-3x) > \ln x$; $B)$ $\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$; $C)$ $\ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) \leq 0$

$D)$ $\ln(x^2+2x+2) \geq \ln(-x^2+x+3)$; E) $\ln(2x-1) - \ln(1-x) < \ln 3$; $F)$ $(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0$

$G)$ $\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$; $H)$ $(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0$; $I)$ $(\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = 0$

$J)$ $\ln(x^2+2x+2) > \ln(3+x-x^2)$; $K)$ $\ln(5x^2+6x+1) < 0$.

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes équations suivants :

1) $\begin{cases} x+y=15 \\ \ln x + \ln y = \ln 32 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} xy = 243 \\ \log_x y + \log_y x = \frac{17}{4} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \ln(x^3y^4) = 6 \\ \ln\left(\dfrac{x^2}{y^5}\right) = 5 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x+y=7 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 0 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \ln x . \ln y = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$.

Exercice 8

Soit le polynôme P définie par $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

1) a) Calcule $P(-1)$.

b) Détermine les nombres réels a et b tels que : $P(x) = (x+1)(2x^2+ax+b)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

3) En déduis dans ℝ la résolution de l'équation et l'inéquation :
   a) $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$.
   b) $\ln(2x+3) + \ln(x^2+2x+2) \leq \ln(8x+9)$.

Exercice 9

On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

1) a) Vérifie que $P(-1) = 0$.
   b) Ecris $P(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
2) a) Résous dans ℝ l'équation $P(x) = 0$.
   b) Résous dans ℝ l'inéquation $P(x) \leq 0$.
3) En déduis dans ℝ :
   a) L'équation : $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$.
   b) L'équation : $\ln(4-x^2) + \ln(2x+7) = \ln(10x+25)$.
   c) L'inéquation : $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 \leq 0$.

Calcul de limites

Exercice 10

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+5-\ln x$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x+2$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x+1-7\ln x$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+5-\ln x$
5) $\lim\limits_{x\to3} \ln(3-x)$	6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$	7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2x+1}$	8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+x+1)$
9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	10) $\lim\limits_{x\to0} x^3\ln x$	11) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}\ln x$	12) $\lim\limits_{x\to1} -\frac{1}{\ln x}+\frac{x}{\ln x}$
13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x-1)}{x}$	14) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln x}{x^2}\cdot\ln(x+1)$	15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x\ln x}$	16) $\lim\limits_{x\to0} \left(x+\frac{1}{x^2}\right)\ln x - x$
17) $\lim\limits_{x\to0} x(\ln x)^5$	18) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}+\ln x$	19) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{x}}+\ln x$	20) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\ln x+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$
21) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$	22) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1+\ln x}{x}$	23) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1+\ln x}{x^2}$	24) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\frac{1}{x}-(\ln x)^2$
25) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1}$	26) $\lim\limits_{x\to0} \ln x+\ln^2 x$	27) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x-1}{\ln x+1}$	28) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e}$
29) $\lim\limits_{x\to e} \frac{x\ln x-x}{x-e}$	30) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$	31) $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln^5 x$	32) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+5-\ln x$
33) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$	34) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$	35) $\lim\limits_{x\to0} x\ln^2 x$	36) $\lim\limits_{x\to0} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
37) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$	38) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$	39) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x\ln x}$	40) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-x+1}{4x+1}\right)\ln x$
41) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{1+\ln x}$	42) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}-2\ln x$	43) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x+1}{5x+2}-\ln x$	44) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
45) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x\ln x}$	46) $\lim\limits_{x\to0} x\ln x-\frac{1}{x}+2$	47) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+4\ln^2 x$	48) $\lim\limits_{x\to0} 4x-5+\frac{\ln x}{x}$
49) $\lim\limits_{x\to0} x+\frac{3\ln x}{x}$	50) $\lim\limits_{x\to0} x-\frac{\ln x}{x^2}$	51) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x^2+1}-2x^2$	52) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1+\frac{2\ln x-1}{x}$

Détermination du domaine de définition

Exercice 11

1) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$; 2) $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 3) $f(x) = x^3 - 2 - \ln x$; 4) $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$

5) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x - e}$; 6) $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$; 7) $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$; 8) $f(x) = \frac{\ln(x^2+x-1)}{x}$; 9) $f(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$

10) $f(x) = \ln|-x^2 - 3x + 4|$; 11) $f(x) = \frac{1-2\ln x}{1-\ln x}$; 12) $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$; 13) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

Dérivée

Exercice 12

1) $f(x) = x + \frac{1}{2} - x\ln x$; 2) $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 3) $f(x) = x^3 - 2 - \ln x$; 4) $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln x$

5) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x - e}$; 6) $f(x) = 1 + x^2 - \ln x$; 7) $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$; 8) $f(x) = x(\ln x)^2$; 9) $f(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$

10) $f(x) = \ln|-x^2 - 3x + 4|$; 11) $f(x) = \ln x + x + 1$; 12) $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$; 13) $f(x) = \ln(x) + \frac{1+x}{x+2}$.

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, démontre $f'(x)$ donnée :

1) $\begin{cases} g(x) = 2\ln x + x - 1 \\ f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} g(x) = x^2 - 2\ln x \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1+\ln x}{x} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x \\ f(x) = 2x - \dfrac{\ln x}{x^2} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} g(x) = x + \dfrac{1}{2} - x\ln x \\ f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x(1 - x\ln x) \\ f'(x) = g(x) \end{cases}$; 5) $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{x-1} + \ln|x-1| \\ f(x) = x\ln|x-1| \\ f'(x) = g(x) \end{cases}$; 6) $\begin{cases} g(x) = 2x^2 - 1 - \ln x \\ f(x) = -2x^3 + 3x\ln x \\ f'(x) = -3g(x) \end{cases}$

7) $\begin{cases} g(x) = x\ln x - 1 \\ f(x) = \dfrac{1+x}{1+\ln x} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+\ln x)^2} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln x \\ f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} g(x) = \ln x + x + 1 \\ f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2} \end{cases}$

Continuité et dérivabilité

Exercice 14

Etudie la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en $x_0 = 0$.

1) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{1}{2} - x\ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x(1 - x\ln x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x\ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1+x}{1+x-\ln x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Problèmes

Problème 1

A// On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.

2) Dresse le tableau de variation g, puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B// On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité graphique : 2cm)

1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.

2) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1.\right]$

4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

b) Etudie la position relative de (D) et (C).
5) Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
6) Trace (C) et (D).
7) Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 2

1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.
   a) Etudie le sens de variation de g et calcule $g(1)$.
   b) En déduis le signe de $g(x)$.
2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$.
   a) Détermine les limites de en 0 et en $+\infty$.
   b) Calcule $f'(x)$.
   c) Montre que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduis le tableau des variations de f.
   d) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2; donne en justifiant un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles.
3) On note (C) la représentation graphique de dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm.
   a) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (C).
   b) Etudie la position de (C) par rapport à (D).
   c) Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D).
   d) Trace (C) et (D) dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Problème 3

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + x + 1$.
1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique telle que $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$.
   b) Déduis le signe $g(x)$ de suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
On note (C) la représentation graphique de dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2 cm)
1) a) Etudie la continuité de f en 0.
   b) Etudie la dérivabilité de f en 0.
2) Calcule la limite de f en $+\infty$ et étudie la branche infinie de (C) en $+\infty$.
3) a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
   b) Déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
4) Montre que $f(\alpha) - \alpha$.
5) Trace (C).

Problème 4

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.
1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) Calcule $g(1)$ et en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.
4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à (C).
   b) Etudie la position relative de (D) et (C).
5) Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
6) Trace (C), (D) et (T).

PARTIE C : Calcul d'aire

Soit la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{(\ln x)^2}{2}$.

1) Démontre que h est une primitive de f.

2) Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 5

A// Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^3 - 2\ln x$.

1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.

2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) Calcule $g(1)$ et en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B// On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - x + 2$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. (Unité graphique : 2cm)

1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.

2) a) Calcule $f'(x)$ et vérifie que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.

3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[1;+\infty[$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C).

b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

5) Trace (C), (D) et (T).

6) Calcule en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 6

A// On donne la fonction g définie par : $g(x) = 2x\ln x + x - 1$ sur $]0;+\infty[$.

1) Calcule la limite de g en 0 et en $+\infty$.

2) Dresse le tableau de variation de g.

3) Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de g sur $]0;+\infty[$.

B// Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2\ln x - x - 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. (C) sa courbe représentative et la droite $(\Delta) :\ y = -x - 1$.

1) Détermine D_f et les limites aux bornes de D_f.

2) Etudie la continuité de f en 0 et la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement ce résultat.

3) Montre que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

4) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

5) a) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$.

b) Vérifie que $\alpha \in [2;\ 2{,}5]$ et donne la valeur approchée de α à 10^{-2} près.

6) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement ce résultat.

7) Trace la courbe (C) et la droite (Δ) dans un même repère.

8) Représente et calcule l'aire du domaine délimité par (C), (Δ) et les droites $x = 1$ et $x = e$.

Problème 7

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$, par $g(x) = 2x^2 + \ln x$.

1) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

2) a) Montre que $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]0;+\infty[$.

b) Montre que $0{,}548 < \alpha < 0{,}549$.

3) Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{2x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1) a) Détermine la limite de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

b) Détermine la limite de f en $+\infty$.

c) Montre que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C).

Etudie la position de (C) par rapport à l'asymptote (D).

2) a) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x^2}$.

b) Dresse le tableau de variation de f.

3) a) Montre que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$.

b) Donne alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4) a) Calcule les coordonnées du point de (C) où la tangente est parallèle à (D).

Donne une équation de cette tangente (T).

b) Trace (C), (D) et (T) dans le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

c) Soit λ un réel supérieur à $\frac{1}{e}$. Détermine l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (D) et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$.

Calcule la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm sur chaque axe.

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ et (C_h) sa courbe représentation graphique.

1) a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudie les limites de h aux bornes de D_h.

c) Montre que $\forall x \in D_h, h'(x) = \frac{x^2-8}{x^2-4}$. En déduis le sens de variation de h.

d) Dresse le tableau de variation de h.

2) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C_h) à l'infini.

Précise la position relative de (C_h) par rapport à (Δ).

b) Montre que le point $A(0; -2)$ est un centre de symétrie de (C_h).

c) Place le point A, puis trace (C_h) et (Δ).

3) A l'aide d'une intégration par parties, calcule en cm^2 l'aire de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe (C_h), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

On rappelle que : $\frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$ et $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$.

On donne : $h(-2\sqrt{2}) \approx -6{,}59$ et $h(2\sqrt{2}) \approx 2{,}59$.

Problème 9

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + \frac{1}{2} - x\ln x$.

1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.

2) a) Montre que $\forall x \in\ ]0; +\infty[, g'(x) = -\ln x$.

b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $3{,}1 < \alpha < 3{,}2$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x(1 - x\ln x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

1) a) Montre que f est continue en 0.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0.

c) Calcule la limite de f en $+\infty$.

d) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat.

2) On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

a) Montre que $\forall x \in\ ]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3) Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2+\alpha}{4}$.

4) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Détermine une équation de (T).

5) Trace (C) et (T). (On prendra $\alpha \approx 3{,}2$ et $f(\alpha) \approx 3{,}3$).

Partie C : Calcul d'aire

Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=\frac{1}{9}x^3(-1+3\ln x)$.

1) Détermine la dérivée de h.

2) En déduis la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ telle que $F(1)=e$.

3) Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.

Problème 10

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie par : $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{x}{x+1}$.

1) Détermine le domaine de définition de g.

2) a) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.

b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montre que $\forall x\in]0;+\infty[, g'(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2}$.

b) Donne alors le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3) En déduis que $\forall x\in]0;+\infty[, g(x)>1$.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

1) Montre que f est continue en 0.

2) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation graphique.

3) a) Calcule la limite de f en $+\infty$.

b) Montre que $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=g(x)-1$.

c) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

5) Construis (C) et (T).

Problème 11

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{x+1}{x-3}+\ln|x-3|$.

1) a) Détermine l'ensemble de définition de g.

b) Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2) a) Montre que $\forall x\in]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[, g'(x)=\frac{x-7}{(x-3)^2}$.

b) En déduis les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α telle que $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$ par : $f(x)=(x+1)\ln|x-3|$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 3 et $+\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat de la limite en 3.

2) a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Montre que $\forall x\in]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[, f'(x)=g(x)$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresse alors son tableau de variation.

4) Montrer que $f(\alpha)=\frac{(\alpha+1)^2}{3-\alpha}$.

5) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.

6) Trace (C). (On prendra $\alpha=0{,}8$)

PARTIE C : Calcule d'aire

1) a) Détermine les réels a, b et c tels que $\forall x\in]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[, \frac{x^2+2x}{3-x}=ax+b+\frac{c}{3-x}$.

b) En déduis la valeur de $I=\int_0^2\frac{x^2+2x}{3-x}dx$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calcule en cm^2 l'aire de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

PARTIE D : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]3;+\infty[$.

1) Montre que h réalise une bijection de $]3;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.

a) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0.

b) Calcule $(h^{-1})'(0)$.

3) Construis (C') la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.

Problème 12

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 - 2\ln x$.

1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{3}x$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat en 0.

2) a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).

4) Montre que $f(\alpha) = \frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$.

5) a) Détermine le point A de (C) en lequel la tangente (T) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{3}$.

b) Détermine l'équation réduite de cette tangente (T).

6) Construis (C), (Δ) et (T).

PARTIE C : Calcul d'aire

1) Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.

En utilisant une intégration par partie, calcule l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la région limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$.

2) Détermine $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Problème 13

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x(\ln x)^2 - 1$.

1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \ln x(\ln x + 2)$.

b) En déduis les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $2{,}02 < \alpha < 2{,}03$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{\ln x} \text{ si } x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

1) a) Montre que f est continue en 0.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0, puis donne une interprétation graphique.

2) a) Calcule la limite de f en 1 et en $+\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat en 1.

3) a) Montre que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.

c) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4) Montre que $f(\alpha) = \alpha - 1 + \sqrt{\alpha}$.
5) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).
6) Construis (C) et (Δ).

Problème 14

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$.
1) Justifie que l'ensemble de définition de g est $D_f =]-\infty; 0[$.
2) Calcule les limites de g en $-\infty$ et 0.
3) a) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty; 0]$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x\ln(-x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm)
1) a) Montre que f est continue en 0.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0.
2) a) Calcule la limite de f en $-\infty$.
b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.
3) a) Montre que $\forall x \in]-\infty ; 0[, f'(x) = 2g(x)$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4) Ecris l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5) Trace (C) et (T).

PARTIE C : Calcul d'aire

On donne $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2\ln(-x) - \frac{1}{2}x^2$ pour $x < 0$.
1) Justifie que F est une primitive de f.
2) Soit α un réel tel que $-1 < \alpha < 0$.
Calcule l'aire A(α) du domaine du plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \alpha$.
3) En déduis la limite de A(α) lorsque α tend vers 0.

Problème 15

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x\ln x$.
1) a) Justifie que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$.
b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation. (*On ne calculera pas les limites de* g).
2) En déduis que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + x\ln x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. Unité graphique : 4 cm
1) a) Etudie la continuité de f en 0.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0.
c) Démontre qu'une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O est : $y = x$.
d) Démontre que :
- $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{T})$ sur $]0; 1[$.
- $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{T})$ sur $]1; +\infty[$.
2) Démontre que la droite (OI) est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
3) a) On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1 - x}{(1 + x\ln x)^2}$.
b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation
4) Construis la droite $(\mathcal{T})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère $(O; I; J)$.

Partie C

1) a) Justifie que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) \leq 1$.

   b) Démontre que : $\forall x \in [1;e], 1-\frac{1}{1+x} \leq f(x)$.

2) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

   Démontre que : $16(e-1)+16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$.

Problème 16

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1) a) Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.

   b) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) a) Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, calcule $g'(x)$.

   b) Détermine le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) Etudie les variations de g, puis dresse son tableau de variation.

3) a) Calcule $g(1)$ et $g(2)$. Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $[1;2]$.

   b) En déduis un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

   c) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, g(x)>0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x)<0 \end{cases}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthogonal (O, I, J).
(Unité graphique : $\mathrm{OI}=2$ cm et $\mathrm{OJ}=4$ cm).

1) a) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b) Interprète graphiquement les résultats ci-dessus.

2) a) Démontre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$.

   b) En déduis les variations de f.

   c) Démontre que $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

   d) Dresse le tableau de variation de f. On prendra $\alpha=1{,}8$.

   e) Construis $(\mathcal{C})$.

Partie C

1) Démontre que pour tout $x \geq 1, \frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2) On pose $\mathrm{E}_1=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x}dx$ et $\mathrm{E}_2=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

   a) Calcule E_1, puis en utilisant une intégration par parties calcule E_2.

   b) En déduis un encadrement de $\mathrm{K}=\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx$.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\frac{3}{2}$.

   a) Exprime $\mathcal{A}$ en fonction de K.

   b) En déduis un encadrement de $\mathcal{A}$ en cm^2.

Problème 17

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x+xe}{x^2}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (unité graphique : 2 cm)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=-2\ln x-xe+1$.

1) Détermine les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Etudie le sens de variation de g.

3) Montre que dans $[0{,}5;1]$ l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule notée α.

   Détermine un encadrement de α à 0,1 près.

4) En déduis le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction f

1) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifie que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$, puis étudie le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

3) Montre que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.
4) Donne le tableau de variation de f.
5) Construis $(\mathcal{C})$.
Partie C : Intégrale et suite
Soit $\mathrm{I}_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $\mathrm{A}_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t)dt$ pour tout entier naturel n. $\mathrm{I}_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$.
1) Montre à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathrm{I}_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$.
2) a) Montre que $\mathrm{A}_n = \mathrm{I}_n + e$.
b) Calcule I_0 et A_0.
c) Donne une interprétation géométrique de A_0.
3) Montrer que la suite (A_n) converge vers e.

Problème 18

A//
1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
a) Dresse le tableau de variation de g.
b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.
c) Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.
2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique (2 cm).
a) Dresse le tableau de variation de f.
b) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,01 près.
c) Trace (C) dans le repère.
B// On considère la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.
1) a) Prouve que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et précise $F'(x)$.
b) En déduis le sens de variation de F.
2) a) Vérifie que $\forall t \geq 1$, on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$.
b) Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{I}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $\mathrm{J}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$.
b-1) A l'aide d'une intégration par parties, calcule $\mathrm{I}(x)$.
b-2) A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$ pour $t > 0$, calcule $\mathrm{J}(x)$.
c) Déduis de ce qui précède que pour $x > 1$, on a : $\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.
d) On admet que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ, vérifie que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$.

Problème 19

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$.
On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
A// Etude de f_1
1) Détermine $\lim_{x\to0} f_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduit pour $(\mathcal{C}_1)$?
2) Etudie le sens de variation de f_1 et donne le tableau de variation f_1.
3) Donne une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(\mathcal{C}_1)$.
4) Détermine $\lim_{x\to0} f_2(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduit pour $(\mathcal{C}_2)$?
5) Calcule $f_2'(x)$ et donne le tableau de variation f_2.
B//
1) Etudie le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduis la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.
2) Trace $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans le même repère orthogonal.
C// m étant un entier naturel non nul, on pose $\mathrm{I}_m = \int_1^e f_m(x)dx$.
1) On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calcule $F'(x)$. En déduis I_1.
2) En utilisant une intégration par parties, montre que $\mathrm{I}_{m+1} = -\frac{1}{e} + (m+1)\mathrm{I}_m$.
3) Calcule I_2 puis l'aire en $cm2$ du domaine compris entre $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 20

Les parties A et B sont indépendantes.

A// Soit f la fonction définie $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, unité graphique : 2 cm.

1) Montre que, pour tout réel x positif : $f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$.

2) a) Etudie la limite de f en $+\infty$.

   b) Montre que la droite (D) d'équation $y\ =\ 2x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$, quand x tend vers $+\infty$.

   c) Etudie la position de $(\mathcal{C})$ et (D).

3) Etudie les variations de f.

4) Trace $(\mathcal{C})$ et (D).

5) Montre que, pour tout réel $\alpha, \alpha > 0$: $\int_0^{\alpha} e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.

6) Etablis que, pour tout réel $u, u \geq 0;\ \ln(1 + u) \leq u$.

7) En déduis que, pour tout réel $\alpha, \alpha > 0$: $\int_0^{\alpha} \ln(1 + 2e^{-3x})\, dx \leq \frac{2}{3}$.

8) Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par les droites d'équations $x = 0$; $x = \alpha, y = 2x$ et la courbe $(\mathcal{C})$.
   En déduis des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α.

B//

1) Etudie les variations de la fonction h définie dans l'intervalle $[2;4]$ par : $h : x \longmapsto h(x) = 2 - x + \ln x$; en déduis que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.
   Montre que l'image de l'intervalle $[2;4]$ par la fonction $g : x \longmapsto 2 + \ln x$ est incluse dans l'intervalle $[2;4]$.

3) Montre que en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

4) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier nature n : $|u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5) En déduis que (u_n) est convergente.

6. Détermine un entier N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.

Problème 21

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g : x \mapsto g(x) = x - 1 - x\ln x$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_g de g puis calcule les limites de g aux bornes de D_g.

2) g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

   a) Détermine g' puis étudie le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

   b) Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variations.

   c) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ I;\ J)$ d'unité graphique : 2 cm. $(\mathcal{C})$ désigne la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f : x \mapsto f(x) = |x^2 - 1| + \ln|x - 1|$, si $x \leq 0$ et $f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, si $x > 0$.

1) D_f désigne l'ensemble de définition de la fonction f.

   a) Détermine D_f.

   b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f.

2) Etude de f en -1 :

   a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -1.

   b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

3) Détermination de la fonction dérivée, notée f', de la fonction f.

   a) Calcule $f'(x)$ pour $x \leq 0$.

   b) Montre que : $\forall x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$.

   c) Donne le sens de variation de f puis dresse son tableau de variations.

4) Construction de la représentation graphique de f :

   a) Précise les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

   b) trace $(\mathcal{C})$.

Partie C

1) Montre que la fonction $H : x \mapsto -x + (x - 1)\ln|x - 1|$ est une primitive sur $]-\infty, 1[$ de la fonction $h : x \mapsto \ln|x - 1|$.

2) Calcule l'aire A, en cm^2, de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

Problème 22

A//

1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

b) Calcule $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

c) Résous l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

d) Etudie le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

e) Montre que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1\,;\ e^3+1]$, et étudie le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1\,;+\infty[$.

2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.

a) Détermine $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x)$ et prouve que $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = 0$.

b) Calcule $\varphi'(x)$ et montre que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

c) Montre que φ est croissante sur l'intervalle $]1\,;\sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.

B// On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.

1) Vérifie que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.

2) En déduis :

a) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

b) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3) Montre que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) \le \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4) Reproduis et complète le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5) Représente graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Problème 23

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie C, cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

Partie A :

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$

a) Montre que la fonction g est dérivable et que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$.

b) Etudie les variations de la fonction g puis détermine le signe de $g(x)$.

2) a) Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Montre que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donne le tableau de variations de f.

Partie B :

$(\mathcal{C})$ désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, unité graphique 2 cm.

1) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

a) Etudie le sens de variation de h puis montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0{,}4\,;\ 0{,}7]$.

b) Montre que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$.

2) a) Vérifie que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

b) Utilise les résultats de la question 1) a) pour déterminer les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Δ).

3) Construis $(\mathcal{C})$ et (Δ) dans le repère ortho normal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

4) a) Calcule au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

b) En déduis l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Partie C :

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle $[0{,}4\,;\ 0{,}7]$.
- α est le réel mis en évidence au B// 1).

- φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x}$.
- u est la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) Montre qu'on a pour tout $x \in \mathrm{I}$:
   a) $\varphi(x) \in \mathrm{I}$.
   b) $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$.
   c) $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$.
2) a) Montre qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$ puis en déduis par récurrence qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$.
   b) Conclus alors quant à la convergence de la suite u.
3) Détermine un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donne à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

Problème 24

Partie A :

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Unité 2 cm.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Démontre que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
3) Calcule $f'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f.
4) a) Démontre que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donne l'équation de la tangente (T) à (C) au point I.
   b) Etudie la position de (C) par rapport à (T).
5) Trace (C) et (T) dans le même repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ du plan.
6) a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'intégrale $\mathrm{I} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$.
   b) Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), (T) et la droite d'équation $-\frac{1}{2}$.

Partie B :

Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \frac{1}{2}f(\cos x)$ où f est la fonction définie en A).

1) Vérifie que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sin x}$.
2) Calcule l'intégrale $\mathrm{K} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$.
3) Soit $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\mathrm{I}_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x}dx$.
   a) Calcule I_0 et I_1.
   b) Calcule l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x . \sin x\, dx$.
   c) En déduis l'expression de $\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+2}$ en fonction de n puis calcule $\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4$ et I_5.

Problème 25

Partie I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$.

1) Précise l'ensemble de définition D_f de f; étudie sa continuité et sa dérivabilité en énonçant le théorème utilisé.
2) a) Etudier la dérivabilité de f' fonction dérivée de f, et en déduis les variations de f'.
   b) Soit F la restriction de f' à l'intervalle $\mathrm{I} =]-1; 0]$. Démontre que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser. En déduis que dans I l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique notée α. On ne cherchera pas à calculer α, mais on montrera que $\alpha > -\frac{1}{2}$.
   c) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.
   d) Des résultats précédents, déduis le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_f$, et les variations de f.
3) Détermine les limites de f aux bornes de D_f.
4) Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} h(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$.
   a) Démontre que h est le prolongement par continuité de f en 0.
   b) Etudie la dérivabilité de h.

Conclusion de la partie I : Donne le tableau de variation de f et construis sa courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ en précisant l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Partie II

$\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{11}{2}$.

1) Soit $C' = S(C)$ (image de C par S). Construis (C') dans le même repère que (C).
Soit g la fonction admettant (C') comme courbe représentative dans le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Vérifie que $g(x) = (x+1)\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$ et précise D_g ensemble de définition de g.

2) Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

Partie III

1) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) < 1 < g(n)$. En déduis l'encadrement suivant de e : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
Précise cet encadrement si $n = 1$.
Soit $\ell(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell(n)$ est majoré par $\frac{4}{n}$ et minoré par $\frac{2}{n}$.

2) Donne un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de e permet d'obtenir une valeur approchée de à 10^{-3}
c'est-à-dire $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 10^{-3}$.

Problème 26

Partie I

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$.
Soit (C_k) la courbe représentant les variations de f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unité (5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées). On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x$.

1) Etudie le sens de variation de g.
2) En déduis que pour tout réel α positif ou nul, $\ln(1+\alpha) \leq \alpha$.

Partie II

1) Calcule $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$ et en déduis le sens de variation de la fonction de f_1.
2) Montre que pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$. En déduis la limite de f_1 en $+\infty$.
3) Dresse le tableau de variation de f_1.

Partie III

1) Calcule $f_k'(x)$ pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$ et en déduis le sens de variation de la fonction f_k.
2) Montre que pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$. En déduis la limite de f_k en $+\infty$.
3) a) Dresse le tableau de variation de f_k.
b) Montre que pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$, on a : $f_k(x) \leq \frac{k}{2}$.
4) Détermine une équation de la tangente T_k à (C_k).
5) Soit p et m deux réel strictement positifs tels que $p < m$. Etudie la position relative de (C_p) et (C_m).
6) Trace les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_1 en 0 dans le repère orthogonal du plan.

Partie IV

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe (C_k) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1) Sans calculer $A(\lambda)$, montre que $A(\lambda) \leq \int_0^\lambda kxe^{-x}dx$. (On pourra utiliser les résultats de la question préliminaire I)
2) Calcule à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $\int_0^\lambda kxe^{-x}dx$.
3) On admet que $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} A(\lambda) \leq k$.
Interprète graphiquement ce résultat.

FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Les propriétés

Exercice 1

Ecris plus simplement les nombres suivants :

$A=\mathrm{e}^{\ln 4}$; $B=\mathrm{e}^{\ln 3}.\mathrm{e}^{\ln 5}$; $C=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}\right)-e^{\ln 7}$; $D=e^{\ln 1}-1$; $E=e^{\ln\frac{1}{5}}+e^{\ln\frac{4}{5}}$; $F=3\ln(\ln e)-e^{\ln 1}$

$G=e^{\ln\sqrt{e}}-\sqrt{9e^{\ln e}}$; $H=e^{\left(\ln 3^{2}-\ln 2\right)}$; $I=\left(\mathrm{e}^{\ln 6}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\ln 6}+1\right)$; $J=\ln(e^{3}+1)-\ln(1+e^{-3})$.

Exercice 2

Démontre pour tout nombre réel x, les relations suivantes :

1) $\ln(e^{x}+e^{-x})=x+\ln(1+e^{-2x})$; 2) $x+\ln(1+e^{-x})=\ln(1+e^{x})$; 3) $\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

4) $\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$; 5) $\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Résolution d'équations, d'inéquations et systèmes

Exercice 3

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)$ $\mathrm{e}^{x}=-2$; $b)$ $2\mathrm{e}^{x}-1=0$; $c)$ $\mathrm{e}^{2x-1}=e^{3-2x}$; $d)$ $\mathrm{e}^{x^{2}+7}=e^{-3x+5}$; $e)$ $-1+2\mathrm{e}^{-x}=0$; $f)$ $\mathrm{e}^{3x+2}=4$

$g)$ $\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}=2$; $h)$ $\frac{\mathrm{e}^{x}}{1-2e^{x}}=5$; $i)$ $(\mathrm{e}^{x}-3)(e^{x}+2)=0$; $j)$ $\mathrm{e}^{x}(e^{2x}-4)=0$; $k)$ $\frac{1}{2+e^{x}}=2e^{-x}$

$l)$ $\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^{x}+4=0$; $m)$ $4\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+2=0$; $n)$ $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}-3=0$; $o)$ $2\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}-3=0$; $p)$ $\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{e^{x}-1}=7$

$q)$ $\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}-8e^{x}=0$; $r)$ $\mathrm{e}^{4x}-4\mathrm{e}^{2x}-21=0$; $s)$ $\mathrm{e}^{-2x}-7\mathrm{e}^{-x}+6=0$; $t)$ $\mathrm{e}^{3x+1}+4\mathrm{e}^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

$u)$ $4^{x}+2^{x+1}-3=0$; $v)$ $5^{2x}+5^{x}-2=0$; $w)$ $2^{2x+1}+2^{x}-105=0$; $x)$ $2^{2x+3}-3.2^{x+1}+1=0$.

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$a)$ $\mathrm{e}^{x}>2$; $b)$ $\mathrm{e}^{3x-1}\leq e^{2x+4}$; $c)$ $\mathrm{e}^{x^{2}-2}\leq e^{4-x}$; d) $e^{\frac{1}{x}}>e^{x-2}$; $e)$ $e^{2x+3}<3$; $f)$ $e^{-x}\leq 0$; $g)$ $2\mathrm{e}^{x}-1\geq 0$;

$h)$ $3e^{2x}+\mathrm{e}^{x}-4<0$; $i)$ $e^{2x}-4\mathrm{e}^{x}-5\leq 0$; $j)$ $2e^{2x}-3\mathrm{e}^{x}+2>0$; $k)$ $e^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+3\geq 0$;

$l)$ $3e^{6x}+5\mathrm{e}^{3x}-2>0$; $m)$ $2e^{3x}-2e^{2x}-20\mathrm{e}^{x}-16\leq 0$; $m)$ $(\mathrm{e}^{x}-3)(2-e^{x})\geq 0$.

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes équations suivants :

1) $\begin{cases} e^{x+y}=3 \\ e^{x-y}=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3e^{x}+e^{y}=13 \\ e^{x}-2e^{y}=-5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} e^{x}+e^{y}=7 \\ e^{x+y}=10 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} e^{4x}\times e^{y}=e^{-2} \\ xy=-2 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} e^{x}+2e^{y}=3 \\ x+y=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{e^{x}}{e^{2y}}=1 \\ x-y=2 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} 3e^{x}-2\ln y=13 \\ 5e^{x}+3\ln y=9 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \ln(y+6)-\ln x=3\ln x \\ e^{6x}\times e^{y}=e^{-6} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} \ln(x+4)-\ln(y+1)=3\ln 2 \\ e^{x}-e^{2y+1}=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^{y}-y^{x}=0 \\ x^{4}-y^{8}=0 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} 2^{x}-2^{y}=8 \\ 2^{x}+2^{y}=2\sqrt{2} \end{cases}$; 12) $\begin{cases} 2^{x}-2^{2-y}=0 \\ 2^{x}-2^{2+y}=0 \end{cases}$; 13) $\begin{cases} 3^{x}\times 3^{2y-1}=1 \\ 3^{x+2}\times 3^{y}=3 \end{cases}$.

Exercice 6

On considère le polynôme : $P(x)=2x^{3}-9x^{2}-8x+15$.

1) a) Calcule $P(1)$.

   b) Vérifie que $P(x)=(x-1)(2x^{2}-7x-15)$.

2) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.

   b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$.

3) En déduis dans $\mathbb{R}$, la résolution de :

   a) L'équation : $2(\ln x)^{3}-9(\ln x)^{2}-8\ln x+15=0$.

   b) L'équation : $2e^{3x}-9e^{2x}-8e^{x}+15=0$.

   c) L'inéquation : $2e^{3x}-9e^{2x}-8e^{x}+15\leq 0$.

Exercice 7

Soit le polynôme P définie par $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$.

1) a) Calcule $P(1)$.

   b) Détermine les réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

3) En déduis dans $\mathbb{R}$, la résolution des équations suivantes :

   a) $4(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - \ln x + 1 = 0$.

   b) $e^{-3x} + 4 = e^{-2x} + 4e^{-x}$.

   c) $2^{3x+2} - 2^{2x+2} - 2^x + 2 = 0$.

   d) $4\left(\log_3 x\right)^3 - 4\left(\log_3 x\right)^2 - \log_3 x + 1 = 0$.

Calcul de limites

Exercice 8

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3 - e^x$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+x}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - e^x + 1$	4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+4)e^x$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x}$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x}$	7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{1+x}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - e^x + 1$
9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x+4}{e^x+5}$	10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	11) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-x}$	12) $\lim\limits_{x\to0} (x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$
13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$	14) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x - e^{-2x}$	15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$	16) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 2x + 1$
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - x^2 e^x$	18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+xe^x}$	19) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 + 2e^{-x}$	20) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - (x+1)e^{1-x}$
21) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^x - 1$	22) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x - 2x - 1}{e^x - x}$	23) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - x^2 e^x$	24) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x)$
25) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x - e^x$	26) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$	27) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$	28) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{1-x} - 1$
29) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x - \ln x}$	30) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(1-x^3)$	31) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$	32) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x+1)\mathrm{e}^{-x} - 1$
33) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - x + xe^{1-x}$	34) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 + xe^{-x}$	35) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x$	36) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$
37) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)(1+e^x)$	38) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} - x$	39) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \ln x$	40) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$
41) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-x})\ln x$	42) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + 1 + e^x$	43) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$	44) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2)\mathrm{e}^{-x} + x - 1$
45) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x + e^{-x})$	46) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 4e^x - 1$	47) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left\lvert\dfrac{1}{e^x - 1}\right\rvert$	48) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{2x} - 5e^x + 2$
49) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + e^{-\frac{x}{2}}$	50) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 4 + \dfrac{4}{e^x - 3}$	51) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{1+xe^x}$	52) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$

Détermination du domaine de définition

Exercice 9

1) $f(x) = 2 - x + xe^{1-x}$; 2) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$; 3) $f(x) = e^x - 4 + \frac{4}{e^x-3}$; 4) $f(x) = \ln x + 1 + e^x$
5) $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$; 6) $f(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$; 7) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; 8) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$; 9) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$
10) $f(x) = \ln|e^x|$; 11) $f(x) = \frac{e^{3x}-4x+1}{e^{2x}-4e^x-5}$; 12) $f(x) = e^{\sqrt{x-1}} + \frac{e^x}{x-2}$; 13) $f(x) = \frac{\ln x}{e^{-x}+e^x}$.

Dérivée

Exercice 10

1) $f(x) = x + 3 - e^x$; 2) $f(x) = 3xe^{2x} - 5e^x$; 3) $f(x) = 1 - x^2e^x$; 4) $f(x) = (x+1)e^{-x} + x$
5) $f(x) = (2+x)e^{-x} - 2$; 6) $f(x) = xe^x - e^x - 1$; 7) $f(x) = 1 - (1+x)e^{1-x}$; 8) $f(x) = x - 2 + 2e^{-x}$;
9) $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$; 10) $f(x) = e^{2x} - 2x + 1$; 11) $f(x) = (x^2+x+1)e^{-x} - 1$; 12) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$
13) $f(x) = \ln x + 1 + e^x$; 14) $f(x) = 2 - x + xe^{1-x}$; 15) $f(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$; 16) $f(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x-1}$.

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, démontre $f'(x)$ donnée :

1) $\begin{cases} g(x) = x - 2 + 2e^{-x} \\ f(x) = (x-3)e^x + 2x + 3 \\ f'(x) = e^x g(x) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} g(x) = 2e^x + 2x - 7 \\ f(x) = (2x-5)(1-e^{-x}) \\ f'(x) = e^{-x}g(x) \end{cases}$; 3) $\begin{cases} g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1 \\ f(x) = x^2e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) = xg(x) \end{cases}$

4) $\begin{cases} g(x) = xe^{-x} - 1 \\ f(x) = (x+1)e^{-x} + x \\ f'(x) = -g(x) \end{cases}$; 5) $\begin{cases} g(x) = (1-x)e^{1-x} + 1 \\ f(x) = xe^{1-x} + x - 2 \\ f'(x) = g(x) \end{cases}$; 6) $\begin{cases} g(x) = 1 + (2x-3)e^{-2x} \\ f(x) = x - (x-1)e^{-2x} \\ f'(x) = g(x) \end{cases}$

7) $\begin{cases} g(x) = 1 - x^2e^x \\ f(x) = \dfrac{x}{1+xe^x} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+xe^x)^2} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} g(x) = (2+x)e^{-x} - 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^{-x}-1} \\ f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^{-x}-1)^2} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} g(x) = 1 - (1+x)e^{1-x} \\ f(x) = \dfrac{x}{1-e^{1-x}} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1-e^{1-x})^2} \end{cases}$

Continuité et dérivabilité

Exercice 12

Etudie la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en $x_0 = 0$.

1) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^{-x}-1} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}+1} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} f(x) = (1-e^{-x})\ln x \quad \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} f(x) = x - e + \dfrac{e}{\ln x} \text{ si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = -\mathrm{e} \end{cases}$.

Problèmes

Problème 1

I// Soit φ la fonction définie sur R par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.
1) Etudie les variations de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une unique solution α et que $-1,28 < \alpha < -1,27$.
3) En déduis le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II// Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$. (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité: 4cm)
1) Montre que $f'(x) = \frac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$. En déduis le sens de variations de f.
2) Montre que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
Donne une équation de (T) et étudie la position de (C) par rapport à (T).
4) Calcule les limités de f en $+\infty$ et $-\infty$.
Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudie la position de (C) par rapport à (D).
5) Dresse le tableau de variation de f.
6) Trace dans un même repère (T), (D) et (C).

Problème 2

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Détermine la limite de $f(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interprète ces résultats.
2) a) Etablis que pour tout x réel $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$. En déduis le signe de $f'(x)$, puis le tableau de variation de f.
   b) Ecris l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 0$.
   c) Construis la courbe (C) et la tangente (T) dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité 2cm).
3) Démontre que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur $[-2; 4]$.
4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)e^{-x}$.
   a) Détermine les réels a et b pour que g soit une primitive de f.
   b) Calcule en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -2$ et $x = 4$. Donne une valeur approchée de l'aire à 10^{-2} près par défaut en cm^2.

Problème 3

A// Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1) a) Détermine les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat de la limite en $+\infty$.
   b) Calcule $\varphi'(x)$ et étudie son signe. Dresse le tableau de variation de φ.
2) Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée α est dans $[1 ; +\infty[$.
   Vérifie que $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$.
3) En déduis le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

B// On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. Leurs courbes sont respectivement notées (C_f) et (C_g)

1) Détermine les domaines de définition de f et de g puis calcule leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.
2) Montre que (C_f) et (C_g) admettent au point A(0 ; 1) une tangente commune (T). Donne une équation cartésienne de (T).
3) a) Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A.
   b) Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   c) En déduis la position relative des courbes (C_f) et (C_g).
4) a) Détermine une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   b) Détermine les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   c) Déduis une primitive H de $f - g$ sur $\mathbb{R}$.
   d) Calcule l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

Problème 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité graphique : 2 cm.
On note E le point de coordonnées $(\ln 2, \ln 2)$.

1) Soit a et b deux nombres réels, on désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$.
   a) Calcule la dérivée de g.
   b) Détermine a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$.
   a) Montre que pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$.
   b) Montre que les droites (D_1) d'équation $y = x + 2$ et (D_2) d'équation $y = x - 2$ sont asymptotes à la courbe représentative (C) de f respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c) Précise la position de la courbe par rapport à chacune de ces droites.
   d) Dresse le tableau de variation de f.
   e) Construis la courbe (C), (D_1) et (D_2).
3) a) Détermine une primitive de la fonction h définie tout nombre réel x par : $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$.
   b) En déduis une primitive de f qui s'annule pour $x = \ln 2$.

Problème 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative sur un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.
1) Etudie les variations de g.
2) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que : $0{,}35 \leq \alpha \leq 0{,}36$.
3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
3) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4) Démontre que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$. Détermine un encadrement de $f(\alpha)$ d'ordre 2.
5) a) Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
   b) Précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
6) Détermine une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
7) Trace $(\mathcal{D}), (\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C})$.

Partie C :

1) Détermine les réels a, b et c tels que la fonction P définie par : $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction de $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$.
2) a) Calcule en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2 de la partie limitée par $(\mathcal{C}), (\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.
   b) Calcule la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.

Problème 6

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)e^x - 1$.
1) Etudie les variations de g.
2) Calcule $g(0)$. En déduis que pour tout $x \neq 0$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).
On admettre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
1) a) Détermine la limite de f en $-\infty$.
   b) Etablis que $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$, puis détermine la limite de f en $+\infty$.
   En déduis que (C) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on donnera l'équation.
2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$.
3) Calcule, pour tout $x \neq 0, f'(x)$ et montre que $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
4) a) Donne le sens de variation de f.
   b) Dresse le tableau de variation de f.
5) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse nulle, écris l'équation de (T).
6) Trace (D), (T) et (C).

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$.
1) Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]2\,;2{,}5[$.
2) On pose $\mathrm{I} = [2\,;2{,}5]$.
   a) Démontre que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $g(x) \geq -20$ et $(e^x - 1)^2 \geq 40$.
   b) En déduis que si $x \in \mathrm{I}, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.
3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\mathrm{U}_0 = 2$ et $\mathrm{U}_{n+1} = f(\mathrm{U}_n)$.
   a) Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{U}_n \in \mathrm{I}$.
   b) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{U}_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|\mathrm{U}_n - \alpha|$ et que $|\mathrm{U}_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
   c) En déduis que (U_n) converge vers α.
   d) Détermine le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|\mathrm{U}_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.
   On donne : $\ln 2 \simeq 0{,}69$; $\ln 10 \simeq 2{,}3$; $\mathrm{e}^2 \simeq 7{,}39$; $\mathrm{e}^{2,5} \simeq 12{,}18$; $\frac{1}{\mathrm{e}^2 - 1} \simeq 0{,}15$; $\frac{1}{\mathrm{e}^{2,5} - 1} \simeq 0{,}09$;
   $(\mathrm{e}^2 - 1)^2 \simeq 40{,}83$; $(\mathrm{e}^{2,5} - 1)^2 \simeq 125$.

Problème 7

Partie A

Soit g la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

 a) pour tout nombre réel x, calcule $g'(x)$ puis étudie son signe suivant les valeurs de x.

 b) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty; 2[$.

 b) Justifie que : $-0{,}38 < \alpha < -0{,}37$.

4) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, h(x) > 0 \end{cases}$.

Partie B

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

On notera (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 1 cm).

1) a) Calcule la limite de f en $+\infty$.

 b) Calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Donne une interprétation graphique des résultats.

2) a) Justifie que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

 b) En déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

 b) Etudie les positions relatives de (C) et (D).

4) a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point J$(0; 1)$ est : $y = x + 1$.

 b) Etudie les positions relatives de (C) et (T).

5) Construis (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = -0{,}38$.

6) a) Détermine les réels a et b tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \to -xe^{-x}$.

 b) Calcule l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Problème 8

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 4e^{x} - 1$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$.

 b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{x}-2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 3cm sur (ox) et 1cm sur (oy)).

1) a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[$.

 b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f.

 c) Interprète graphiquement les résultats.

 d) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.

2) a) Montre que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{e^{x}g(x)}{(e^{x}-2)^2}$.

 b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.

3) Montre que $f(\alpha) = 4 + \frac{10}{e^{\alpha}-2}$.

5) Trace (C).

PARTIE C : Calcul d'aire

1) Montre que $\forall x \in D_f, \frac{e^{2x}+1}{e^{x}-2} = e^{x} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}-2}\right)$.

2) On désigne par (E) la partie du plan limitée par (C), la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ et les droites d'équations respectives $x = -\ln 5$ et $x = 0$. Calcule l'aire de (E) en cm².

Problème 9

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-\infty; 0]$ par : $g(x) = \frac{1}{2} + (x-1)e^x$.

1) a) Calcule la limite de g en $-\infty$ et en 0.

b) Justifie que $\forall x \in]-\infty; 0], g'(x) = xe^x$.

c) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

2) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty; 0]$.

b) Justifie que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; 0], g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B

le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \mathrm{I}; \mathrm{J})$. Unité graphique : 2 cm.

f est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + (x-2)e^x \ ; & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln x & ; \ \text{si } x > 0 \end{cases}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1) a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudie la continuité de f en 0.

d) Etudie la dérivabilité de en 0. Donne une équation des demi-tangentes au point d'abscisse 0.

2) On suppose que est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

a) Montre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = g(x) \\ \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1 + \ln x \end{cases}$.

b) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

c) Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

d) Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]-\infty; 0]$.

e) Justifie que l'axe des ordonnées est une branche parabolique à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

3) a) Justifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)$.

b) Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ). On prendra $\alpha = -2$.

Partie C

On désigne par $(\mathcal{D}_\lambda)$ la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = -2$.

1) En utilisant une intégration par parties, justifie que l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ de $(\mathcal{D}_\lambda)$ est égale à : $\left(20e^{-2} + 4(\lambda - 3)e^\lambda\right)$ cm^2.

2) Calcule la limite de $\mathcal{A}_\lambda$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

Problème 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(0; \mathrm{I}; \mathrm{J})$. Unité graphique : 2 cm.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Trouve les trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$.

2) Détermine les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

3) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$.

b) Justifie que la dérivée de la fonction f est liée à l'équation (E).

c) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f.

4) a) Démontre que les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = 2x - 2$ sont des asymptotes de la Courbe $(\mathcal{C})$ respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) La courbe $(\mathcal{C})$ admet-elle une autre asymptote ? si oui ; précise la.

5) Pour tout $x \in D_f$, on considère les points M et M' de $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.

a) Détermine les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?

6) Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et ses différentes asymptotes.

7) a) Détermine les réels α et β tels que pour tout $x \in D_f$, on ait : $f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$.

b) Soit k un nombre réel supérieur ou égal à 2. Détermine l'aire $\mathcal{A}(k)$ en cm^2 de la partie du plan contenant les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifiant : $\begin{cases} \ln 2 \leq x \leq \ln k \\ 2x - 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

c) Calcule la limite de $\mathcal{A}(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Problème 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

Partie A

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = 1 + e^x + \ln x$.

1) Calcule les limites de h en 0 et en $+\infty$.

2) Démontre que h est croissante sur $]0;+\infty[$.

3) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$ et que $0{,}11 < \alpha < 0{,}12$.

4) En déduis que $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, h(x) > 0 \end{cases}$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x + e^x - 1$.

1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) a) Justifie que : $g(\alpha) = -2 - (1-\alpha)\ln \alpha$.

b) Détermine à l'aide de la question A//-3) un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1} puis en déduis que $g(\alpha) < 0$.

3) a) Démontre que $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = h(x)$.

b) Dresse le tableau de variation de g.

4) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]\alpha;+\infty[$ une solution unique β tel que $0{,}11 < \beta < 0{,}12$.

5) En déduis que : $\begin{cases} \forall x \in]0;\beta[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\beta;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$.

Partie C

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = (1-e^{-x})\ln x, \ \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1) a) Justifie que $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \frac{(e^{-x}-1)x\ln x}{-x}$.

b) En déduis que f est continue en 0.

c) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat.

2) a) Calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3) a) Démontre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{e^{-x}}{x} g(x)$.

b) En déduis les variations de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

4) Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

5) Trace (T) et construire $(\mathcal{C})$. On prendra $\beta = 0{,}35$.

Problème 12

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$, par : $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. unité graphique : 4 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1) Etudie le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$ et détermine la limite de g en $+\infty$.

2) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans $[0;+\infty[$.

b) Prouve que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

2) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction f

1) a) Montre que, pour tout x appartenant à $[0;+\infty[, f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b) En déduis le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2) a) Montre que pour tout réel positif $x, f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

b) En déduis la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat trouvé.

3) a) Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

b) Donne un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

5) a) Etablis que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[, f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

b) Etudie le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0;+\infty[$. En déduis le signe de $u(x)$.

c) Déduis des questions précédentes la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).

6) Trace $(\mathcal{C})$ et (T).

Partie C : Calcul d'aire et étude d'une suite
1) Détermine une primitive F de f sur $[0;+\infty[$.
2) On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
   Calcule, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$.
   Donne une valeur décimale au mm^2 près de l'aire $\mathcal{A}$.
3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.
   a) Calcule v_0, v_1 et v_2.
      On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2.
   b) Interprète graphiquement v_n.
   c) Montre que, pour tout $n\geq 2, f(n+1)\leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$.
      En déduis la monotonie de la suite (v_n) à partie de $n=1$.
   d) Détermine la limite de la suite (v_n).

Problème 13

Partie A

1) Soient a, b et c des nombres réels. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(ax+b)e^{-x}+c$.
   On note g' la fonction dérivée de g.
   a) Calcule $g'(x)$.
   b) Le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$				+			0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	2	↗	$e^{-2}+2$	↘	2

      En utilisant les données numériques de ce tableau, établis que $a=1, b=-1$ et $c=2$.
      Ainsi, pour la suite du problème : $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$.
2) a) Montre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1;0]$. On note α cette solution.
   b) Détermine à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de α.
3) Etudie le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+1-xe^x$.
1) a) Détermine la limite de f en $+\infty$.
   b) Détermine la limite de f en $-\infty$.
2) a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montre que $f'(x)=g(x)$.
   b) Dresse en le justifiant, le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3) Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f et (D) la droite d'équation $y=2x+1$.
   a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]$.
   b) Donne une interprétation graphique de ce résultat.
   c) Etudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D).
   d) Trace (D) et $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère orthonormal $(0;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Partie C

Soient H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=-e^{-x}(1+x)$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=xe^{-x}$.
1) Montre que la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.
2) Hachure sur le graphique précédent le domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
3) Calcule l'aire S en cm^2 du domaine hachuré.

Problème 14

Partie A :

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x)=(1-x)e^{1-x}-1$.
1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) a) Démontre que, $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=(x-2)e^{1-x}$.
   b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) a) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α.
   b) Justifie que : $0{,}4<\alpha<0{,}5$.

4) En déduis que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B :

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm)

1) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) a) Démontre que f est une primitive de g.

b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Etudie la position relative de (D) et (C).

4) Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6) Démontre que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$.

7) Justifie que, pour tout nombre réel $x, f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$.

8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

On appelle β l'une de ces solutions. Démontre que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9) Trace (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}5$.

Partie C :

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1) Calcule $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2) Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 15

A// On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudie la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$).

2) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et précise la position de la courbe (C) par rapport à la droite (Δ).

3) a) Calcule la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.

b) Dresse le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.

c) Calcule $f'(1)$ et en déduis le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.

d) Dresse le tableau de variation de la fonction f.

4) Soit I l'intervalle [1,9 ; 2]. Démontre que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.

5) Trace la droite (Δ) et la courbe (C). (Unité graphique : 2 cm).

B// On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

1) Démontre que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

2) Etudie le sens de variation de la fonction g sur I et démontre que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

3) Démontre que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.

4) Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par : $U_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n)$.

On déduit de la question B//- 2) que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I.

On ne demande pas de le démontrer.

a) Démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$.

b) En déduis, en raisonnant par récurrence que : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$.

c) En déduis que la suite (U_n) converge et précise sa limite.

C//

1) En intégrant par parties, calcule l'intégrale $J = \int_1^\alpha xe^{x-1}dx$.

2) a) Détermine, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

b) Démontre qu'on peut écrire $\mathcal{A} = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Problème 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi;0[$ par $g(x)=\cos^2 x+\cos x-1$.

1) a) Montre que g est dérivable sur $]-\pi;0[$ et que $g'(x)=-\sin x(1+2\cos x)$.

b) En déduis que $g'(x)\leq 0$ pour tout $x\in\left]-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right]$ et que $g'(x)\geq 0$ pour tout $x\in\left[-\frac{2\pi}{3};0\right[$.

c) Dresse le tableau de variation de g.

2) a) Montre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique β sur $]-\pi;0[$ et que $\beta\in\left]-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right[$.

b) En déduis le signe de g sur $]-\pi;0[$.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{2\sin(2x)}{1+\cos x}+\frac{1}{2} \text{ si } x\in\,]-\pi;0] \\ f(x)=2-\frac{3}{e^{3x}+1} \text{ si } x\in\,]0;+\infty[\end{cases}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1) Etudie la continuité de f en 0.

2) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis en déduis une interprétation géométrique des résultats obtenus.

3) a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montre que pour tout $x\in\,]-\pi;0[$, on a : $f(x)=\frac{4(1-\cos x)\sin x\cos x}{1-\cos^2 x}+\frac{1}{2}$ et en déduis que $\lim_{x\to-\pi} f(x)=+\infty$.

c) En déduis les asymptotes de la courbe $(\mathcal{C})$.

4) a) Calcule $f'(x)$ pour tout $x\in\,]0;+\infty[$ puis en déduis le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

b) Montre que pour tout $x\in\,]-\pi;0[$, on a : $f'(x)=\frac{4g(x)}{1+\cos x}$ puis en déduis le sens de variation de f sur $]-\pi;0[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $]-\pi;+\infty[$.

5) Construis la courbe $(\mathcal{C})$, ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C :

On admet que tout $x\in[1{,}5;2]$, on a : $0\leq f'(x)\leq\frac{1}{2}$. **(R)**

1) Soit h la fonction numérique définie sur $[1{,}5;2]$ par : $h(x)=f(x)-x$.
Etudie les variations de h puis en déduis que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in[1{,}5;2]$.

2) Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0=1{,}5 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$ pour tout $x\in\mathbb{N}$.

a) Montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, U_n\in[1{,}5;2]$. (On pourra utiliser la relation (***R***))

b) Montre que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $|U_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_{n-1}-\alpha|$ et que $|U_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|U_0-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

c) En déduis que la suite (U_n) est convergente.

d) Détermine un entier p tel que pour $n\geq p$ on ait : $|U_n-\alpha|\leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de U_p à 10^{-3} près.

Problème 17

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1) a) Détermine la limite de u en $-\infty$.

b) Montre que, pour tout x réel, on a $u(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. En déduis la limite de u en $+\infty$.

2) a) Montre que $[u(x)+2x]$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

b) Montre que pour tout x réel, on a $u(x)>0$. En déduis le signe de $[u(x)+2x]$.

c) Interprète graphiquement ces résultats.

3) a) Montre que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u'(x)=\frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) Etudie les variations de la fonction u.

4) Trace la courbe $(\mathcal{C})$ et son asymptote oblique.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^x \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ et (Γ) sa courbe représentative.

1) Justifie que pour tout x réel on a $f(x)=\ln u(x)$ en utilisant la question A// 3) a).

2) Détermine les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$ et étudie les variations de f.

3) a) Détermine une équation de la droite (T) tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.

b) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=f(x)+x$. Montre que φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(0)=0$.

En déduis la position de la courbe (Γ) par rapport à la tangente (T).
4) Trace sur le même graphique la courbe (Γ) et la tangente (T).

Partie C :

1) On pose $\alpha = \frac{1-e^2}{2e}$, montre que $u(\alpha) = e$ et en déduis $f(\alpha)$.
2) A l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_\alpha^0 \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)dx$.
3) Soit V une primitive de u et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.
   a) Montre que $u\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right) = e^{-t}$.
   b) Justifie que $V \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est définie par : $(V \circ g)'(t) = \frac{1+e^{-2t}}{2}$.
   c) En déduis que $V(0) - V(\alpha) = (V \circ g)(0) - (V \circ g)(-1) = \int_{-1}^0 \frac{1+e^{-2t}}{2}dt$, puis que $\int_\alpha^0 u(x)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$.
4) On admet que pour tout x réel, $f(x) < u(x)$. Déduis des questions précédentes l'aire, en unité d'aires, du domaine limité par les courbes $(\mathcal{C})$, (Γ) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

Problème 18

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$.
1) Calcule $g'(x)$ et montre que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
2) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   Dresse le tableau de variation de g.
3) Donne le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^x)$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)
1) Calcule $f'(x)$ et montre que pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.
2) a) Détermine la limite de f en $-\infty$.
   b) Détermine la limite f en $+\infty$. On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4\frac{X}{(X-1)^2}.\frac{\ln X}{X}$.
3) Dresse le tableau de variation de f.
4) Trace (C).
5) Soit α un réel strictement positif.
   a) Vérifie que, pour tout réel x, $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$. En déduis la valeur de l'intégrale $\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x}dx$.
   b) Calcule, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $\mathrm{J}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,dx$.
      Donne une interprétation graphique de $\mathrm{J}(\alpha)$.

Partie C

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$.
1) Vérifie que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).
2) Montre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
3) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).

Problème 19

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x + 1 - e^{-2x}$.
1) Vérifie que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x - (x+3)e^{-2x}$ est solution de (E).
2) a) Montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
   b) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).
3) Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

PARTIE B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (2x-3)e^{-2x}$.
1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g, puis dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α telle que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
PARTIE C : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x-1)e^{-2x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Détermine les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
b) En déduis les variations de f et dresse le tableau de variation de f.
3) Montre que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1-\alpha}{3-2\alpha}$.
4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D) sur $\mathbb{R}$.
c) Montre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
5) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
6) Tracer (T), (D) et (C).
PARTIE D : Etude d'une bijection
Soit φ la restriction de f à l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
1) Montre que φ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
2) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ.
Calcule $(\varphi^{-1})'(1)$.
3) Construis (C') la courbe représentative de φ^{-1} dans le même repère que (C).
PARTIE E : Calcul d'aire
Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. $\mathcal{A}(\lambda)$ désigne l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.
1) Calcule $\mathcal{A}(\lambda)$.
2) Calcule $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Problème 20
Partie A : Résolution de l'équation différentielle
On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$.
1) Résous l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
a) Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
b) Montre que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de (1).
c) En déduis l'ensemble des solutions de (1).
3) Détermine la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.
Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.
1) Détermine la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g, puis dresse son tableau de variation.
3) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles : 0 et α telle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.
4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.
Partie C : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Détermine la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.
3) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
4) Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
5) Trace la courbe (C).
Partie D : Calcul d'aire
1) Soit m un réel négatif
Interprète graphiquement l'intégrale $\mathcal{A} = \int_m^0 f(x)dx$.
2) a) Calcule $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) En déduis la valeur de $\mathcal{A}$.
3) Calcule la limite de $\mathcal{A}$ lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 21

PARTIE A :

1) Détermine les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' + 2y' + y = 0$.

2) On considère l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 2y' + y = x + 3$.

a) Vérifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 1$ est solution de (E_2).

b) Démontre qu'une fonction f est solution de (E_2) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E_1).

c) En déduis les solutions de (E_2).

d) Détermine la solution de (E_2) qui vérifie : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Calcule pour tout réel $x, f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Etudie le sens de variation de f'.

c) Démontre que pour tout réel x positif, $f'(x) > 0$.

d) Calcule la limite de f en 0 et $+\infty$.

e) Dresse le tableau de variation de f.

2) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Précise la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D).

c) La courbe $(\mathcal{C})$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D).
Détermine les coordonnées de A.

3) Démontre que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[0; +\infty[$ une unique solution α, puis vérifie que $0 \leq \alpha \leq 1$.

4) Construis la droite (D), le point A, la courbe $(\mathcal{C})$ et tangente en A à la courbe $(\mathcal{C})$.

PARTIE C :

1) Démontre que sur $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à l'équation : $\frac{e^x}{e^x+1} = x$.

2) Soit la fonction h définie sur $[0; 1]$ par : $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

a) Calcule $h'(x)$ et réalise son tableau de variation sur $[0; 1]$.

b) En déduis que $\forall x \in [0; 1], h(x) \in [0; 1]$.

c) Calcule $h''(x)$ et étudie le sens de variation h' sur $[0; 1]$.

d) En déduis que $\forall x \in [0; 1]$, on a : $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$.

PARTIE D :

On définit la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0 \\ \mathrm{U}_{n+1} = h(\mathrm{U}_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n \in [0; 1]$.

2) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{U}_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|\mathrm{U}_n - \alpha|$.

3) En déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{U}_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis que la suite (U_n) converge vers α.

4) Détermine un entier p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et à l'aide de la calculatrice, propose une approximation décimale de U_p à 10^{-6} près. Que peut-on déduis de α ?

Problème 22

A// Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1) a) Calcule la fonction dérivée de f.

b) Dresse le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$ puis en déduis le signe de f' sur $[0; +\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

d) Montre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote $(\mathcal{D})$ que l'on déterminera.

2) a) Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule notée α.

b) Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

c) Construis $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ sur un même graphique.

B// Soit la fonction g définie sur l'intervalle $\mathrm{J} = [1; +\infty[$ par : $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudie les variations de g sur J puis en déduis que pour tout $x \in \mathrm{J}, g(x) \in \mathrm{J}$.

2) Montre que pour tout $x \in \mathrm{J}$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduis que pour tout $x \in \mathrm{J}$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3) Soit (U_n) la suite d'éléments de J définie par : $\mathrm{U}_0 = 1$ et $\mathrm{U}_{n+1} = g(\mathrm{U}_n)$ pour tout entier n positif ou nul.

a) Montre que pour tout entier n, positif ou nul on a : $|\mathrm{U}_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|\mathrm{U}_n - \alpha|$.

b) En déduis que pour tout entier n, positif ou nul on a : $|\mathrm{U}_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.
c) Détermine la limite de la suite (U_n).
d) Détermine un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $\left|\mathrm{U}_p - \alpha\right| \leq 10^{-3}$.
Calcule U_p à 10^{-3} près.

Problème 23

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
1) Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}, f(x) > 0$.
2) a) Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}, \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.
b) En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}, 2 + \cos x + \sin x > 0$.
c) Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3) a) Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}, e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
b) En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4) a) Montre que, sur l'intervalle $[0;\pi]$ l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.
b) Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5) Représente la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0;\pi]$.

Partie B

On veut calculer l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $t = 1$.
1) Montre que $A = 2e - 2 + \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)dt$.
2) On pose $\mathrm{I} = \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)dt$ et $\mathrm{J} = \int_0^1 (e^{1-t}\sin t)dt$.
a) À l'aide de deux intégrations par parties, montre que : $\mathrm{I} = e - \mathrm{J} - \cos(1)$ et $\mathrm{J} = 1 - \sin(1)$.
b) En déduis la valeur de I.
3) Détermine la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donne une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2+\cos x}$.
1) a) Montre que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
b) Calcule la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.
2) a) Détermine $\ln(f(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) Etudie le sens de variation de la fonction H.
c) Détermine le tableau de variation de H.
3) On appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$.
On ne demande pas de représenter (Γ). On appelle (Δ) la droite d'équation $y = -x + 1$.
a) Etudie la position relative de (Γ) et de (Δ).
b) Détermine les abscisses des points communs à (Γ) et (Δ).
4) a) Etablis une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0.
b) Etudie la position relative de (Γ) et (T).
5) Montre que la courbe (Γ) est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

Problème 24

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par $f_m(x) = e^{x-1} - mx$, où m est un paramètre réel.
On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Unité 2 cm.
1) Montre que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
2) Montre que la droite (Δ_m) d'équation $y = -mx$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_m)$ et détermine la position de cette droite par rapport à $(\mathcal{C}_m)$.
3) Etudie la fonction f_1 et trace avec soin la courbe $(\mathcal{C}_1)$ dans le repère.
4) Soit g_1 la restriction de f_1 à $[1;+\infty[$. Montre que g_1 admet une réciproque $(g_1)^{-1}$. Représente la courbe $(g_1)^{-1}$.
5) Calcule en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion du plan limitée par $(\mathcal{C}_1)$, la droite (Δ_1): $y = -x$, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \alpha$. $(\alpha < 1)$.

Problème 25

Partie A :

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=e^{-x}\ln x$.

1) Détermine la fonction dérivée de f et vérifie que $f'(x)$ a même signe que $g(x)=-\ln x+\frac{1}{x}$.

2) a) Etudie les variations de g et montre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.

b) Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0;\alpha[$ et $]\alpha;+\infty[$.

3) Vérifie que $f(\alpha)=\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduis de l'inégalité $\frac{3}{2}<\alpha<2$ en encadrement de $f(\alpha)$.

4) Achève l'étude de la fonction et trace sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

Partie B :

1) Montre que l'équation $g(x)=0$ est équivalente à l'équation $h(x)=x$ où h est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

2) a) Calcule $h'(x)$ et vérifier que $\forall x\in\left[\frac{3}{2};2\right]$ on a : $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\leq h'(x)\leq-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$.

En déduis qu'il existe un réel $k\in[0;1]$ tel que : $\forall x\in\left[\frac{3}{2};2\right], |h'(x)|\leq k$.

b) Prouve que pour tout couple de réels $(x\,;y)$ choisis dans $\left[\frac{3}{2};2\right]$ on a : $|h(x)-h(y)|\leq k|x-y|$.

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=h(U_n)$.

a) Montre que $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\in\left[\frac{3}{2};2\right]$.

b) En appliquant à $(U_n\ ;\ \alpha)$ l'inégalité établie dans 2) b), prouve que : $\forall n\in\mathbb{N}, |\mathrm{U}_{n+1}-\alpha|\leq k|\mathrm{U}_n-\alpha|$.

c) En déduis par un raisonnement par récurrence l'inégalité : $\forall n\in\mathbb{N}, |\mathrm{U}_n-\alpha|\leq k^n|\mathrm{U}_0-\alpha|$ et montre que la suite (U_n) est convergente. Quelle est la limite ?

4) Montre en utilisant les variations de h que $\mathrm{U}_{n+1}-\alpha$ et $\mathrm{U}_n-\alpha$ sont de signe contraires.

En déduis que α est compris entre U_n et U_{n+1}. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C :

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$ solutions de l'équation différentielle (E) : $y''+3y'+2y=\frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

1) a) Vérifie que la fonction f définie dans la partie A est une solution de (E).

b) Résous l'équation différentielle (E') : $y''+3y'+2y=0$.

2) a) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

Montre que g est une solution de (E) si et seulement si $g-f$ est une solution de (E').

b) En déduis toutes les solutions de (E).

Problème 26

Partie A :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2e^x-x-2$.

1) Détermine la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

3) On admet que l'équation $g(x)=0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifie que 0 en est une.

b) L'autre solution est appelé α. Montre que $-1{,}6<\alpha<-1{,}5$.

4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels x.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$.

1) Détermine la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite en $+\infty$).

2) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudie le sens de variation de f.

3) Montre que $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x)=0$ de la partie A.

En déduis un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6<\alpha<-1{,}5$).

4) Etablis le tableau de variation de f.

5) Trace la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

Partie C :

Pour tout entier naturel n, on note $\mathrm{I}_n=\int_0^{\pi}e^x\cos(nx)dx$.

1) Montre que pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi)=(-1)^n$ et que $\sin(n\pi)=0$.

2) A l'aide d'une intégration par parties montre que $I_n=\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}$.

3) Montre que, pour tout entier naturel n, $|I_n|\leq\frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$. En déduis $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$.

SUITES NUMERIQUES

Calcul des termes d'une suite

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{U}_n = 3n + 1$.
1) Calcule $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1$ et U_2.
2) Exprime les termes $\mathrm{U}_{n+1}, \mathrm{U}_{n-2}$ et U_{2n-3} en fonction de n.

Exercice 2

Soit la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{V}_n = n^2 + 2n - 1$.
1) Calcule $\mathrm{V}_0, \mathrm{V}_1$ et V_2.
2) Exprime les termes $\mathrm{V}_{n+1}, \mathrm{V}_{n-1}$ et V_{2n} en fonction de n.

Exercice 3

Soit la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathrm{W}_0 = 2 \\ \mathrm{W}_{n+1} = 2\mathrm{W}_n - 1 \end{cases}$.
1) Calcule W_1 et W_2.
2) Détermine les termes $\mathrm{W}_{n-1}, \mathrm{U}_{n-2}$ et U_{2n}.

Exercice 4

Soit la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{2\mathrm{U}_n+3}{\mathrm{U}_n+4} \end{cases}$. Calcule $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ et U_3.

Exercice 5

Soit la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0 \\ \mathrm{U}_1 = 1 \\ \mathrm{U}_{n+2} = \frac{1}{3}\mathrm{U}_{n+1} + \frac{1}{3}\mathrm{U}_n \end{cases}$. Calcule $\mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$ et U_4.

Représentation graphique d'une suite

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ représente sur $(0\mathrm{I})$ à l'aide de la droite d'équation $y = x$ les 4 premiers termes de la suite (U_n).

$a)$ $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} = -\mathrm{U}_n + 5 \end{cases}$; $b)$ $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{U}_n \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} = \frac{3}{5}\mathrm{U}_n + 1 \end{cases}$.

Raisonnement par récurrences

Exercice 7

Démontre par récurrence les propositions suivantes :

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 8

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 1 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \sqrt{2 + \mathrm{U}_n} \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n < 2$.

Exercice 9

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 4 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{9}{6-\mathrm{U}_n} \end{cases}$. Démontre que la suite (U_n) est minorée par 3, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n > 3$.

Exercice 10

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 1 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{3\mathrm{U}_n+4}{\mathrm{U}_n+3} \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathrm{U}_n \leq 2$.

Exercice 11

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 2 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{5\mathrm{U}_n - 1}{\mathrm{U}_n + 3} \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n \neq 0$.

Exercice 12

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_1 = \frac{3}{2} \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{2}{3 - \mathrm{U}_n} \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < \mathrm{U}_n < 2$.

Exercice 13

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 2 \\ \mathrm{U}_{n+1} = 2\mathrm{U}_n + 1 \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = 3 \times 2^n - 1$.

Sens de variations d'une suite

Exercice 14

Etudie le sens de variation des suites suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = 4 - 5n$; 2) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = \dfrac{n}{n+2}$; 3) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$; 4) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = n^2 - 2n + 5$.

5) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = -n^2 + 2n + 4$; 6) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = 2^n - 4$; 7) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2n}$; 8) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{U}_n = \dfrac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$.

Exercice 15

1) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 3 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{3\mathrm{U}_n - 4}{\mathrm{U}_n - 1} \end{cases}$. Etudie les sens de variation de (U_n) sachant que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n \geq 2$.

2) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = \frac{3}{2} \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{2}{3 - \mathrm{U}_n} \end{cases}$. Etudie les sens de variation de (U_n) sachant que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < \mathrm{U}_n < 2$.

3) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 1 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \sqrt{3 + \mathrm{U}_n} \end{cases}$. Etudie les sens de variation de (U_n) sachant que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathrm{U}_n \leq 3$.

4) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = e \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} = \ln(1 + \mathrm{U}_n) \end{cases}$. Etudie les sens de variation de (U_n).

Calcul de limite d'une suite et sa convergence

Exercice 16

Calcule la limite des suites suivantes et en déduis leurs convergences.

1) $\mathrm{U}_n = 4 - 5n$; 2) $\mathrm{U}_n = \dfrac{n}{n+2}$; 3) $\mathrm{U}_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$; 4) $\mathrm{U}_n = n^2 - 2n + 5$; 5) $\mathrm{U}_n = 3n - 1$; 6) $\mathrm{U}_n = 2^{n-1} - 1$.

7) $\mathrm{U}_n = -n^2 + 2n + 4$; 8) $\mathrm{U}_n = 2^n - 4$; 9) $\mathrm{U}_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2n}$; 10) $\mathrm{U}_n = \dfrac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$; 11) $\mathrm{U}_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 5}{n^2 - 1}$.

Suites arithmétiques

Exercice 17

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $\mathrm{U}_0 = 5$ et de raison -2.
1) Donne l'expression de U_n en fonction de n.
2) Calcule $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$ et U_{20}.
3) Calcule $\mathrm{S} = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots + \mathrm{U}_{20}$.

Exercice 18

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\mathrm{U}_0 = 3$ et $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{U}_n - 2$.
1) Calcule U_1 et U_2.
2) Montre que la suite (U_n) une suite arithmétique.
3) Exprime U_n en fonction de n.
4) Calcule $\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots + \mathrm{U}_n$.

Exercice 19

On considère (U_n) une suite arithmétique de raison r.

1) Calcule r et U_0 sachant que $\mathrm{U}_1 = 3$ et $\mathrm{U}_4 = 15$.
2) Calcule r et U_0 sachant que $\mathrm{S}_{2,4} = 15$ et $\mathrm{U}_6 = 20$.
3) Calcule r et S_{12} sachant que $\mathrm{U}_5 = 7$ et $\mathrm{U}_{12} = -8$.
4) Calcule n et r sachant que $\mathrm{U}_1 = -3, \mathrm{U}_n = 7$ et $\mathrm{S}_n = 12$.
5) Calcule U_0 et r sachant que $\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_3 = 9$ et $\mathrm{U}_1^2 + \mathrm{U}_2^2 + \mathrm{U}_3^2 = 35$.

Exercice 20

1) Détermine le réel x sachant que x, 4 et 6 sont en progression arithmétique.
2) Trouve 3 nombres consécutifs x, y et z d'une suite en progression arithmétique sachant : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x - 6y + z = 6 \end{cases}$

Suites géométrique

Exercice 21

Soit (V_n) la suite géométrique de premier terme $\mathrm{V}_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

1) Donne l'expression de V_n en fonction de n.
2) Calcule $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ et V_{30}.
3) Calcule la somme $\mathrm{S} = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{V}_{30}$.

Exercice 22

Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\mathrm{U}_n = \int_n^{n+1} e^{-2x} dx$.

1) a) Montre que $\mathrm{U}_n = \frac{1}{2} e^{-2n}(1 - e^{-2})$ pour tout entier naturel n.
   b) Montre que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
2) Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots + \mathrm{U}_n$.
   a) Exprime S_n en fonction de n.
   b) Montre que la suite (S_n) converge et précise sa limite.

Exercice 23

On considère (V_n) une suite géométrique de raison q.

1) Calcule q et V_0 sachant que $\mathrm{V}_2 = 4$ et $\mathrm{V}_5 = 32$.
2) Calcule V_5 et S_5 sachant que$q = 3$ et $\mathrm{U}_1 = 2$.
3) Calcule q et S_5 sachant que $\mathrm{V}_1 = 162$ et $\mathrm{V}_5 = 32$.
4) Calcule n et q sachant que $\mathrm{V}_1 = 48, \mathrm{V}_n = 243$ et $\mathrm{S}_n = 633$.
5) Calcule V_1 et q sachant que $\mathrm{V}_3 + \mathrm{V}_4 = 160$ et $\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_3 = 64$.

Exercice 24

1) Détermine le réel y sachant que 4, y et 25 sont en progression géométrique.
2) Trouve 3 nombres consécutifs x, y et z d'une suite en progression géométrique sachant : $\begin{cases} x + y + z = 403 \\ z - x = 312 \end{cases}$.

Exercices de perfectionnement

Exercice 25

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{16U_n - 12}{3U_n + 4}$.

1) Calcule U_1, U_2 et U_3.
2) On pose $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n - 2}$.
   a) Calcule V_0, V_1 et V_2.
   b) Montre que (V_n) est une suite arithmétique dont-on précisera la raison.
   c) Etudie le sens de variation de la suite (V_n).
3) a) Exprime V_n en fonction de n.
   b) En déduis l'expression de U_n en fonction de n.
   c) On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$. Exprime S_n en fonction de n.

Exercice 26

Soit la suite (U_n) définie dans $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} \mathrm{U}_1 = 2 \\ \mathrm{U}_{n+1} = 2\mathrm{U}_n - \frac{1}{3} \end{cases}$.

1) Détermine le réel a tel que la suite (V_n) définie par $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - a, \forall n \in \mathbb{N}^*$, soit une suite géométrique.
2) Exprime V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
3) Calcule $\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \cdots + \mathrm{U}_n$ en fonction de n.
4) Calcule la limite de la suite (U_n) et celle de la suite (S_n).

Exercice 27

On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 1 \\ \mathrm{U}_{n+1} = 2\mathrm{U}_n + 1 \end{cases}$ et $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n$.

1) Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Exprime, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.
3) Soit la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{V}_{n-1}$.
   a) Montre que pour tout entier naturel $n, \mathrm{S}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_0$.
   b) Calcule S_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

Exercice 28

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$.

1) Calcule u_1, u_2, v_1 et v_2.
2) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   a) Montre que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   b) Exprime w_n en fonction de n et précise la limite de la suite (w_n).
3) Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontre que ces deux suites sont adjacentes.
   Que peut-on en déduire ?
4) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
   a) Démontre que la suite (t_n) est constante.
   b) En déduis la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 29

On considère la suite U définie par : $\mathrm{U}_0 = 2, \mathrm{U}_1 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \mathrm{U}_n = \frac{4\mathrm{U}_{n-1} - \mathrm{U}_{n-2}}{3}$ et la suite V définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1}$. $(\mathbf{1})$

1) a) Calcule V_1.
   b) Exprime V_n puis V_{n-1} en fonction de U_{n-1} et U_{n-2}.
   c) Montre que V est une suite géométrique et exprime V_n en fonction de n.
2) a) Calcule la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + \cdots + \mathrm{V}_n$ en fonction de n.
   b) En utilisant $(\mathbf{1})$, calcule S_n en fonction de U_n et U_0.
      En déduis l'expression de U_n en fonction de n.
   c) Montre que la suite U converge et précise sa limite.

Exercice 30

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$.

1) Calcule a_1 et b_1.
2) Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$.
   a) Démontre que (d_n) est une suite géométrique. Détermine le premier terme d_0 et la raison q.
   b) En déduis une expression de d_n en fonction de n. Puis en déduis que : Pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n > 0$.
   c) Calcule la limite de la suite (d_n).
3) a) Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$.
      En déduis les variations des suites (a_n) et (b_n).
   b) Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_0 < a_n < b_n < b_0$.
   c) Déduis des questions 3.a) et 3.b) que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4) a) Déduis de la question 3.a) que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})$.
b) Déduis la limite de la suite (a_n), puis celle de la suite (b_n).

Exercice 31

On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$ et $v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$.

1) Calcule v_0.
2) Démontre que v_n est une suite géométrique de raison 2.
3) Exprime v_n en fonction de n.
4) Calcule la limite de v_n.
5) Exprime u_n en fonction de v_n puis en déduis la limite de u_n.
6) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$.
a) Démontre que : $S_n = (1 - 2^n)\ln 2$.
b) Justifie que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduis T_n en fonction de n.

Exercice 32

Soit (u_n) la suite définie par u_n= 0 et pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.
1) Calcule u_1 et u_2
2) a) Démontre que pour tout entier naturel non nul, $0 \leq u_n \leq 1$.
b) Démontre que la suite est croissante.
c) Que pouvez-vous en déduire ?
3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.
a) Démontre que la suite (v_n) est géométrique.
b) Calcule, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
c) Démontre que la suite (u_n) est convergente et détermine sa limite.

Exercice 33

On considère la suite numérique U définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_1 = \frac{3}{2} \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{2}{3-U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1) Calcule $\mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$ et U_4. La suite U est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
2) a) Montre que pour tout entier naturel n différent de zéro, $1 < \mathrm{U}_n < 2$.
b) Démontre que la suite U est décroissante.
3) Soit V la suite numérique définie par : $\mathrm{V}_n = \frac{\mathrm{U}_n-1}{2-\mathrm{U}_n}$, pour tout entier naturel n non nul.
a) Montre que la suite V est bien définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
b) Montre que V est une suite géométrique.
c) Exprime, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, V_n en fonction de n.
d) Calcule, en fonction de n, la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + \cdots + \mathrm{V}_{n-1}$.
e) Détermine la limite de V_n et celle de S_n.

Exercice 34

Soit a un paramètre différent de $\frac{1}{3}$ et (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = a \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{3\mathrm{U}_n+7}{3\mathrm{U}_n-1} \end{cases}$.
1) Détermine les nombres réels b et c tels que : Pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = b + \frac{c}{3\mathrm{U}_n-1}$.
2) Détermine les valeurs de a pour lesquelles (U_n) est une suite constante.
3) Dans la suite de l'exercice, on prendra $\mathrm{U}_0 = 3$ et on considère la suite (V_n) définie par : $\mathrm{V}_n = \frac{3\mathrm{U}_n-7}{3(\mathrm{U}_n+1)}$.
Calcule V_0, V_1 et V_2.
4) a) Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Calcule V_n en fonction de n puis en déduis U_n en fonction de n.
5) a) Montre que (V_n) est une suite convergente et calcule sa limite.
b) La suite (U_n) est-elle convergente ? Si oui, précise sa limite.

Exercice 35

Soit a un réel non nul. On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0 \ ; \ \mathrm{U}_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a\mathrm{U}_{n+1} = (a+1)\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1} \end{cases}$.

1) Pour quelle valeur de a la suite (U_n) est-elle arithmétique ?
   Dans la suite de l'exercice, on supposera que $a \neq 1$.
2) a) Démontre que la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Calcule V_n en fonction de n et de a.
3) a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{V}_{n-1}$.
   b) Calcule U_n en fonction de n et de a.
   c) Pour quelle valeurs de a la suite (U_n) est-elle convergente ?
   Précise alors la limite de la suite (U_n) en fonction de a.

Exercice 36

On considère la suite numérique $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathrm{U}_n = e^{2n-1}$.

1) a) Calcule $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$ et U_{n+1}.
   b) Démontre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   c) Exprime en fonction de n la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots + \mathrm{U}_n$.
   d) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}_n$.
   e) Trouve la valeur minimale de n telle que $\mathrm{S}_n \geq 10$.
2) Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{V}_n = \ln(\mathrm{U}_n)$. On pose $\mathrm{T}_n = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{V}_n$.
   Exprime le produit $\mathrm{P}_n = \mathrm{U}_0 \times \mathrm{U}_1 \times \ldots \times \mathrm{U}_n$ en fonction de T_n.

Exercice 37

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par $\mathrm{U}_0 = 4$ et $\mathrm{V}_0 = 9$ et pour tout entier naturel n :
$\mathrm{U}_{n+1} = \frac{2\mathrm{U}_n\mathrm{V}_n}{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}$ et $\mathrm{V}_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_n + \mathrm{V}_n)$.

1) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n > 0$ et $\mathrm{V}_n > 0$.
2) a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{V}_{n+1} - \mathrm{U}_{n+1} = \frac{(\mathrm{V}_n-\mathrm{U}_n)^2}{2(\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n)}$.
   b) En déduis que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n \leq \mathrm{V}_n$ et que $\mathrm{V}_{n+1} - \mathrm{U}_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\mathrm{V}_n - \mathrm{U}_n)$.
   c) En déduis que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{V}_n - \mathrm{U}_n \leq \frac{5}{2^n}$.
3) a) Démontre que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
   b) En déduis que les suites (U_n) et (V_n) convergent.
   c) Démontre que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ.
4) a) Démontre que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} \times \mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{U}_n \times \mathrm{V}_n$.
   b) En déduis la valeur exacte de ℓ.

Exercice 38

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an. En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année (2007+n). On a alors $r_0 = 40\,000$.

1) a) Calcule r_1 et r_2.
   b) Justifie que pour tout entier naturel n, on a : $r_{n+1} = 0{,}95 r_n + 200$.
2) Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\mathrm{S}_n = r_n - 4\,000$.
   a) Démontre que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Pout tout entier naturel n, exprime (S_n) en fonction de n. En déduis que, pour tout entier naturel n, on a :
   $r_n = 36\,000 \times 0{,}95^n + 4\,000$.
   c) La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifie.
   d) Détermine la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.
   e) Calcule une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011.

Exercice 39

En 2014, la foire gastronomique d'une commune a enregistré 6000 visiteurs. Une étude montre que chaque année, 80% des visiteurs de l'année précédente reviennent tandis que 2000 nouveaux visiteurs sont enregistrés.

On note U_0 le nombre de visiteurs en 2014 et U_n le nombre de visiteurs en $2014 + n$ $(n \in \mathbb{N})$.

1) Justifie qu'en 2015 le nombre de visiteurs U_1 est 6800.
2) Calcule le nombre de visiteurs en 2016.
3) On admet que, pour tout entier naturel $n, \mathrm{U}_{n+1} = 0{,}8\mathrm{U}_n + 2000$.
   On pose, pour tout entier naturel $n, \mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - 10000$.
   a) Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme -4000.
   b) Exprime, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.
   c) Justifie que, pour tout entier naturel $n, \mathrm{U}_n = 10000 - 4000(0{,}8)^n$.
4) a) Détermine le plus petit nombre entier naturel n pour lequel : $10000 - 4000(0{,}8)^n > 9000$.
   b) Détermine l'année à partir de laquelle le nombre de visiteurs dépassera 9000.

Exercice 40

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année (2015+n).

1) a) Détermine le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.
   b) Exprime X_{n+1} en fonction de X_n.
2) On considère la suite (U_n) définie par $\mathrm{U}_n = 60\,000 - \mathrm{X}_n$.
   a) Montre que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1er terme.
   b) Exprime U_n en fonction de n, en déduire X_n en fonction de n
   c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?
   d) Calcule la limite de la suite (X_n). Conclus.

Exercice 41

Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé.

La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries. On suppose que la population augmente de 6,5 % toutes les heures et que le biologiste rajoute 100 bactéries à la préparation toutes les heures.

On note R_n le nombre de bactéries présentes dans la population au bout de n heures.

On admettra que pour tout entier naturel n : $\mathrm{R}_{n+1} = 100 + 1{,}065\mathrm{R}_n$.

On introduit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\mathrm{U}_n = \mathrm{R}_n + \frac{100000}{65}$.

1) Montre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2) Exprime (U_n) en fonction de n puis en déduis l'expression de R_n en fonction de n.
3) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera t – il égal à 90 % de la capacité maximale du milieu ?

Exercice 42

Soit $n > 0$, un entier, on pose : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$ et $\mathrm{I}_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$ (qu'on ne cherchera pas à calculer).

1) Calcule $\mathrm{I}_0 + 2\mathrm{I}_1$, en déduis I_1 fonction de I_0.
2) Vérifie que $\mathrm{I}_0 + \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = 1$, en déduis I_2 fonction de I_0.
3) Montre que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et convergente.
4) Montre que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $\frac{1}{3(n+1)} \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   Quelle est la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$?
5) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que pour n de $\mathbb{N}$, on a : $\mathrm{I}_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}x^{n+1}dx$.
6) En observant que $\frac{1}{9} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \leq 3$ sur $[0; 1]$, en déduis que : $1 + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1)\mathrm{I}_n \leq 1 + \frac{9}{n+2}$.
7) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n\mathrm{I}_n$.

Exercice 43

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt$.

1) a) Soit φ la fonction définie sur $[0; 2]$ par : $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.
   Etudie les variations de φ sur $[0; 2]$. En déduis que, pour tout réel t dans $[0; 2]$, $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$.
   b) Montre que, pour tout réel t dans $[0; 2]$, on a : $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$.

c) Par intégration en déduire que : $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) \le u_n \le \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$.

d) On rappelle que : $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$. Montre que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors $3 \le \ell \le \frac{7}{2}$.

2) a) Vérifie que pour tout t dans $[0;2]$, on a : $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$. En déduis l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}dt$.

b) Montre que, pour tout t dans $[0;2]$, on a : $1 \le e^{\frac{t}{n}} \le e^{\frac{2}{n}}$. En déduis que $\mathrm{I} \le u_n \le e^{\frac{2}{n}}\mathrm{I}$.

c) Montre que (u_n) est convergente et détermine sa limite ℓ.

Exercice 44

On pose $\mathrm{I}_0=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x\,dx$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul, $\mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}x^n\sin 3x\,dx$.

1) a) Calcule I_0.

b) En utilisant une intégration par parties, calcule I_1.

2) a) En effectuant deux intégrations parties successives, détermine, lorsque $n \ge 1$, I_{n+2} en fonction de I_n.

b) Vérifie que $\mathrm{I}_3=\frac{\pi^2}{108}-\frac{2}{27}$.

3) Sans calculer l'intégrale I_n.

a) Montre que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b) Pour tout nombre n entier naturel non nul, compare I_n à $\int_0^{\frac{\pi}{6}}x^n\,dx$.

c) Détermine la limite de I_n.

Exercice 45

La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\mathrm{U}_0=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et pour tout entier $n \ge 1$, $\mathrm{U}_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1) Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

a) Calcule $f'(x)$ et en déduis la valeur de U_0.

b) Calcule U_1.

2) a) Prouve que la suite (U_n) est décroissante.

b) Montre que pour tout nombre $x \in [0;1]$ on a : $1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$.

En déduis que pour tout $n \ge 1$, $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le \mathrm{U}_n \le \frac{1}{n+1}$. (1)

c) En déduis que (U_n) converge et détermine sa limite.

3) Pour tout entier $n \ge 3$, on pose : $\mathrm{I}_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$.

a) Vérifie que pour tout $n \ge 3$, on a : $\mathrm{U}_n+\mathrm{U}_{n-2}=\mathrm{I}_n$.

Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \ge 3$, on a : $n\mathrm{U}_n+(n-1)\mathrm{U}_{n-2}=\sqrt{2}$.

b) En déduis que pour tout entier $n \ge 3$, on a : $(2n-1)\mathrm{U}_n \le \sqrt{2}$. (2)

c) A l'aide des inégalités (1) et (2) démontre que la suite $n\mathrm{U}_n$ est convergente et calcule sa limite.

Exercice 46

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} u_0=14 \\ u_{n+1}=5u_n-6 \end{cases}$, pour tout entier naturel n.

1) Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2) Montre que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$.

En déduis que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) a) Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n=5^{n+2}+3$.

b) En déduis que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28[100]$.

4) Détermine les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5) Montre que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Précise sa valeur.

Exercice 47

1) Calcule le P.G.C.D. de 4^5-1 et de 4^6-1.

Soit u la suite numérique définie par : $u_0=0, u_1=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$.

2) Calcule les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.

3) a) Montre que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=4u_n+1$.

b) Montre que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

c) En déduis, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.

4) Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

a) Montre que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b) Exprime v_n puis u_n en fonction de n.

c) Détermine, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

Exercice 48

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne l'équation d'inconnue complexe z :

(E) : $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0$.

1) Résous l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1.
On désigne z_2 par la 3ème solution.

2) Ecris z_0 et z_1 sous forme trigonométrique.

3) Vérifie que z_0, z_1 et z_2 sont dans cet ordre les trois premiers termes consécutifs d'une suite géométrique complexe (U_n) dont on précisera la raison.

4) Ecris U_4 et U_7 sous forme trigonométrique.

Exercice 49

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique le centimètre.
On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
On note A et B les points d'affixes respectives 8 et $4+4i$.

1) On considère la similitude directe S de centre O telle que : $S(A) = B$.

a) Justifie que la similitude directe S a pour écriture complexe : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.

b) Détermine le rapport et l'angle de S.

2) On considère les points A_n tels que : $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$.
On désigne par z_n l'affixe du point A_n.

a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = 8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$.

b) Démontre que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_{n+1}.

3) a) Place successivement les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.

b) Justifie que l'aire a_1 en cm², du triangle OA_0A_1 est 16.

c) Déduis du résultat précédent l'aire a, en cm², du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$.

Exercice 50

Partie A :

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E) : $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

1) Détermine les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

3) a) Développe, réduis et ordonne $(2z+1)\left[2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4\right] = 0$.

b) En déduis les solutions de (E).

4) Soit $z_0 = -\frac{1}{2}$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.
Exprime chacun des nombres complexes z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$ où unité est 1 cm.
On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.
S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1) a) Détermine l'écriture complexe de S.

b) Justifie que $\mathrm{S}(\mathrm{M}_0) = \mathrm{M}_1$ et $\mathrm{S}(\mathrm{M}_1) = \mathrm{M}_2$.

2) soit M_n un point du plan d'affixe z_n. On pose pour tout nombre entier naturel n, $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{S}(\mathrm{M}_n)$.
Justifie que $z_{n+1} = (1+i\sqrt{3})z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}.

3) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par $u_n = |z_n|$.

a) Démontre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et premier terme.

b) Justifie que la distance $\mathrm{OM}_{12} = 2048$.

Exercice 51

Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de 1er terme $\mathrm{U}_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.
Soit $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de 1er terme $\mathrm{V}_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.
Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1) a) Exprime U_n et V_n en fonction de n.
   b) Déduis-en z_n.
2) Démontre que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.
3) Soit le plan complexe (P) rapporté au repère orthogonal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n.
   a) Détermine la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}.
   b) Donne ses éléments caractéristiques.
4) Pour tout entier naturel $n, z_n = z_0 \times z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_n$.
   a) Exprime en fonction de n un argument de z_n.
   b) Démontre que si n est impair alors z_n est réel.

Exercice 52

Partie A :

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

1) a) Calcule $p(i)$.
   b) Détermine les nombres complexes a et b tels que $p(z) = (z-i)(z^2+az+b)$.
2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$.
3) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $p(z) = 0$.

Partie B :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$ où unité est 5 cm.

On pose $\begin{cases} z_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$ et on note A_n le point d'affixe de z_n.

1) a) Calcule z_1 et z_2.
   b) Place les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.
2) On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.
   b) Démontre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.
   c) Exprime U_n en fonction de n.
3) A partir de quel rang n_0 tous les points de A_n appartiennent-ils au disque de centre 0 et rayon 0,1 ?
4) Détermine la nature exacte du triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$.
5) On désigne par $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ la longueur de la ligne brisée $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$.
   a) Calcule ℓ_n.
   b) Etudie la convergence de la suite (ℓ_n).

Exercice 53

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$. On considère la suite de points M_n du plan d'affixes respectives non nulles z_n definies par $\mathrm{z}_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $\mathrm{z}_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}\mathrm{z}_n$.

1) Ecris $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ sous forme exponentielle complexe.
2) Calcule z_1, z_2 et z_3 et vérifie que z_3 est réel. Place les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
3) a) pour tout entier naturel n, calcule le rapport $\frac{\mathrm{z}_{n+1} - \mathrm{z}_n}{\mathrm{z}_{n+1}}$.
   b) En déduis que le triangle $\mathrm{OM}_n\mathrm{M}_{n+1}$ est rectangle et que $\mathrm{OM}_n\mathrm{M}_{n+1} = \sqrt{3}\mathrm{OM}_{n+1}$.
4) a) On pose $r_n = |\mathrm{z}_n|$. Montre que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b) Ecris r_n en fonction de n. En déduis la longueur $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$ en fonction de n.
5) On considère la longueur ℓ_n de la ligne brisée formée par les points $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 \ldots \mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n$.
   On a alors $\ell_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_k\mathrm{M}_{k+1}$
   a) Calcule ℓ_n en fonction de n.
   b) Détermine la limite de ℓ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 54

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(0, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

S est la similitude directe de centre 0, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. φ est l'application complexe associée à S.

1) Détermine l'expression de $\varphi(z)$ en fonction du nombre complexe z.

2) On pose $z_0 = 1 - i$ et $z_1 = \varphi(z_0)$.

a) Ecris z_0 sous forme trigonométrique.

b) Calcule le module r_1 de z_1 et détermine un argument θ_1 de z_1.

3) Pour tout nombre entier naturel n, on pose : $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ où θ_n désigne un argument de z_n et r_n son module.

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $z_0 = 1 - i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

a) Précise la nature de cette suite et donne les éléments caractéristiques.

b) Calcule z_n en fonction de n.

c) Calcule r_n et θ_n en fonction de n.

d) Précise la nature de chacune des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donne les éléments caractéristiques.

Exercice 55

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1) Résous l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

a) Vérifie que z_1 est une solution de (E).

b) Ecris z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c) Place les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et trace les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.

3) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1, z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{2} i\right)$.

4) a) Calcule les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

b) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1, M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On pose $K = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

a) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1, K_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.

b) Détermine le plus petit entier naturel n tel que : $K_n \geq 1000$.

Exercice 56

On considère la suite I définie par : $I_0 = \int_0^1 e^x dx$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

1) a) Calcule : $\int_0^1 (1-x)^n dx$.

b) A l'aide de l'encadrement $1 \leq e^x \leq e$ valable sur l'intervalle [0; 1], montre que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$.

c) Montre que la suite I est convergente et détermine sa limite.

2) a) Calcule I_0, puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

b) Etablis, en intégrant par parties, que $I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}$ (1).

3) On pose pour tout $n \geq 1, \mathrm{J}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots. + \frac{1}{n!}$.

a) En utilisant la relation (1), exprime J_n en fonction de I_0 et de I_n.

b) En déduis la limite J de la suite (J_n).

c) Justifie l'encadrement : $\frac{1}{(n+1)!} \leq \mathrm{J} - \mathrm{J}_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$.

Exercice 57

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)-n\ln(n)}{n}$.

1) Démontre que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$.

2) a) Démontre que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$.

(*On pourra utiliser un encadrement de* $\ln(x)$ *sur l'intervalle* $\left[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}\right]$).

b) En déduis que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$.

3) Sachant que $\int_1^2 \ln(x)dx = 2\ln(2) - 1$, déduis de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EQUATIONS DIFFERENTIEELLES

Equations différentielles d'ordre 1 sans second membre

Exercice 1

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$a)\ f' - 5f = 0$; $b)\ f' + 7f = 0$; $c)\ 7f' = 2f$; $d)\ 3f' + \frac{2}{3}f = 0$; $e) - 2f' + \sqrt{3}f = 0$; $f)\ 2f' + f = 0$.

$g)\ f' + \ln 2\, f = 0$; $h)\ 3f' + 2f = 6$; $i)\ \sqrt{3}f = f'$; $j)\ f' + \sqrt{2}f = 0$; $k)\ f' - 4f = 0$; $l)\ 2f' + 3f = 0$.

Solution d'une équation différentielle d'ordre 1

Exercice 2

Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

1) $f(x) = xe^{2x}$; $y' - 2y = e^{2x}$.
2) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $2y' + y = x^2 + 2x - 2$.
3) $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$; $y' + y = 2(x + 1)e^{-x}$.
4) $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$; $y' + 2y = e^{-2x}$.
5) $h(x) = 1 - 2xe^{2x}$; $y' - 2y = -2(e^{2x} + 1)$.

Exercice 3

A// Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = x^2 + 1$ et $g(x) = ax^2 + bx + c$.
Détermine les réels a, b et c tels que g soit une solution de (E).

B// On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$ et $u(x) = (\mathrm{a}x + \mathrm{b})e^x$.
Détermine les réels a et b pour que u soit une solution de l'équation (1).

C// Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 3y = \sin x$ et $g(x) = a\cos x + b\sin x$.
Détermine les réels a et b pour que g soit une solution de (E).

Exercice 4

Dans chacun des cas suivant, détermine la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

$a)$ $f' - f = 0$ et $f(2) = 0$; $b)$ $2f' + 3f = 0$ et $f(0) = 5$; $c)$ $-f' + 6f = 0$ et $f(3) = 1$.

$d)$ $f' + 3f = 0$ et $f(1) = 1$; $e)$ $2f' - 5f = 0$ et $f(1) = -1$; $f)$ $-f' + 2f = 0$ et $f(3) = -2$.

Exercice 5

1) Résous l'équation différentielle (E) : $2f' + f = 0$.
2) Détermine la solution particulière g dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (2 ; 1).

Exercice 6

1) Résous l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f de l'équation (E) qui s'annule en 0.

Exercice 7

1) Résous l'équation différentielle (E) : $4y' - 3y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f de l'équation (E) qui prend la valeur 1 en -4.

Equations différentielles d'ordre 1 avec second membre

Exercice 8

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

1) $y' = x^2 + x - 2$; 2) $y' = \cos 3x$; 3) $y'\sqrt{x} = 1$; 4) $y' = x + \sin x$; 5) $(x^2 + 1)y' = x$; 6) $xy' = 1$.
7) $x^3y' + x^2 + 1 = 0$; 8) $y' = 2$; 9) $y' = 1 + \tan^2 x$; 10) $y'\sin x - \cos x = 0$; 11) $y' = 3x$.

Exercice 9

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = x^2 + 1$.

1) Détermine une fonction polynôme g de degré deux solution de (E).
2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation (E') : $y' + 2y = 0$.
   a) Résous l'équation (E').
   b) Donne les solutions de l'équation (E).

Exercice 10

Soit l'équation différentielle $(E) : f' + 2f = 5\cos x$.

1) Résous l'équation différentielle $(F) : f' + 2f = 0$.
2) Détermine les nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a\cos x + b\sin x$ est une solution de (E).
3) Démontre qu'une fonction h est une solution de (E) si et seulement si $h - g$ est une solution de (F).
4) En déduis les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 11

On considère l'équation différentielle $(1) : y' - 2y = xe^{x}$.

1) Résous l'équation différentielle $(2) : y' - 2y = 0$.
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^{x}$.
   a) Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b) Montre que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de l'équation (1).
   c) En déduis l'ensemble des solutions de l'équation (1).
3) Détermine la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 12

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 2x + 1 - e^{-2x}$.

1) Vérifie que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x - (x + 3)e^{-2x}$ est solution de (E).
2) a) Montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$.
   b) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).
3) Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

Equations différentielles d'ordre 2 sans second membre

Exercice 13

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$a)\ f'' - 3f' - 10f = 0$; $b)\ f'' + 2f' + f = 0$; $c)\ f'' + f' + f = 0$; $d)\ 2f'' + 3f' - 2f = 0$
$e)\ f'' - f' - 6f = 0$; $f)\ f'' - 4f' + 4f = 0$; $g)\ f'' + 9f = 0$; $h)\ f'' - f = 0$; $i)\ 4f'' = -f$
$j)\ 3f'' + 3f' - f = 0$; $k)\ f'' + 3f' = 0$; $l)\ 2f'' + f = 0$; $m)\ f'' - 2f = 0$; $n)\ 2f'' - 2\sqrt{2}f' + f = 0$.

Solution d'une équation différentielle d'ordre 2

Exercice 14

Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

1) $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$; $y'' + 2y' + y = 0$.
2) $f(x) = x\sin x$; $y'' + y = 2\cos x$.
3) $f(x) = e^{-x}.\sin x$; $y'' + 2y' + 2y = 0$.
4) $f(x) = e^{-x}.\ln x$; $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
5) $f(x) = x - 2$; $4y'' + 4y' + y = x + 2$.

Exercice 15

A// Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - y = 4xe^{x}$ et $g(x) = (ax^2 + bx)e^{x}$.
Détermine les réels a, b et c tels que g soit une solution de (E).

B// On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' - y' - 6y = 0$ et $h(x) = ax + b$
Détermine les réels a et b pour que h soit une solution de l'équation (E).

C// Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 + 5x$ et $g(x) = ax^2 + bx + c$.
Détermine les réels a, b et c tels que g soit une solution de (E).

Exercice 16

Dans chacun des cas suivant, détermine la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données.

1) $f'' + 2f' + f = 0$ avec $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$; 2) $2f'' + 3f' - 2f = 0$ avec $f(3) = 1$ et $f'(1) = 2$.
3) $f'' + 2f' + 3f = 0$ avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; 4) $f'' + 9f = 0$ avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$.

5) $f'' - 6f' + 9f = 0$ avec $f(-1) = 0$ et $f'(0) = -2$; 6) $f'' - f = 0$ avec $f(5) = 3$ et $f'(2) = 4$.

Exercice 17

1) Résous l'équation différentielle (E) : $4y'' - 4y' + y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative passe par le point Ω $(2 ; 1)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

Exercice 18

1) Résous l'équation différentielle : $4y'' + y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point I et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 19

1) Résous l'équation différentielle : $4y'' = -y$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point Ω $(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 3$.

Exercice 20

1) Résous l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point Ω $(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 21

1) Résous l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point Ω $(\ln 2 ; 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4.

Equations différentielles d'ordre 2 avec second membre

Exercice 22

Résous chacune des équations différentielles suivantes :
1) $1 + 6x^2 + y'' = 0$; 2) $y'' = \cos 3x$; 3) $2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0$; 4) $y'' = (x+1)e^{x}$; 5) $y'' = 4x + 1$; 6) $y'' = 3$.

Exercice 23

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
1) a) Vérifie que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}.\ln x$ est solution de (E).
   b) Résous l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
2) a) Montre qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation différentielle (E').
   b) En déduis les solutions de (E).

Exercice 24

On considère les équations différentielles (E) : $f'' + 4f = 3\cos x$ et (E') : $f'' + 4f = 0$.
1) Quelles sont les fonctions g solutions de (E') ?
2) Vérifie que la fonction cosinus est solution de (E).
3) g étant une solution de (E'), vérifie que toute fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) + \cos x$ est solution de (E).
4) Parmi les fonctions h définie à la question 3), détermine celle qui vérifie : $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 25

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 4xe^{x}$.
1) Détermine les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (ax^2 + bx)e^{x}$ soit solution de (E).
2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - y = 0$.
3) Résous (E') et en déduire la solution générale de (E).
4) Détermine la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 26

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' - y' - 6y = -6x - 1$.

1) Résous l'équation différentielle $(E') : y'' - y' - 6y = 0$.

2) Détermine les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$ soit solution de (E).

3) a) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation (E').

b) En déduis l'ensemble des solutions de (E).

4) Détermine la solution f de (E) telle que $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

Exercice 27

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$.

1) Détermine une fonction polynôme g de degré deux solution de (E).

2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation $(E') : y'' + 2y' + y = 0$.

a) Résous l'équation (E').

b) Donne les solutions de l'équation (E).

Exercices de perfectionnement

Exercice 28

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$

1) Détermine la solution de l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x}g(x)$.

a) Calcule $g(0)$.

b) Calcule $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.

c) Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

d) En déduis l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

Exercice 29

Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de $1000°C$. La température θ est une fonction du temps t (en heures) qui vérifie l'équation différentielle (E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$. Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y.

2) Résous (F) puis (E).

3) Le bloc, initialement à $40°C$ est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est de $160°C$ au bout d'une heure. En déduis l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.

4) a) Calcule la température du bloc au temps $t = 3\ heures$.

b) Détermine le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera $500°C$.

Exercice 30

A l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60$°C est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20$°C.
Au bout de 10 minutes, la température du corps est 50°C. Sa température à la date t exprimée en minutes, est solution de l'équation différentielle : $\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_1)$ où k est une constante réelle.

On pose : $\phi(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par ϕ ?

b) Détermine $\phi(t)$.

c) En déduis $\theta(t)$ en fonction de k.

d) Détermine la constante k puis, en déduis l'expression définitive de $\theta(t)$.

2) a) Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-elle de moitié ?

b) Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ? On donne : $\ln 2 = 0{,}7$ et $\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}29$.

Exercice 31

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t (exprimé en heures), peut être considéré comme une fonction g à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée g' de cette fonction. On a constaté que $g'(t) = kg(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.

On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1) Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $g'(t) = kg(t)$ telle que $g(0) = \mathrm{N}$.

2) Sachant qu'au bout de 2 heures le nombre de microbes a quadruplé, calcule en fonction de N le nombre de microbes au bout de 3 heures.

3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures.

Exercice 32

On note $Q(t)$ la quantité de carbone 14 présent à l'instant t dans un fragment d'os. On admet que Q vérifie, à tout instant t, $Q'(t) = -\lambda Q(t)$. (λ est appelé constante radioactive du carbone 14).

1) Soit Q_0 la quantité du carbone 14 à l'instant $t = 0$. Exprime $Q(t)$ en fonction de t et de Q_0.

2) On appelle période (ou demi-vie) d'un élément radioactif la durée T au bout de laquelle la moitié des atomes de cet élément se sont désintégrés. Sachant que $\lambda \approx 1{,}2444.10^{-4}$ et que t est évalué en années, détermine la période T du carbone 14.

3) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. A la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même, pris comme témoin. Calcule l'âge de ces fragments.

Exercice 33

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t (exprimé en heures), peut être considéré comme une fonction g à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée g' de cette fonction. On a constaté que $g'(t) = kg(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.

On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1) Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $g'(t) = kg(t)$ telle que $g(0) = \text{N}$.

2) Sachant qu'au bout de 2 heures le nombre de microbes a quadruplé, calcule en fonction de N le nombre de microbes au bout de 3 heures.

3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures.

Exercice 34

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En l'an 2000 l'effectif était à mille (1000).

L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f. Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000\ ;\ +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle : $(E_1) : y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$.

1) Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $[2000\ ;\ +\infty[$ par : $h(t) = \frac{200}{t}$.
   Vérifie que h est une solution de (E_1).

2) Résous l'équation différentielle : $(E_2) : y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0$.

3) a) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_2).
   b) Déduis-en les solutions de (E_1).
   c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que : $\forall t \in [2000\ ;\ +\infty[, f(t) = 999{,}9e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)} + \frac{200}{t}$.
   d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2020. (Donne le résultat arrondi à l'ordre 0).

Exercice 35

A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.

On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématique par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1) Montre qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.

2) Calcule la valeur de β, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%.
   On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

3) Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$. Détermine sa limite en $+\infty$ et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan.

4) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?
   On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

DENOMBREMENT ET PROBABILITE

Dénombrement

Exercice 1

Simplifie au maximum les expressions suivantes :

$A = \frac{21!}{18!}$; $B = \frac{7! \times 4!}{3! \times 5!}$; $C = \frac{n!}{(n-1)!}$; $D = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$

Exercice 2

Résous dans $\mathbb{N}$, les équations suivantes :

$a)\ C_n^2 = 5n$; $b)\ A_n^2 = n(2n+5)$; $c)\ A_n^2 = C_n^3$; $d)\ n^2 + 3C_n^2 = 1$; $e)\ 2C_n^2 + 6C_n^3 = 0$; $f)\ A_{n+1}^3 = n(n^2-1)$

$g)\ A_n^3 + A_n^2 = n^3 - 28$; $h)\ C_n^2 = 45$; $i)\ C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 475n$.

Exercice 3

Une urne contient 2 boules rouges, 3 noires et 1 blanche. On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne.

1) Détermine le nombre de tirages possibles.

2) Calcule les cardinaux des ensembles suivants :

A : « 2 boules rouges suivies d'une boules noire ».

B : « un tirage unicolore ».

C : « Le tirage ne contient pas de boules rouges ».

Exercice 4

Dans une classe de 20 élèves dont 12 garçons et 8 filles, on veut élire un comité comprenant : un président, un vice-président et un trésorier (pas de cumul de poste).

1) Détermine le nombre de comités qu'on peut former.

2) Calcule les cardinaux des ensembles suivants :

A « un comité comprenant que des filles ».

B « un comité comprenant des personnes de même sexe ».

C « un comité comprenant 2 filles et 1 garçon ».

D « le président est un garçon ».

E « un comité comprenant au moins une fille ».

F « un comité comprenant au plus une fille ».

Exercice 5

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 4 boules blanches .On tire simultanément 3 boules.

1) Détermine le nombre de tirages possibles.

2) Dénombre les cardinaux des ensembles suivants :

A « obtenir 2 boules rouges et une boules noire ».

B « obtenir un tirage unicolore ».

C « obtenir un tirage tricolore ».

Exercice 6

Une urne contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 1 boule noire. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1) Détermine le nombre de tirages possibles.

2) Détermine le nombre de tirages contenant des boules de même couleur.

3) Détermine le nombre de tirages contenant des boules de couleur différente.

4) Détermine le nombre de tirages ne contenant pas de boules blanches.

5) Détermine le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche.

6) Détermine le nombre de tirages contenant au plus une boule blanche.

Exercice 7

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en prend simultanément 8, ce qui constitue une « main ».

1) Combien y a-t-il de mains différentes ?

2) Dénombre les mains qui contiennent :

a) Exactement deux as.

b) Aucun as.

c) Au moins un as.

d) Au plus deux as.

e) Exactement deux cœurs et trois piques.
f) Exactement deux cœurs, trois piques et un trèfle.

Exercice 8
Dans une classe de 42 élèves, 25 pratiquent le football, 30 pratiquent le basket et 20 pratiquent les deux.
1) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football.
2) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket.
3) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent ni le football ni le basket.

Equiprobabilité

Exercice 9
Dans une ville, il existe deux lycées, l'un des garçons et l'autre des filles, chaque lycée a une classe de SBT1, une de SBT2 et une de SBT3. Une bourse d'étude est offerte par la ville à six élèves pris parmi les élèves des six classes de terminales. Pour cela on choisit les six meilleurs élèves de chaque classe, soit un total de 36 élèves et les noms des six boursiers sont alors déterminés par tirages au sort parmi les 36 élèves.
Calcule la probabilité suivante :
1) Pour que les 6 boursiers soient les 6 élèves de la SBT2 garçons.
2) Pour que les 6 boursiers soient des élèves de la SBT2.
3) Pour que les 6 boursiers soient des filles.
4) Pour que les 6 boursiers soient 3 filles et 3 garçons.
5) Pour que parmi les 6 boursiers, il ait moins de 3 garçons.

Exercice 10
Pour célébrer leur succès au bac six élèves d'une classe de TSExp se donnent rendez-vous dans un restaurant de la ville.
Il y a six restaurants au total dans la ville et chaque élève choisit au hasard un restaurant.
1) Quelle est la probabilité pour que chacun des six élèves ait choisit un restaurant différent ?
2) Calcule la probabilité pour que les six élèves choisissent le même restaurant.

Exercice 11
Dans une classe de 65 élèves, 35 pratiquent du football, 40 pratiquent du basketball et 5 ne pratiquent aucun de ces deux sports.
1) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois le football et le basketball.
2) Détermine le nombre d'élèves qui jouent :
a) uniquement au football.
b) uniquement au basketball.
3) Dans cette classe on choisit au hasard 3 élèves pour représenter la classe à une compétition interclasse.
a) Quelle est la probabilité pour que les trois élèves pratiquent à la fois le football et le basketball ?
b) Quelle est la probabilité pour que parmi les trois élèves: 1 pratique uniquement le football, 1 pratique uniquement le basketball et 1 pratique à la fois le football et le basketball ?

Exercice 12
On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance une fois le dé et on note le numéro de la face de dessus. On note Pi la probabilité de l'événement : « le résultat du lancer est i ».
1) sachant que l'on a $P_2 = P_1$; $P_3 = 3P_1$; $P_4 = 2P_1$; $P_5 = 2P_1$; $P_6 = 2P_3$, montre que $P_1 = \frac{1}{15}$ et en déduis P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.
2) Calcule la probabilité de l'événement : « obtenir un numéro pair ».
3) On lance cinq fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 fois un numéro pair ?

Exercice 13
Une urne contient 3 boules jaunes, 1 boule rouge et 2 boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. (*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles*)
1) Détermine le nombre de tirages possibles.
2) Calcule la probabilité d'avoir exactement trois boules de même couleur.
3) Calcule la probabilité d'avoir les trois couleurs en même temps.
4) Calcule la probabilité d'avoir au moins une boule verte.

Exercice 14
Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous forme de fractions.
Une urne contient 30 boules numérotées de 1 à 30 indiscernables au toucher.
1) Indique les numéros qui sont multiples de 3 et de 5.
2) On tire au hasard une boule de l'urne. Calcule :
   a) La probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 et de 5.
   b) La probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 ou de 5.
3) On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise.
   Calcule la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5.

Exercice 15
Un libraire propose 30 titres différents d'un même auteur : 5 de ces livres sont couverts de cuir et coûtent 9000 francs l'un ; 12 ont une couverture toilée et coûtent 6000 francs l'un ; les autres sont cartonnés et coûtent 3000 francs l'un. Un client vient acheter 3 livres de cet auteur sans préciser de livre particulier.
Le libraire prend au hasard 3 livres de sa collection.
Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
1) A « Le libraire choisit 3 livres couverts de cuir »
2) B « Le libraire choisit au moins un livre couvert de cuir »
3) C « Le libraire choisit 3 livres ayant la même couverture »
4) D « Le libraire choisit 3 livres pour un montant exact de 15000 francs »
5) E « Le libraire choisit 3 livres dont le coût n'excède pas 12 000 francs ».

Exercice 16
On prélève cinq œufs dans un lot de dix œufs dont quatre proviennent d'une poule et d'un coq de race F et six d'une poule et d'un coq de race G. Les œufs d'une race sont indiscernables des œufs de l'autre race.
1) Trouve le nombre de façons possibles de prélever cinq œufs parmi les dix.
2) Calcule la probabilité des évènements suivants :
   A : « Il y a un seul œuf de race F parmi les cinq œufs prélevés ».
   B : « Le prélèvement contient exactement trois œufs de race F ».

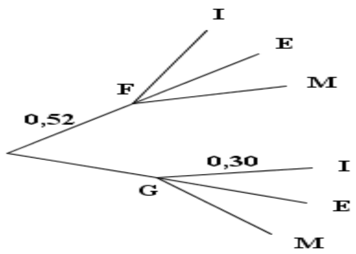
Probabilité conditionnelle

Exercice 17
Une usine fabrique des ampoules électriques ; 75% sont conformes aux normes et 25% non conformes.
Un contrôle qui n'est pas infaillible accepte 10% des ampoules non conformes et rejette 4% des ampoules conformes.
1) Calcule la probabilité qu'une ampoule soit acceptée par le contrôle.
2) Sachant qu'une ampoule est acceptée, quelle est la probabilité qu'elle soit conforme aux normes ?

Exercice 18
Dans une population, 30% de personnes sont atteintes d'une affection des voies respiratoires supérieures.
Il y a 60% de fumeurs parmi les malades et 10% de fumeurs parmi les personnes non atteintes par cette affection.
Calcule la probabilité qu'un fumeur soit atteint de l'affection.

Exercice 19
Dans une liste des candidats devant passer le baccalauréat, on compte 52 % de filles. Les filles se répartissent de la manière suivante : 20 % sont dans le domaine des Sciences et Mathématiques (SM), 45 % dans le domaine des Sciences Humaines (SH) et les autres dans le domaine des Langues et communication (LC). En ce qui concerne les candidats garçons, 30 % sont dans le domaine SM, 45 % dans le domaine SH et 25 % dans le domaine LC.
On choisit au hasard un nom dans la liste des candidats. On note :
F, l'évènement « le nom choisi est celui d'une fille » ;
G, l'évènement « le nom choisi est celui d'un garçon » ;
I, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine SM » ;
E, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine SH » ;
M, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine LC ».
1) On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.
   a) Montre que la probabilité de l'évènement I est égale à 0,248.
   b) Recopie et complète l'arbre de probabilité donné ci - contre.
   c) Les évènements F et I sont-ils indépendants ?
2) Détermine $P_I(F)$, la probabilité de l'évènement F sachant I.

3) Montre que les évènements F et E sont indépendants.



Exercice 20

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

1) Démontre que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$.

2) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

3) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 21

Une maladie atteint 3% d'une population.

Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% de tests sont positifs et 99% négatifs.

On note M l'évènement : ≪ être malade ≫ et T l'évènement : ≪ le test est positif ≫

1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

2) Donne la probabilité des évènements : ≪ $M \cap T$ ≫ et ≪ $\overline{M} \cap \overline{T}$ ≫.

3) Détermine $P(T)$ et $P(\overline{T})$.

4) a) Calcule la probabilité de ne pas être malade, sachant que le test est positif.
   b) Calcule la probabilité d'être malade, sachant que le test est négatif.

Exercice 22

Les résultats d'une étude présentés par l'Institut National de la statistique révèlent :

- 45% de la population active sont des hommes.
- 25% des femmes et 20% des hommes de cette population active sont au chômage.

On interroge au hasard une personne.

1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

2) Détermine les probabilités des évènements suivants :
   a) H : ≪ être un homme ≫.
   b) F : ≪ être une femme ≫.
   c) ≪ être au chômage sachant qu′on est homme femme ≫.
   d) ≪ être au chômage sachant qu′on est femme ≫.

3) Calcule la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé au hasard soit au chômage.

4) Quelle est la probabilité que l'individu interrogé soit une femme sachant qu'il est au chômage.

Exercice 23

Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants.

Calcule la probabilité pour qu'il soit :

1) un homme atteint de paludisme.

2) une femme atteinte de paludisme.

3) Une personne atteinte de paludisme.

4) un homme non atteint de paludisme.

5) un homme sachant qu'il est atteint de paludisme.

6) une femme, sachant que cet individu est atteint de paludisme.

Variable aléatoire

Exercice 24

Mamadou a dans sa poche 6 pièces de monnaie : 2 pièces de 100 frs, 3 pièces de 50 frs et une pièce de 25 frs.

Pour régler un achat de 225 frs, il tire au hasard et simultanément 3 pièces de sa poche.

1) a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 225 frs ?
b) Quelle est la probabilité qu'il obtienne une somme suffisante ?
2) On désigne par x la variable aléatoire, associons à chaque tirage la somme obtenue en francs.
a) Quelles sont les valeurs prises par x ?
b) Détermine la loi de probabilité de x et son espérance mathématique.

Exercice 25

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.
1) Calcule la probabilité de chacune des évènements suivants :
a) Aucune boule rouge n'est tirée.
b) Une boule rouge et une seule est tirée.
c) Deux boules rouges et deux seulement sont tirées.
d) Une boule rouge au moins est tirée.
e) Deux boules blanches au plus sont tirées.
2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
a) Donne la loi de probabilité de X.
b) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X.
c) Calcule la probabilité de l'évènement : $1 \leq X \leq 2$.

Exercice 26

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles
Un test oral comporte 10 questions dont 6 d'Anglais et 4 d'Allemand. Les questions sont numérotées de 1 à 10 sur des bouts de papier identiques et déposées dans une boîte opaque. Un candidat tire simultanément 3 de ces questions.
1) Justifie que le nombre de tirages possibles est 120.
2) Détermine la probabilité de chacun des événements suivants :
a) « Les trois questions tirées sont des questions d'Anglais ».
b) « Des trois questions tirées, deux sont des questions d'Allemand ».
3) Pour chaque question d'Allemand tirée, un bonus de 3 points est accordé au candidat.
Soit X la variable aléatoire réelle égale à la somme des bonus obtenus par un candidat.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Détermine la loi de probabilité de X.
c) Calcule l'espérance mathématique de X.
d) Calcule la variance de X.

Exercice 27

Dans un bassin piscicole, Monsieur Diarra dispose pour la vente de :
- 5 machoirons à 500 F l'unité
- 9 carpes à 300 F l'unité
- 3 silures à 350 F l'unité

Madame Konaté veut lui acheter 2 poissons. Monsieur Diarra impose que les poissons soient pêchés au hasard dans le bassin et que la cliente emporte, sans discussion, le colis composé des deux poissons obtenus. Chaque poisson dans le bassin a la même chance d'être pêché. Soit X la variable aléatoire égale au montant à payer par Madame Konaté.
1) Justifie que les valeurs prises par X sont : 600 F ; 650 F ; 700 F ; 800 F ; 850 F ; 1000 F.
2) Détermine la loi de probabilité de X.
3) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 28

Une urne contient 3 boules jaunes, 1 boule rouge et 2 boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
On associe à ce tirage le jeu dont voici les règles :
- Une boule jaune tirée fait gagner 25 F
- Une boule verte tirée fait gagner 75 F
- Une boule rouge tirée fait perdre 100 F

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe le gain ou la perte réalisé.
1) Déterminer les différentes valeurs prises par X.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 29
Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont 10 sont rouges, 3 bleues et 2 vertes.
Le principe d'un jeu est le suivant : le joueur paye 50F au début de chaque jeu et ensuite il tire simultanément 2 boules de l'urne;
- Le tirage d'une boule rouge ne donne rien.
- Chaque boule bleue tirée rapporte 50F.
- Chaque boule verte tirée rapporte 250F.

Un joueur joue une fois, quelle est la probabilité pour ce joueur :
1) de ne ni gagner, ni perdre ? (gagner 0F)
2) de perdre 50F ?
3) de gagner 50F ?
4) de gagner 250F ?

NB: Le gain algébrique du joueur est la différence entre le montant obtenu à l'issue du jeu et celui payé au début du jeu.

Exercice 30
Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3 ($x \geq 2$).
On tire simultanément 2 jetons de l'urne. On suppose que le tirage est équiprobable et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne.
1) a) Exprime en fonction de x les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
2) a) Démontre que l'espérance mathématique $E(X) = \frac{6x^2+2x+20}{x^2+5x+6}$.
   b) Détermine la valeur de x pour que E(X) soit égale 5.

Schéma de Bernoulli

Exercice 31
Un lot de vaccin contre le méningite est efficace à 75%, c'est-à-dire sur 100 personnes vaccinées 75 seulement sont sures d'être protégés contre la maladie. On vaccine 20 personnes avec ce produit.
Quelle est la probabilité pour que :
1) Aucune des personnes ne soit protégée ?
2) La moitié des personnes est protégées ?
3) Les 20 personnes sont protégées ?

Exercice 32
On prend au hasard 3 ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses.
Calcule la probabilité pour que :
1) Aucune ampoule ne soit défectueuse.
2) Exactement une ampoule soit défectueuse.
3) Au moins une ampoule soit défectueuse.
4) Les trois ampoules sont défectueuses.

Exercice 33
A la suite de plusieurs campagne de vaccination réalisées dans un village du Kourou, les études ont révélé que la probabilité pour qu'un enfant de moins de 5 ans soit atteint de poliomyélite est de 0,05.
On choisit au hasard un enfant de moins de 5 ans de ce village.
1) Quelle est la probabilité pour que cet enfant ne soit pas atteint de poliomyélite ?
2) On a effectué un contrôle sur 8 enfants âgés de moins de 5 ans dans ce village.
   Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « aucun enfant n'est atteint de poliomyélite »
   B : « trois enfants sont atteints de poliomyélite »
   C : « au moins quatre enfants sont atteints de poliomyélite ».

Exercice 34
Cinq individus ont été témoins d'un meurtre. Parmi eux, on sait que 2 seulement sont menteurs mais on ignore lesquels.
On questionne 2 témoins au hasard sur le meurtre, de façon indépendante. Quelle est la probabilité d'obtenir :
1) Deux versions véridiques ?
2) Deux versions contradictoires ?
3) Deux versions fausses ?

Exercice 35

Un car se présente à une frontière, le chauffeur sait que parmi ses 50 passagers, 10 tentent de frauder.
Le douanier choisit au hasard 8 personnes pour le contrôle. Quelle est la probabilité pour que :
1) Les 8 personnes soient des fraudeurs ?
2) L'une au moins soit un fraudeur ?

Exercices de perfectionnement

Exercice 36

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de taux avec une probabilité de $0,8$. On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.
1) Calcule la probabilité d'avoir une baisse de taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2) Démontre que la probabilité d'avoir une baisse de taux de glycémie est $0,52$.
3) On soumet au test un individu pris au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de taux de glycémie ?
4) On contrôle 5 individus au hasard.
   a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé ?
   b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé ?
5) On contrôle n individus pris au hasard. (n est un nombre entier non nul).
   Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieure à $0,98$.

Exercice 37

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :
- Pour un jour donne, la probabilité qu'il ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7.
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4 ;
On désigne par A l'évènement ≪ il y a affluence de clients ≫ et B l'évènement ≪ Mariam réalise un bénéfice ».
1) On choisit un jour au hasard.
   a) Calcule la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
   b) Démontre que la probabilité p(B) de l'évènement B est 0,58.
   c) Mariam réalise un bénéfice. Calcule la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. (Le résultat d'ordre 2).
2) Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
   c) Calcule l'Esperance mathématique E(X) de X.
3) Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
   a) Justifie que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0{,}42)^n$.
   b) Détermine la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$.

Exercice 38

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA.
Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.
1) Calcule la probabilité de l'événement A : « tirer trois pièces de 500F ».
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
3) L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.
   Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

Exercice 39

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :
1) Démontre que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.

2) Calcule la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6.

3) Démontre que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$.

4) Le droit de participation au jeu est de 3000 francs.
   - Si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;
   - S'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 francs ;
   - S'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie.
   On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
   c) Détermine le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 40

Dans tout l'exercice on suppose les tirage équiprobables ($n \in \mathbb{N}_+^*$).

1) Une urne contient $(n+1)$ boules vertes et $(n-1)$ boules rouges.
   Le jeu suivant consiste à tirer une boule de l'urne :
   - Si la boule est rouge, le joueur perd.
   - Si la boule est verte, le joueur gagne.

   a) Quelle est la probabilité P_1 que le joueur gagne ?
   b) Quelle est la probabilité P_2 que le joueur perd ?

2) Lorsque le joueur gagne, il reçoit 200 F CFA, s'il perd il doit verser 300 F FCFA.
   On définit la variable aléatoire x qui à chaque tirage associe le gain en FCFA. (Le gain pouvant être négatif).
   a) Détermine la loi de probabilité de x.
   b) Calculer l'espérance mathématique de x.
   c) Pour quelle valeur de n, le jeu est – il équitable ?
   (le jeu est équitable si l'espérance mathématique de la variable x est nulle).

Exercice 41

Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible.

La probabilité que A touche la cible est estimé à $\frac{4}{5}$; et pour celui de B est de $\frac{3}{4}$.

Calcule la probabilité des évènements suivants :

1) Les deux tireurs touchent tous deux la cible.
2) Les deux tireurs manquent la cible.
3) La cible est atteinte par le tireur A seulement.
4) La cible est atteinte par un tireur seulement.
5) La cible est atteint.
6) La cible soit manquée.

Exercice 42

Un éleveur a dans son enclos 3 moutons et 5 chèvres. Pour célébrer le retour de sa quatrième épouse de son pèlerinage, il décide d'abattre au hasard quatre de ses bêtes.

1) Soit X le nombre de moutons tués.
   a) Détermine la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.
   b) Calcule l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type de X.

2) On estime qu'un mouton donne environ 20 kg de viande et une chèvre 15 kg et qu'il faut au moins 65 kg de viande pour satisfaire les invités.
   On note A l'événement « on a tué au moins 2 moutons » et B l'événement « il y a assez de viande ».
   a) Calcule P(A) et P(B)
   b) Calcule P(B/A) ; A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 43

Dans une ville, 30% de la population ont un âge supérieur ou égal à 65 ans.

60% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 65 ans sont atteintes de la Covid-19.

0,1% des personnes de moins de 65 ans sont atteintes de la Covid-19.

1) On prend une personne au hasard et donne les évènements suivants :
   S « la personne a un âge supérieur ou égal à 65 ans ».
   C « la personne est atteinte de la Covid-19 ».

a) Dresse un arbre pondéré qui représente la situation.
b) Donne la probabilité $P_S(C)$ des personnes atteintes de la Covid-19 sachant qu'elles ont plus de 65 ans.
c) Calcule la probabilité pour que la personne ait au moins 65 ans et soit atteinte de la Covid-19.

2) Justifie que la probabilité de l'évènement C est : 0,1807.
3) On prend au hasard n $(n > 1)$ personnes dans la ville et on note P_n la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19.
a) Justifie que : $P_n = 1 - (8{,}8193)^n$.
b) Détermine le nombre minimal de personne pour que la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 dépasse 99,99%.

Exercice 44

Sur une autoroute, deux carrefours successifs sont munis de feux tricolores A et B.
La couleur du feu B est indépendante de celle du feu A.
La probabilité que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.
La probabilité que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.
La probabilité de couleur orange est toujours nulle.

1) Un automobiliste passe aux deux carrefours
a) Calcule la probabilité qu'il rencontre deux feux verts.
b) Calcule la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert.
2) On ne s'occupe plus que du feu A.
Un automobiliste passe quatre fois à ce carrefour.
X est la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de feux verts que l'automobiliste rencontre.
a) Trouve la loi de probabilité de X.
b) Calcule l'espérance mathématique E(X) de X. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 45

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On dit qu'on obtient un « double » si les faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.
A chaque lancer, si le joueur fait un double, il gagne 500 F ; sinon il perd 100 F.

1) On lance les dés une fois. Calcule la probabilité de gagner 500 F.
2) On lance les dés trois fois de suite dans des conditions indépendantes.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur sur l'ensemble des trois lancers.
a) Détermine la loi de probabilité de X.
b) Détermine l'espérance mathématique de X et interprète le résultat.
3) On lance les dés n fois de suite dans des conditions indépendantes.
a) Calcule la probabilité p_n de faire au moins un double sur les n lancers.
b) Quelle est la valeur minimale de n pour que l'on ait : $p_n \geq 0{,}8$.

Exercice 46

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.
Ce test a donné les résultats suivants :
- 75% des bacheliers sont admis.
- 52% des non bacheliers sont admis.

Partie A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :
B l'évènement : « l'élève est bachelier »
T l'évènement : « l'élève est admis au test »
A l'évènement : « l'élève est bachelier et est admis au test ».

1) Précise chacune des probabilités suivantes :
a) La probabilité $P(B)$ de l'évènement B.
b) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé.
c) La probabilité $P_{\overline{B}}(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé.
2) Démontre que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,3.
3) Calcule la probabilité de l'évènement T
4) Déduis des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.
5) Démontre que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$.

Partie B
On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiant bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.
1) Démontre que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323.
2) Calcule l'espérance mathématique de X.

Exercice 47
L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.
Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.
Partie A : Dans cette partie on prend $p = 0{,}1$.
1) Calcule la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
2) Calcule la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
3) Calcule la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
4) En déduis la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.
Partie B : On revient au cas général
1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontre que $f(p) = p^2$.
2) Soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteur s'écrase. Démontre que $g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$.
3) On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.
   a) Etudie le signe de $h(p)$ en fonction de p.
   b) En déduis, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

Exercice 48
Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages.
Ainsi, à partir d'un certain jour, les délestages ont débuté dans la ville à un rythme décrit comme suit :
- Le premier jour, la ville est délestée.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'événement : « La ville est délestée le $n^{ième}$ jour » et p_n la probabilité de l'événement $D_n, p_n = p(D_n)$.
1) Montre les égalités suivantes : $p(D_1) = 1$; $p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$; $p(D_{n+1}/\overline{D}_n) = \frac{5}{6}$.
2) Exprime p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et $p\left(D_{n+1} \cap \overline{D}_n\right)$.
3) En déduis que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$.
4) On pose $U_n = 6p_n - \frac{90}{29}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montre que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme.
   b) Exprime U_n puis p_n en fonction de n.
   c) Un match de football doit se jouer le 20ème jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage ?

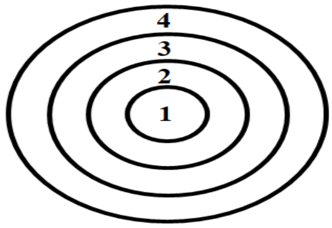
Exercice 49
Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.
On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux évènements suivants :
A « On obtient des boules de deux couleurs »
B « On obtient au plus une blanche »
1) a) Calcule la probabilité de l'évènement :
      « Toutes les boules tirées sont de la même couleur »
   b) Calcule la probabilité de l'évènement :
      « On obtient exactement une boule blanche »
   c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B), p(A)$ et $p(B)$ sont : $p(A \cap B) = \frac{1}{2^n}$, $p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$.
2) Montre que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si : $2^{n-1} = n + 1$.
3) Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal 2 par : $\mathrm{U}_n = 2^{n-1} - (n + 1)$.
   Calcule $\mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3, \mathrm{U}_4$.
   Démontre que la suite (U_n) est strictement croissante.
4) En déduis la valeur de l'entier naturel n tel que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice 50

Une urne contient deux jetons : sur l'un est inscrit le nombre 2 et sur l'autre le nombre -4.
On tire trois fois de suite un jeton de l'urne en remettant dans l'urne le jeton tiré précédemment.
Si a, b, c désignent les nombres obtenus dans cet ordre, au triplet (a, b, c) on associe l'équation dans $\mathbb{R}$:
$ax^2 + bx + c = 0$ (E).
On suppose que tous les triplets ont la même probabilité d'être obtenus. On désigne par Ω l'univers des éventualités.
1) Détermine les éléments de Ω
2) On définit sur Ω la variable aléatoire X qui, à un élément de Ω, associe le nombre de solutions de l'équation (E).
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'espérance mathématique et l'écart type de X.
   c) Définis et représente la fonction de répartition F de X.

Exercice 51

Une cible est constituée de cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4 déterminant 4 zones numérotées (1), (2), (3), (4) (chaque zone est une couronne), on considère l'extérieur de la cible comme une 5ème zone.
1) Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones 1, 2, 3, 4 est proportionnelle à l'aire de cette zone. (Rappel : l'aire d'un disque de rayon r est $A = \pi r^2$). Montre que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à K, 3K, 5K, 7K où K est un nombre que l'on ne demande pas de calculer dans cette question.
2)

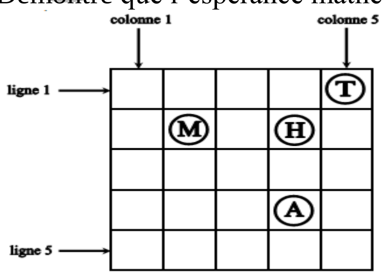


- Flèche touche la zone (1), le joueur gagne 4 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (2), le joueur gagne 3 000 FCF A
- Si la flèche touche la zone (3), le joueur gagne 2000F CFA
- Si la flèche touche la zone (4), le joueur gagne 1 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (5), le joueur perd 30 000 FCFA.

On suppose que l'espérance mathématique de X est nulle.
On appelle X le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancée d'une flèche)
   a) Détermine les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 et la probabilité p_5 de manquer la cible.
   b) Donne sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

Exercice 52

On dispose d'un damier de 5 cases sur 5 placés dans une position fixe. On place au hasard sur ce damier 4 jetons portant les lettres du mot MATH (voir figure ci-contre). Les jetons sont posés sur des cases différentes. (Les résultats des calculs seront donnés sous forme de fractions irréductibles).
1) Justifie que le nombre de dispositions possibles des 4 jetons est égal à 303 600.
2) a) Calcule la probabilité pour que les 4 jetons soient disposés sur une même ligne.
   b) Calcule la probabilité pour qu'on puisse lire le mot MATH sur une ligne ou une colonne.
      (On convient que la lecture se fait de gauche à droite sur une ligne, de bas en haut sur une colonne et que deux lettres consécutives du mot MATH peuvent être séparées par un espace).
3) Démontre que la probabilité pour que deux jetons ne soient jamais placés sur une même ligne est égale à $\frac{125}{506}$.
4) Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de jetons placés sur la 1ère ligne.
   a) Etablis la loi de probabilité de X.
   b) Démontre que l'espérance mathématique de X est égale à 0,8.



Damier 5 sur 5

BARYCENTRE

Barycentre de deux points pondérés

Exercice 1

A et B sont deux points distincts.
Détermine puis construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivant :
1) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 1), (\mathrm{B}; 3)\}$.
2) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 2), (\mathrm{B}; 2)\}$.
3) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; -1), (\mathrm{B}; 2)\}$.
4) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; -2), (\mathrm{B}; -6)\}$.
5) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; -2), (\mathrm{B}; 2)\}$.

Exercice 2

Détermine les nombres réels a et b tels que le point G défini ci-dessous soit le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}; a)$ et $(\mathrm{B}; b)$.
1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
2) $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \vec{0}$.
3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{GA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \vec{0}$.

Exercice 3

Détermine les coordonnées du barycentre G dans chacun des cas suivant :
1) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 5), (\mathrm{B}; 2)\}$ avec $\mathrm{A}(1; 1)$ et $\mathrm{B}(-1; 2)$.
2) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 2), (\mathrm{B}; 1)\}$ avec $\mathrm{A}(8; -1)$ et $\mathrm{B}(5; 3)$.
3) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 3), (\mathrm{B}; -8)\}$ avec $\mathrm{A}(0; 3)$ et $\mathrm{B}(4; 5)$.

Barycentre de trois points pondérés

Exercice 4

ABC est un triangle.
Détermine puis construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivant :
1) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 1), (\mathrm{B}; 3), (\mathrm{C}; 4)\}$.
2) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 2), (\mathrm{B}; 2), (\mathrm{C}; 2)\}$.
3) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; -1), (\mathrm{B}; 2), (\mathrm{C}; 3)\}$.
4) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 2), (\mathrm{B}; -2), (\mathrm{C}; 4)\}$.
5) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 2), (\mathrm{B}; 3), (\mathrm{C}; -6)\}$.

Exercice 5

Détermine les nombres réels a, b et c tels que le point G défini ci-dessous soit le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}; a)$, $(\mathrm{B}; b)$ et $(\mathrm{C}; c)$.
1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
2) $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{BG}} = 2\overrightarrow{\mathrm{GC}}$.
3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{GA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{BG}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$.

Exercice 6

Détermine les coordonnées du barycentre G dans chacun des cas suivant :
1) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; -3), (\mathrm{B}; -2), (\mathrm{C}; 3)\}$ avec $\mathrm{A}(-1; 0), \mathrm{B}(1; 2)$ et $\mathrm{C}(2; 3)$.
2) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; 2), (\mathrm{B}; -3), (\mathrm{C}; 4)\}$ avec $\mathrm{A}(-5; 3), \mathrm{B}(-2; 2)$ et $\mathrm{C}(2; 6)$.
3) $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}; -3), (\mathrm{B}; -2), (\mathrm{C}; 5)\}$ avec $\mathrm{A}(0; 0), \mathrm{B}(1; 7)$ et $\mathrm{C}(-2; 3)$.

Ensemble des points

Exercice 7

Donne l'ensemble des points M dans chacun des cas suivant :
1) $MG = 2BI$.
2) $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IA} = 0$.
3) $MG = 3$.
4) $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$.
5) $\mathrm{BM} = \mathrm{CM}$.

Exercices de perfectionnement

Exercice 8

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien : A, B, C et D quatre points de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts.

1) Montre que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

2) Détermine l'ensemble (S) des points M de $\mathcal{P}$ tels que : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = BD$.

3) On suppose maintenant que ABCD est un rectangle.
   Détermine l'ensemble $(\sum)$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm et AC = 6 cm.

1) a) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A;5),(B;3)$ et $(C;2)$.
   b) Calcule GA^2, GB^2, GC^2. Justifie l'égalité $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

2) Développe $\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2, \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2, \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$. Démontre l'égalité $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 4MG^2 - 48$.

3) Détermine l'ensemble (E) des ponts M du plan vérifiant la relation : $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$. Prouve que $A \in (E)$.

Exercice 10

Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et G le barycentre du système $\{(A,-2);(B,1)\}$.

1) Démontre que A est le milieu du segment $[GB]$.

2) Montre que l'ensemble (Γ) des points M du plan $\mathcal{P}$ vérifiant $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$ est le cercle de centre G et de rayon r que l'on déterminera en fonction de AB.

3) Soit C un point de (Γ) et $(\mathcal{D})$ l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$.
   Montre que le point C appartient à $(\mathcal{D})$.

4) Calcule $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}$ et en déduis l'ensemble $(\mathcal{D})$.

Exercice 11

On considère le triangle ABC tel que AB = 7 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. Soit I le milieu de [BC].

1) Démontre que $AI = \sqrt{33}$.

2) a) Soit M un point du plan. Pour quelle valeur du nombre réel m le vecteur $m\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant du point M ? Détermine alors le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   b) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$.

3) Soit D le barycentre du système $(A;-1),(B;1)$ et $(C;1)$.
   a) Exprime le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   c) Détermine et construis l'ensemble (Γ') des points M du plan tel que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

Exercice 12

On considère un carré $ABCD$ de sens direct, de centre O et tel que $AB = 4$ cm. Soit G le barycentre des points pondérés $(A,3);(B,2);(C,3);(D,7)$. On considère I, J et L les milieux respectifs des segments $[OC],[CD]$ et $[CJ]$.

1) a) Montre que G appartient à la droite (BD).
   b) Montre que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$.
   c) Construis le point G.

2) On se propose de déterminer et construis l'ensemble (C) des points M tel que : $3MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 + 2MD^2 = 160$.
   a) Montre que $3MA^2 + 3MC^2 = 6MO^2 + 48$ et $2MC^2 + 2MD^2 = 4MO^2 + 32$.
   b) Montre que : $M \in (C)$ si et seulement si $OM = 2\sqrt{2}$.
   c) Justifie que le point A appartient à (C) et en déduis la nature exacte de (C).
   d) Construis (C).

Exercice 13

Dans un plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que $AB = 3$ cm.
On note E le milieu du segment [BC] et G le barycentre des points pondérés $(A,4),(B,-1),(D,-1)$.

1) a) Démontre que A est le milieu du segment [KG].
   b) Justifie que $GB^2 = \frac{45}{2}$.
   c) Justifie que $GB = GD$.
   d) Démontre et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que : $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9$.

2) a) Justifie que $\mathrm{AE} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

b) Démontre que pour tout point M du plan : $3\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MD}^2 = -27 + 4\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

c) Démontre et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que : $3\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MD}^2 = 63$.

Exercice 14

Soient A, B, C trois points du plan P tels que $AB = AC = 5$ unités, $BC = 6$ unités.

1) Construis le triangle ABC puis calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Construis le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$; $(B, 3)$ et $(C, 3)$ puis calcule GA.

3) Soit h l'application de $P \longrightarrow \mathbb{R}$

$$M \longmapsto h(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}.$$

a) Exprime $h(M)$ en fonction de $h(G)$ et MG.

b) Calcule $h(A)$ et $h(G)$.

c) Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M tels que $h(M) = h(A)$.

d) E et F sont deux points distincts du plan. Détermine puis construis l'ensemble (Γ) des points M tel que : $\frac{ME}{MF} = \frac{3}{2}$.

Exercice 15

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = a$; $AC = a\sqrt{a}$; $BC = 2a$ où a est un réel strictement positif.

1) Construis le barycentre G des points $(A, -1)$; $(B, 1)$; $(C, 1)$.

2) a) Calcule GA^2, GB^2 et GC^2.

b) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2$.

3) Soit I le milieu de $[BC]$. Détermine et construis l'ensemble (Γ') des points tels que :
$(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}).(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = -a^2\sqrt{3}$.

4) Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe M' tel que : $3\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

a) Montre que f est une homothétie. Précise son centre et son rapport.

b) Détermine et construis l'ensemble (Γ'') image de (Γ) par f.

Exercice 16

On considère un triangle ABC du plan.

1) a) Détermine et construis le point G, barycentre de $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.

b) Détermine et construis le point G', barycentre de $\{(A, 1); (B, 5); (C, -2)\}$.

2) a) Soit J le milieu de $[AB]$.

Exprime $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduis l'intersection des droites (GG') et (AB).

b) Montre que le barycentre I de $\{(B, 2); (C, -1)\}$.appartient à (GG').

3) Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.
Détermine trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de $\{(A, a); (D, d); (C, c)\}$.

Exercice 17

Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment AB et J le centre de gravité de ABC.
Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $S_m = \{(A, 1); (B, m); (C, 2m)\}$.
Pour tout point M du plan on note $\vec{V}_M = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montre que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.

2) Montre que G_1, J et C sont alignés.

3) Montre que pour tout point M, $\vec{V}_M = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

4) Montre que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

5) Montre que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.

Exercice 18

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC :
$a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.

1) On note I le milieu du segment $[BC]$.

a) Montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

b) Calcule $AB^2 + AC^2$en fonction de AI^2 et de BC^2.

c) En déduis : $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

d) Ecris de même les expressions de BG^2 et de CG^2.

2) a) Montre que : $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

b) Détermine l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

3) On choisit $a = 5, b = 4, c = 3$. Place trois points A, B, C et dessine (E) dans ce cas particulier.

Exercice 19

Soit ABCD un quadrilatère quelconque, I le milieu de [AC], J le milieu de [BD].
Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, et M le milieu de [LK]. Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1) Justifie l'existence du barycentre G du système : $\{(A,1); (B,2); (C,1); (D,2)\}$.
En regroupant les points de différentes façons, montre que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).

2) Montre que G est en M, que M, I, J sont alignés, et donne la position de M sur (IJ).

3) Détermine l'ensemble S des points X du plan tels que : $\|\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD}\| = 4\|\overrightarrow{IJ}\|$.

4) Fais une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

Exercice 20

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$ cm et $AC = 6$ cm.
Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1) a) Construis le barycentre $G = \{(A, 5)\ ; (B, -3)\ ; (C, 2)\}$.

b) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Détermine l'ensemble (E_1) des points M du plan tel que : $\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$.

3) Détermine l'ensemble (E_2) des points M du plan tel que : $\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

4) Détermine l'ensemble (E_3) des points M du plan tel que : $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$.

5) Détermine l'ensemble (E_4) des points M du plan tel que :
$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k$ (On discutera suivant les valeurs de k).

6) Détermine l'ensemble (E_5) des points M du plan tel que : $5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72$.

Exercice 21

ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD). On désigne par I, J et O les milieux respectifs de $[AB], [CD]$ et $[IJ]$.

1) Détermine et construis l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + D\|$.

2) Les médiatrices des cotés $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en G. Démontre que : $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.

3) Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.

a) Justifie que (E_2) est non vide.

b) Démontre que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM} = k$ (k est une constante réelle).

c) En déduis que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$.

d) Détermine et construis (E_2).

Exercice 22

ABC est un triangle équilatéral de coté 6 .Soit A' le milieu du segment $[BC]$.

1) Construis le point G barycentre de $(A, 2), (B, 1)$ et $(C, 1)$.

2) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 72$.

a) Vérifie que A appartient à (E).

b) Détermine et construis l'ensemble (E).

3) Soit l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 36$.

a) Vérifie que A' appartient à (Δ).

b) Détermine et construis (Δ).

Exercice 23

DEF est un triangle rectangle isocèle en E tel que $DE = 4$ cm.
K désigne le milieu du segment $[EF]$ et G le point défini par : $\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$.

1) a) Fais une figure.

b) Démontre que G est le barycentre des points pondérés $(D, 2), (E, -1)$ et $(F, 1)$.

c) Démontre que le quadrilatère $GFKD$ est un parallélogramme.

d) En déduis que $GF = 2\sqrt{5}$.
e) Démontre que le triangle GEF est isocèle en G.
2) Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M du plan tels que : $2MD^2 - ME^2 - MF^2 = 48$.
a) Vérifie que les points E et F appartiennent à $(\mathcal{C})$.
b) Détermine et construis $(\mathcal{C})$.

Exercice 24
Soit ABC un triangle équilatéral de coté 3 et de centre de gravité G.
B' est le milieu de $[AC]$ et D est le point tel que : $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$.
1) Ecris D comme barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on précisera.
2) Calcule DA, DB et DC.
3) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$.
a) Vérifie que (E) passe par G.
b) Détermine et construis (E).

Exercice 25
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a, a étant un réel strictement positif.
1) a) Construis le point D défini par : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
b) Démontre que D est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que vous préciserez.
c) Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2) a) Démontre que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ puis que $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = 0$.
b) En déduise que le triangle BCD est rectangle en B.
3) Calcule les distances CD, BD et AD en fonction de a.
4) Pour tout point M du plan, on pose : $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ et on désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = 0$.
a) Vérifie que le point C appartient à (Γ).
b) Exprime $f(M)$ en fonction de MD et de a.
c) Détermine et construise (Γ).
5) Pour tout point M du plan, on pose $g(M) = 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DB} + a^2$.
a) Détermine l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $g(M) = a^2$.
b) Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (Γ)et (Δ).
Montre que le triangle CDI est équilatéral. .

Exercice 26
ABC est un triangle équilatéral de coté de longueur a, soit I le barycentre des points pondérés $(A, 1); (B, 2)$ et $(C, -2)$.
1) Détermine et construis I.
2) Calcule IA^2, IB^2 et IC^2 en fonction de a.
3) Soit k un nombre réel.
a) Détermine en fonction de k l'ensemble (Ω_k) des points M du plan tel que : $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$.
b) Existe-t-il une valeur de k pour laquelle B appartient à (Ω_k).
4) a) Démontre (Ω_{-1}) est un cercle tangent à la droite (AB).
b) Démontre que le symétrique D de B par rapport à la droite (AI) appartient à la droite (AC).
c) Démontre (Ω_{-1}) est tangent à la droite (AC) en D.
d) Quelle est la nature du triangle IBD ? Justifie ta réponse.

Exercice 27
On considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a$ et $AC = a$, où a est un nombre réel positif donné.
1) a) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A, 1); (B, -1)$ et $(C, 1)$.
b) Détermine et construis l'ensemble (C) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$.
2) On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
a) Démontre que H est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs $3, 1$ et -2.
b) Pour tout réel k, on désigne par (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = ka^2$.
Pour quelles valeurs du nombre réel k, (E_k) contient-il le point C ?
c) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$.

Exercice 28

On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace. On désigne par G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 3)$; $(B, 2)$ et $(C, -1)$ et par G_2 le barycentre des points pondérés $(A, 2)$; $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

1) a) Calcule $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de AB et AC.

b) En déduis que $G_1 \neq G_2$.

2) A tout point M de l'espace on fait correspondre le point M_1 tel que : $\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et le point M_2 tel que : $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) Démontre que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) par une homothétie que l'on précisera.

b) Montre que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant quand M décrit l'espace.

3) Détermine l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MM_1}.\overrightarrow{MM_2} = 0$.

Exercice 29

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 - z^2 + (-5 - 4i)z + 21 - 12i$.

1) a) Démontre qu'il existe un réel α tel que : $P(z) = 0$.

b) Détermine deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$.

c) Résous $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$.

2) On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives :

$z_A = 3 + 2i$; $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

a) Place ces points dans le repère.

b) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe : $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.

c) Que peut-on en déduire sur la nature du triangle BIA ?

3) Calcule l'affixe du point C image du point I par l'homothétie H, de centre A et de rapport 2.

4) Soit D le point barycentre du système $\{(A, 1);\ (B, -1);\ (C, 1)\}$.

a) Calcule l'affixe z_D du point D.

b) Montre que ABCD est un carré.

5) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$.

6) Soit l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$.

a) Montre que B appartient à (Γ_2).

b) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2).

Exercice 30

1) Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

a) Calcule $P(-1)$.

b) Détermine les réels a et b tels que pour tout nombre z, on ait : $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (unité :2cm). On désigne par A,B,C et G les points du plan d'affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = 2 + \sqrt{3}i$, $z_C = 2 - i\sqrt{3}$, $z_G = 3$.

a) Réalise une figure et place les points A, B, C et G.

b) Calcule les distances AB, AC et BC. En déduis la nature du triangle ABC.

c) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC

3) Soit (D) l'ensemble des points M du plan tel que : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG} = 12$. (**1**)

a) Montre que G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$.

b) Montre que la relation **(1)** est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG} = -4$. (**2**)

c) Vérifie que le point A appartient à l'ensemble (D).

d) Montre que la relation **(2)** est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG} = 0$.

e) En déduis l'ensemble (D) et trace le.

Exercice 31

1) Pour tout nombre complexe z, on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$.

a) Soit b un nombre réel.

Exprime en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(ib)$.

En déduis que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

b) Montre qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,
$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

c) Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

2) Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal.

a) Place dans le plan $\mathcal{P}$ les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3i, b = -3i, c = 5 + 2i$ et $d = 5 - 2i$.

b) Détermine l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C et D.

c) Déterminer l'ensemble E des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 10$.
Trace E sur la figure précédente.

Exercice 32

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,unité graphique : 2 cm).

1) a) Donne l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz - 2 = 4i - z$. On donnera la solution sous forme algébrique.

2) On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives $1, 2i$ et $3 + i$.

a) Fais une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b) Calcule l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.

c) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduis le module et un argument de ce nombre.

d) Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_c = z_A - z_B$. Montre que ABCD est un carré.

3) Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

a) Exprime le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

b) Montre que le point K défini par $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment $[AD]$.

c) Détermine l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AB}\right\|$. Construis Γ.

Exercice 33

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}, \overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$ et C tel que $ABCD$ soit un rectangle.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1) Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe z_E de E.

2) Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $z_F = 6 - i$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.

3) On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.

a) Exprime z' en fonction de z.

b) Détermine le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.

c) Détermine les images de C et de D par s.

d) Calcule l'aire de l'image par s du rectangle $ABCD$.

4) a) Détermine l'ensemble Ω des points M du plan tels que : $\left\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 9$.

b) Détermine en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

Exercice 34

Soit ABC un triangle isocèle en B.

1) Détermine les entiers naturels n pour lesquels les points $(A, -3), (B, 2n)$ et $(C, 2 - n)$ admettent un barycentre que l'on notera G_n.
On suppose dans la suite de l'exercice que $n \geq 3$.

2) Construis G_5.

3) Soit J le point du plan tel que : $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Démontre que : $\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = -\frac{1}{n(n-1)}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = \frac{n-2}{n}\overrightarrow{G_{n-1}G_n}$.

4) Démontre que les droites (CA) et (CG_3).

5) Exprime G_3 comme point d'intersection de deux droites puis construis G_3.

6) Justifie que $\overrightarrow{G_5G_6} = \frac{3}{5}\overrightarrow{G_4G_5}$ et $\overrightarrow{G_4G_5} = \frac{1}{3}\overrightarrow{G_3G_5}$.

7) En déduis la construction de G_4 et G_6.

Exercice 35

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit m un réel de l'intervalle $[-1; 1]$.
On note G_m le barycentre du système $\{(A; m^2+1), (B; m), (C; -m)\}$.
1) Représente les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construis les points G_1 et G_{-1}.
2) a) Montre que, pour tout réel m de l'intervalle $[-1; 1]$, on a l'égalité : $\overrightarrow{AG_m} = -\frac{m}{m^2+1}\overrightarrow{BC}$.
b) Etablis le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$.
c) En déduis l'ensemble des points G_m quand m décrit l'intervalle $[-1; 1]$.
3) Détermine l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.
4) Détermine l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.
5) L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0\,;\ 0\,;\ 2), (-1\,;\ 2\,;\ 1)$ et $(-1\,;\ 2\,;\ 5)$. Le point G_m et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.
a) Calcule les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montre que les ensembles (E) et (F) sont sécants.
b) Calcule le rayon du cercle $\mathcal{C}$ intersection de (E) et (F).

Exercice 36

Sur une droite (D) muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives -4 et 3.
Pour tout entier naturel n, on note : A_{n+1} le barycentre de $\{(A_n; 1), (B_n; 4)\}$ et B_{n+1} le barycentre de $\{(A_n; 3), (B_n; 2)\}$.
1) Place les points A_0, B_0, A_1 et B_1.
2) Les points A_n et B_n ont pour abscisses a_n et b_n respectivement. Ainsi $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$.
Démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.
3) a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$.
b) En déduis que : $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$
4) a) Exprime a_n et b_n en fonction de n.
b) Détermine les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.
c) Interprète ce résultat à l'aide des points A_n et B_n.

Exercice 37

Dans le plan (P), on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur $[AH]$ tel que $AH = BC = 4$ cm.
1) En justifiant la construction, place le point G, barycentre du système de points pondérés $\{(A, 2)\,; (B, 1)\,; (C, 1)\}$.
2) On désigne le point M un point quelconque de (P).
a) Montre que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.
b) Détermine et construis l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$.
3) On considère le système de points pondérés $\{(A, 2); (B, n); (C, n)\}$ où n est un entier naturel fixé.
a) Montre que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Place G_0, G_1, G_2.
b) Montre que le point G_n appartient au segment [AH].
c) Calcule la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.
Précise la position limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.
d) Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{V}\|$.
Montre que E_n est un cercle qui passe par le point A.
En précise le centre et le rayon, noté R_n.
e) Construis E_2.

APPLICATIONS AFFINES-ISOMÉTRIES

Exercice 1
Le plan est muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère les points $A\binom{2}{0}, B\binom{1}{1}, C\binom{-2}{-1}, A'\binom{3}{10}, B'\binom{4}{6}, C'\binom{-3}{-1}$.
Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$.
1) Montre que f est bijective.
2) Détermine l'expression analytique de f.

Exercice 2
Soit $A(3,0)$ et $B(1,-1)$ deux points du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
1) Montre qu'il existe une application affine telle que : $\begin{cases} f(O) = B \\ f(B) = B. \\ f(A) = A \end{cases}$
2) Calcule les coordonnées (x', y') de $f(M) = M'$ en fonction des coordonnées (x, y) de M.
3) Calcule fof et déduis la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

Exercice 3
On considère l'application affine $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$; $M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$.
1) Vérifie que f est bijective.
2) Détermine l'ensemble des points invariants par f.
3) On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M'. Exprime z' en fonction de z.
4) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 4
Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'application affine f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x'\,;\,y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
1) a) f est-elle bijective ? Justifie ta réponse.
b) Détermine l'ensemble des points invariants par f.
c) Quelle est l'image par f de la droite $(\mathcal{D})$: $y = 2x + 1$?
2) On désigne par $M(x\,;y)$ le point d'affixe z et par $M'(x'\,;\,y')$ le point d'affixe z' où z et z' sont des nombres complexes.
a) Sachant que $f(M) = M'$, exprime z' en fonction de z.
b) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 4
Le plan affine euclidienne $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.
Soit l'application affine $f\,:\,\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y) \to M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$.
1) Montre que f admet un seul point invariant J.
2) Montre que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ puis en déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.
3) Détermine le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f.

Exercice 5
Le plan est muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$.
1) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on Précisera.
2) Démontre que $f \circ f = f$.
3) a) Détermine l'ensemble des points invariants par f.
b) En déduis la nature des éléments caractéristiques.

Exercice 6

Le plan est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$

1) Démontre que $f \circ f = id$.
2) Démontre que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on Précisera.
3) Soit M un point du plan et M' son image par f.
   a) Démontre que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).
   b) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).
   c) En déduis les éléments caractéristiques de f.

Exercice 7

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui a tout point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14) \end{cases}$.

1) Démontre que f est un antidéplacement.
2) Démontre qu'il existe une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ de la direction de (Δ), tels que : $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale de base (Δ) et t la translation de vecteur $\vec{u}$. Détermine une équation de (Δ) et les coordonnées de $\vec{u}$.

Exercice 8

Dans $\mathcal{P}$, le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application affine f définie par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{6}{5} \\ y' = -\dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{12}{5} \end{cases}$$

1) Détermine l'ensemble des points invariants par f.
2) Démontre que f est une isométrie.
3) Détermine l'image par f de la droite d'équation $x = 1$.
4) Précise la nature de f.

Exercice 9

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine f définie par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \dfrac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}.$$

1) Démontre que f est une isométrie.
2) Trouve l'ensemble des points invariants par f.
3) Caractérise géométriquement l'application f.

Exercice 10

Le plan euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Etant donné un nombre réel a, on appelle T_a l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui a tout point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$.

1) Détermine le réel a pour que T_a soit bijective.
2) Détermine l'ensemble des points invariants par T_a.
3) a) Détermine a pour que T_a soit involutive.
   b) Caractérise géométriquement l'application T_a correspondant à cette valeur de a obtenue.

Exercice 11

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui a tout point $M(x;y)$ fait correspondre le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$

1) Exprime $z' = x' + iy'$ en focntion de $z = x + iy$
2) L'application f est elle un déplacement ou un antidéplacement ?
3) Quelle est l'ensemble des points invariants par f ?
4) en utilisant l'écriture complexe de f, démontre que $f \circ f$ est une translation.
   On désigne par $2\vec{v}$ le vecteur directeur de la translation.
5) Détermine la droite (D) de vecteur direction $\vec{v}$ telle que $f = t \circ s$, t la translation de vecteur $\vec{v}$ et s est la symétrie axiale d'axe (D).

Exercice 12

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui a tout point $M(x;y)$ fait correspondre le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 1 \\ y' = \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 1 \end{cases}$.

1) Quel est l'ensemble des points invariants de f ?
2) Démontre que f est une isométrie ponctuelle.
3) Démontre que $f \circ f$ est une translation.
4) On appelle O' l'image de O par f, I le milieu de $[OO']$, $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(5;1)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (D) la droite passant par I et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Soit la réflexion d'axe (D).
   Détermine l'expression analytique de s et démontre que f est la composée de s par la translation t dont on déterminera le vecteur.
5) Démontre que : $s \circ t = t \circ s$.

Exercice 13

Le plan affine E est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) a) Montre que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.
   b) Etudie l'ensemble des points invariants par f.
   c) Reconnaître la nature de l'application f.
2) Soit g l'application de E dans E qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M''(x'';y'')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

   a) Montre que g peut s'écrire $h \circ f$ où h est une application de E dans E que l'on Précisera.
   b) Sans Calcule, Vérifie que $h \circ f = f \circ h$.

Exercice 14

$\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ direct.
f et g sont les applications affines de $\mathcal{P}$ qui associent à tout point $M(x,y)$ le point $M'(x',y')$ telles que :
$f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$.

1) Pour chacune des applications f et g :
   a) Détermine l'ensemble des points invariants, Précise celles qui sont bijectives.
   b) Précise la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.
2) Définis analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.

Exercice 15

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$.

Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.
1) Exprime $(x';y')$ en fonction de $x;y)$ puis z' en fonction de z.
2) Montre que T admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe.
En déduire que T est un homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Exercice 16

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On désigne par S la réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$.
1) Soit M un point du plan et M_1 son image par S; on pose $M' = \sigma(M_1)$.
a) Calcule les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.
b) Caractérise la transformation qui fait passer de M à M'.
c) Au point $M(x\,;y)$ on associe maintenant le pont $N(X\,;\,Y)$ telles que : $\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$.
Montre que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.
2) Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, détermine l'ensemble décrit par N.
Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint (M, N) ?

Exercice 17

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit T_α l'application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x\,;\,y)$ associe le point $M'(x'\,;\,y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où α est un paramètre réel.
1) Montre que, pour tout α, T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera.
2) Montre qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle T_α est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport.
3) Montre qu'il existe 2 valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie.
Vérifie que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les note R et R^{-1}.

Exercice 18

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}$.
1) On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
Démontre que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 1) \\ y' = \frac{1}{5}(4x - 3y - 2) \end{cases}$.
2) a) Détermine l'ensemble des points invariants par f.
b) Quelle est la nature de l'application f ?
3) Détermine l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
4) On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
a) Donne une solution particulière $(x_0; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
b) Détermine l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
5) On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$.
Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'. Détermine les entiers y tels que $Re(z')$ et $Im(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Exercice 19

Dans l'espace (ε) muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $E(2;1;1)$, $A\left(-\frac{4}{3}; \frac{13}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ et l'application f de l'espace (ε) dans (ε) d'expression analytique : $\begin{cases} 3x' = x + 2y - 2z - 6 \\ 3y' = 2x + y + 2z + 6 \\ 3z' = -2x + 2y + z - 6 \end{cases}$.
1) Détermine $f(A)$.
2) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $M'(x';y';z')$ son image par f.
a) Démontre que : $\overrightarrow{MM'} = -\frac{2}{3}(x - y + z + 3)\vec{u}$ avec $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.
b) Démontre que l'ensemble (π) des points invariants par f est le plan d'équation : $x - y + z + 3 = 0$.
c) Justifie que la droite (MM') est orthogonale à (π).
d) Démontre que le milieu K du segment $[MM']$ appartient au plan (π).
e) En déduis la nature de f.

Exercice 20

On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$.

1) Montre que f est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associe φ est involutif.
2) a) Démontre que $f \circ f$ est une translation.
   b) Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.
   Précise la nature de l'application s telle que $f = t \circ s$ puis Prouver que $t \circ s = s \circ t$.
3) Montre que l'image (C') de la courbe (C_{-1}) par g a pour équation $y = -x + 2 + \ln x$.

Exercice 21

On donne deux points distincts A et B du plan affine et k un réel non nul. Soit M_1; l'image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport k.
Soit M' le barycentre des points B et M_1 affectés respectivement des coefficients α et 1, où α est un nombre réel distinct de -1.
Soit f l'application du plan P qui à tout point M du plan associe le point M'.

1) Montre que pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.
2) Montre que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on déterminera le vecteur translateur.
3) Montre que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f puis en déduis alors que f est une homothétie de centre G dont on déterminera le rapport.

Exercice 22

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : $OI = OJ$ et mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
A, B et C sont les milieux respectifs des segments $[IJ], [JO]$ et $[OI]$.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$. On pose : $F = r \circ t$ et $G = t \circ r$.

1) Fais une figure. (On prendra : $OI = 8$ cm).
2) a) Détermine $F(C)$ et $G(B)$.
   b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.
3) On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.
   a) Détermine la nature de la transformation $G \circ F^{-1}$.
   b) Détermine $(G \circ F^{-1})(O)$ puis caractérise la transformation $G \circ F^{-1}$.
   c) Détermine $(G \circ F)(I)$ puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $G \circ F$.
4) On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment.
   Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2. On pose : $S = h \circ r$.
   a) Ecris l'affixe de chacun des points A , B et C.
   b) Détermine l'écriture complexe de h et celle de r.
   c) Soit g l'application complexe associée à S.
   Démontre que : $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.
   d) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S.

Exercice 23

L'unité de longueur est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que :
mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et mes $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

I//

1) On considère la similitude directe S qui transforme A en B et C en A.
   a) Fais une figure en prenant $AC = 7$. (On complètera la figure au fur à mesure)
   b) Justifie que S n'est pas une translation.
   c) Justifie que l'angle de la similitude directe de S est $-\frac{\pi}{2}$.
   d) Détermine le rapport de S.
2) On note Ω le centre de S.
   a) Démontre que Ω appartient aux cercles (C') et (C) de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$.
   b) Justifie que Ω est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
3) Soit (Δ) une droite passant par A et ne passant pas par Ω. (D) est la perpendiculaire à (Δ) passant par C.
   On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (Δ).
   a) Détermine les images respectives de (D) et (Δ) par S.

b) En déduis l'image du point C' par S
c) Déduis de ce qui précède que le cercle de diamètre $[B'C']$ passe par un point fixe lorsque la droite (Δ) varie. Précise ce point fixe.

II//

1) Place le point I de la demi-droite $[AC)$ tel que : $AB = AI$.
2) Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$.
a) Démontre que l'affixe du point C est $\sqrt{3}$.
b) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z', image de M par S.
Justifie que : $z' = -i\frac{\sqrt{3}}{3}z + i$.
c) Détermine l'affixe du centre Ω de S.
3) a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.
b) Trace (Γ).

Exercice 24

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient les points A, A', B et B' d'affixes respectives : $z_A = 1 - 2i, z_{A'} = -2 + 4i, z_B = 3 - i, z_{B'} = 5i$.
1) a) Place les points A, A', B et B' dans le plan complexe. Monte que $ABB'A'$ est un rectangle.
b) Soit s la réflexion telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. On note (Δ) son axe.
Donne une équation de la droite (Δ) et trace-la dans le plan complexe.
c) On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z. Montre que $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1$.
2) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :
$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\overline{z} + 5 - i$.
a) On note C et D les images respectives de A et B par g; détermine les affixes de C et D puis place ces points dans le plan complexe.
b) Soit Ω le point d'affixe $1 + i$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
Montre que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.
c) Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z.
Donne les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.
3) On pose $f = h^{-1} \circ g$.
a) Détermine l'expression complexe de f.
b) Reconnaître f. En déduis une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

Exercice 25

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
1) On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$.
a) Exprime $(f \circ f)(z)$ en fonction de z.
b) Montre que $f = R \circ S$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).
c) Décompose R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe (D_1).
Réalise une figure, en y représentant l'axe (D_1) (unité graphique 2 cm).
2) On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' telle que :
$z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
a) Détermine une équation de l'ensemble des points invariants de g.
b) Montre que $g = T \circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).
c) Décompose la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduis que g est une réflexion, d'axe noté (D_2).
d) Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
En déduis une construction de la droite (D_2), qui n'utilise pas son équation, et l'illustre en complétant la figure précédente.

CONIQUES

Exercice 1

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la conique dont une équation cartésienne dans $\mathbb{R}$ est :

$a)\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; $b)\ x^2+2y^2=1$; $c)\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; $d)\ x^2-y^2=1$; $e)\ -\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{9}=1$; $f)\ y=-2\sqrt{-x^2+x}$

$g)\ x^2-y^2+x+y+1=0$; $h)\ x^2+x+2y^2+y=0$; $i)\ 3x^2-y^2+2x+1=0$; $j)\ 3x^2+4y^2-3x-2y-5=0$.

Exercice 2

1) (Γ) désigne la courbe d'équation : $x^2+(y-2)^2=\frac{1}{9}(y-1)^2$.

a) Démontre que (Γ) est une conique.

b) Précise l'excentricité, un foyer et la directrice associée à (Γ).

2) (E) est la conique d'équation : $4x^2+9y^2=1$.

a) Quelle est la nature de (E).

b) Détermine les axes et les sommets de la conique (E).

Exercice 3

A tout nombre complexe z on associe $f(z)$ tel que $f(z)=2z-\overline{z}$.

1) Détermine l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que : $|f(z)-3|=3$.

2) Précise la nature de (Γ) puis ses éléments caractéristiques (centre, axes, sommets, excentricité, foyers et directrices).

3) Représente (Γ).

Exercice 4

On considère la courbe (C) d'équation $xy-2x-3y-1=0$ et la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\frac{1-i}{2}z-2+2i$.

1) Démontre que f admet un point invariant P que l'on déterminera.

2) Reconnaître la nature de f puis donne ces éléments caractéristiques.

3) Exprime les coordonnées (x,y) de M en fonction des coordonnées (x',y') de M'.

4) Démontre que l'image de la courbe (C) par f est la courbe (C') d'équation : $x^2-y^2-x+3y-9=0$.

5) En déduis la nature de (C') puis Construis (C').

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.

On considère la droite (D) d'équation $x=1$ et le point $F(3;0)$.

Soit H le projeté orthogonal de $M(x;y)$ sur (D).

1) Détermine une équation cartésienne de l'ensemble (E) des points M tels que : $MF=\sqrt{3}MH$.

2) Détermine la nature de l'ensemble (E), puis ses sommets et l'équation de ses asymptotes.

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

1) On note $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que : $14z\overline{z}+16i(z-\overline{z})=z^2+\overline{z}^2$.

Démontre que M appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $3x^2+4y^2-8y=0$.

2) a) Justifie que $(\mathcal{C})$ est une ellipse. On note Ω son centre.

b) Précise les coordonnées de Ω.

c) Détermine une équation de l'axe focal de $(\mathcal{C})$.

d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives : $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}+i$;

Justifie que A et A' sont les sommets de $(\mathcal{C})$ situés sur son axe focal.

Justifie que F et F' sont les foyers de $(\mathcal{C})$.

3) Construis l'ellipse $(\mathcal{C})$.

4) On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.

a) Démontre qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$. est : $3x^2-y^2=1$.

b) Trace les asymptotes de (H).

c) Construis (H).

Exercice 7

Partie I

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}+2i$.

1) a) Calcule le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.

b) En déduis que le triangle OAB est équilatéral.

2) On note P et Q les milieux respectifs des segments $[OB]$ et $[AB]$.

r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

On pose : $f = t \circ r$.

a) Détermine l'image par f du point O.

b) Démontre que f est une rotation dont on donnera l'angle.

c) Construis le centre K de f.

Partie II

1) Soit M un point du plan d'affixe z. On pose $z = x + iy$, où x et y des nombres réels.

On note H le point d'affixe $x + 3i$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $2|z| = |y-3|$.

a) Démontre que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$.

b) Justifie que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée.

c) Démontre que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

d) Précise les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$.

e) Trace (Γ).

2) Soit (Γ') est l'image de (Γ) par f.

a) Démontre que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.

b) Précise un foyer et la directrice associée.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ tel que $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 2\text{cm}$.

K est le pont de coodronnées $(-1;\ 0)$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$.

1) Justifie que (Γ) est une ellipse.

2) On note :

− F' et F les foyers de (Γ).

− A' et A les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal.

L'abscisse de A' est négative. B' et B sont des deux sommets de l'ellipse.

a) Justifie que les coordonnées respectives F et F' dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ sont $(0;0)$ et $(-2;0)$.

b) Détermine les coordonnées de A', A, B' et B dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$.

c) Construis (Γ) dans le plan muni du repère $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$.

3) Soit M un point quelconque de (Γ).

a) Construis le point N tel que KMN soit un triangle rectangle isocèle en N de sens indirect puis, construis le point P symétrique de K par rapport à N.

b) Justifie que P est l'image de M par une similitude directe S de centre K dont on précisera le rapport et l'angle.

c) On admettra que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature.

Détermine et construis l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points P lorsque M décrit (Γ).

4) z étant l'affixe d'un point M quelconque du plan et z' l'affixe du point M', l'image de M par S.

a) Démontre que l'écriture complexe de la similitude directe S est $z' = (1-i)z - i$.

b) On note G' et G les images respectives par S des foyers F' et F de (Γ).

Détermine les coordonnées des points G' et G dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$.

c) Démontre qu'une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ est : $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$.

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, d'unité 1 cm, on considère les points $A(-1; 0)$ et I$(4; 0)$.
On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est le point O.

1) a) Démontre les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.
   b) Justifie que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$.
   c) Donne une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

2) a) Démontre qu'une équation de (E) dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est : $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
   b) Construis (E).

3) On considère l'équation : $(E_\alpha) : z \in \mathbb{C}, z^2 - 2(4 + 5\cos\alpha)z + (4\cos\alpha + 5)^2 = 0$ avec $\alpha \in [0; \pi]$.
   a) Justifie que le discriminant de (E_α) est $\Delta = (6i\sin\alpha)^2$.
   b) Résous l'équation (E_α). On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.
   c) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.
   Démontre que M_1 et M_2 appartiennent à (E) lorsque α décrit l'intervalle $[0; \pi]$.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.
A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - 4z$.

1) Calcule les coordonnées $(x'; y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ du point M.

2) a) Démontre que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur est une hyperbole.
   b) Précise dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H).
   a) Construis (H).

3) Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$.
   Détermine les points M du plan tels que le quadrilatère $OMM'P$ soit un parallélogramme.