NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDES

Forme algébrique

Exercice 1

Détermine les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + i$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_5 = 3 + i\sqrt{3}$; $z_6 = 2i$; $z_7 = -3$

$z_8 = -4 + 4i$; $z_9 = -\sqrt{3} + 3i$; $z_{10} = 1 - i$; $z_{11} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_{12} = 2$; $z_{13} = 2 + 2i$; $z_{14} = 3 + 3i$

$z_{15} = \dfrac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i\,\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$; $z_{16} = \dfrac{x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2}{(x+1)^2 + (y-3)^2} + \dfrac{3x - y + 6}{(x+1)^2 + (y-3)^2}i.$

Exercice 2

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = 1 + i$.

Ecris sous forme algébrique : $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \times z_2$; z_1^2 ; $\frac{1}{z_2}$; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1 - 2z_2$; $\frac{z_2}{z_1 - z_2}$; $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$.

Exercice 3

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$a)\ z = (1+i)(1-2i)$; $b)\ z = \frac{1+i}{-1+i}$; $c)\ z = \frac{8}{-1+i\sqrt{3}}$; $d)\ z = \frac{1}{-\sqrt{3}+i}$; $e)\ z = (1+i)^2(3-2i)$ $f)\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

$g)\ z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$; $h)\ z = \dfrac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4}{(1+i)^3}$; $i)\ z = (2-2i)^3\left(\sqrt{3} - i\right)^4$; $j)\ z = \left(\dfrac{1+i}{3+2i}\right)^2$; $k)\ z = (1-i)^3 \times i^{11}$.

$l)\ z = \dfrac{3+i}{2+5i}$; $m)\ z = \dfrac{i}{2+3i}$; $n)\ z = (1+i)^{10}$; $o)\ z = \dfrac{3i+2}{5+3i}(2-3i)$; $p)\ z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2i}$

$q)\ z = i^{2003}$; $r)\ z = i^{34}$; $s)\ z = i^{1984}$; $t)\ z = i^{2045}$; $u)\ z = i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28}$; $v)\ z = \sum_{k=0}^{2000} i^k$.

Nombre réel et imaginaire pur

Exercice 4

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par : $z = (x + 2i)(1 - xi)$.

1) Détermine l'écriture algébrique du nombre complexe z.

2) a) Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un nombre réel ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un imaginaire pur ?

Exercice 5

1) Montre que le nombre $z = \frac{2+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-i} + \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+i}$ est un nombre réel.

2) Montre que le nombre $z = \frac{2+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-i} - \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+i}$ est un imaginaire pur.

3) Démontre que si z_1 et z_2 ont pour module 1 alors le nombre complexe $\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2 + 1}$ est réel.

4) Démontre que si z_1 et z_2 ont pour module 1 alors le nombre complexe $\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 + 1}$ est un imaginaire pur.

Forme trigonométrie et exponentielle

Exercice 6

Détermine un angle α tel que :

1) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$; 5) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$; 7) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; 10) $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

11) $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; 13) $\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -1 \end{cases}$; 14) $\begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$; 15) $\begin{cases} \cos\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$; 16) $\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \end{cases}$

Exercice 7

Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + i$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_5 = 3 + i\sqrt{3}$; $z_6 = 2i$; $z_7 = -3$

$z_8 = (-4 + 4i)^2$; $z_9 = \left(-\sqrt{3} + 3i\right)^2$; $z_{10} = (1 - i)\left(\sqrt{3} + i\right)$; $z_{11} = \frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3} - i\right)^3}$; $z_{12} = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}\right)^3$.

Exercice 8

Détermine la forme trigonométrique et exponentielle des nombres complexes suivants :

$a)\ z = -i$; $b)\ z = \sqrt{3}$; $c)\ z = \frac{1-i}{2}$; $d)\ z = 1 - i\sqrt{3}$; $e)\ z = 1 + i$

$f)\ z = -1 - i$; $g)\ z = -i$; $h)\ z = 1 + i\sqrt{3}$; $i)\ z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{2014}$; $j)\ z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3$

$k)\ z = \dfrac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6}{(5 + 5i)^4}$; $l)\ z = (1 + i)(-2 - 2i)$; $m)\ z = \cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}$; $n)\ z = -i^3$

$o)\ z = (-1 + i)^2(1 + i)^2$; $p)\ z = (1 + i)^4\left(\sqrt{3} - i\right)^3$; $q)\ z = -7\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$r)\ z = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1 - i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$; $s)\ z = (1 - i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $t)\ z = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1 - i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$; $u)\ z = (1 + i)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 9

Détermine le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$; $z_2 = -\cos\theta - i\sin\theta$; $z_3 = -\sin\theta + i\cos\theta$; $z_4 = -\sin\theta - i\cos\theta$; $z_5 = \sin\theta + i\cos\theta$

$z_6 = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$; $z_7 = \frac{1 - \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$ et $\theta \in [0; \pi[$; $z_8 = \left(\frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}\right)^n$; $z_9 = \frac{1}{1 + i\tan\theta}$ et $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

$z_{10} = 1 + i\tan\theta$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; $z_{11} = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta$ et $\theta \in]0; \pi]$; $z_{12} = 2\cos^2\theta + i\sin 2\theta$ et $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice 10

Complète le tableau suivant :

Formes algébriques de Z	$2\sqrt{3} - 2i$		
Formes trigonométriques de Z		$2\left[Cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$	
Formes exponentielles de Z			$4e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

Exercice 11

On pose : $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1) Calcule z^2 puis en déduis sa forme trigonométrique

2) En déduis la forme trigonométrique z.

3) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}, \sin\frac{7\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 12

On donne $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$ et $B = -5\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

1) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $A, \overline{A}, B, \frac{1}{A}, A \times B, \frac{B}{A}$ et $\frac{A}{B^2}$.

2) Soit Z un nombre complexe tel que $AZ = B$.

a) Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et de $\sin\frac{13\pi}{12}$.

c) Calcule $(Z)^{2008}$.

Exercice 13

On pose : $z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$

1) Met sous forme trigonométrique z, z' et $Z = \frac{z}{z'}$.

2) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$.

b) Place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 14

On considère le nombre complexe : $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

1) Ecris z^2 sous forme algébrique.

2) Détermine le module et un argument de z^2. En déduis le module et un argument de z.

3) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{2}$ et place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Trigonométrie

Exercice 15

Linéarise les expressions suivantes :

sin^4x ; cos^4x ; sin^6x ; cos^6x ; $sin^2x.cosx$; $sin^3x.cos^2x$; $sinx.cos^3x$; $sin^3\left(\frac{x}{2}\right)$; $cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$.

sin^5x ; cos^5x ; sin^4x ; $cos^3 2x$; $sin^3x + cos^2x$; $sin3x.cos^2 2x$; $sin^4x + cos^4x$.

Exercice 16

Exprime en fonction de $\cos x$ et $\sin x$: $\sin 3x$; $\cos 3x$; $\cos 4x$; $\sin 4x$; $\sin 5x$; ; $\cos 5x$; $\cos 6x$; $\sin 6x$.

Ensemble des points

Exercice 17

Détermine puis construis :

1) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes z tels que : $|z - i| = 2$.

2) L'ensemble (λ) des points M d'affixes z tels que : $|z + 1 - 2i| = |z - 1 - i|$.

3) L'ensemble (H) des points M d'affixes z tels que : $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 6$.

4) L'ensemble (G) des points M d'affixes z tels que : $|iz - 1| = |-z + 2 - i|$.

5) L'ensemble (R) des points M d'affixes z tels que : $|2iz + 2 + i| = 3$.

6) L'ensemble (φ) des points M d'affixes z tels que : $arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

7) L'ensemble (ω) des points M d'affixes z tels que : $arg(3\bar{z} - 1 + i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

8) L'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que : $arg\left(\frac{z + 2i}{z + 1 - 3i}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

9) L'ensemble (I) des points M d'affixes z tels que : $arg(iz - 1 + 2i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

10) L'ensemble (S) des points M d'affixes z tels que : $arg(\frac{z}{1 + i}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

11) L'ensemble (F) des points M d'affixes z tels que : $|\bar{z} + 1 + 2i| \leq 1$.

12) L'ensemble (O) des points M d'affixes z tels que : $1 \leq |z + 1| \leq 2$.

Exercice 18

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de $2i$ et soit $Z = \frac{z + 1}{z - 2i}$.

Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

1) $|Z| = 1$.

2) Z est un imaginaire pur.

3) Z est un réel.

4) Z est un argument égale à $\frac{\pi}{2}$.
5) Z est un réel strictement positif.

Figures géométries

Exercice 19

A// Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : -2 ; $-3i$ et $2-6i$.
Démontre que ces trois points sont alignés.

B// Soient A, B, C, D et E trois point points d'affixes respectives : $1-3i$; 3 ; $2i$; $1-i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}+i$.
1) Détermine l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$.
2) Détermine les distances AB, BD et EC.

C// Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $3+i$; $2i$ et $2-2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B et C.
2) Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.
3) Détermine l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme.

D// Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $-1+i\sqrt{3}$; 2 et $-1-i\sqrt{3}$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B et C.
2) Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

E// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2+i$; $2-i$; $5-2i$ et $5+2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

F// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-1+2i$; $4+3i$; $3i$ et $4-3i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

G// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2-2i$; $-1+7i$; $4+2i$ et $-4-2i$ et Ω le point d'affixe $-1+2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C, D et Ω.
2) Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre Ω et le rayon 5.

H// Soient A, B, C et D trois points d'affixes respectives : $-3-i$; $-2+4i$; $3-i$ et -2..
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires (vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont orthogonaux).

I// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $5+i$; -2 ; $1+i$ et $-4-2i$.
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles (vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont colinéaires).

K// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $1+i$; $-2i$; $3+i$ et $4+2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre que le quadrilatère ABCD est un losange.

L// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $3i$; $-2+i$; $1-2i$ et 3.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

M// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-5-i$; $-3-3i$; $-1-i$ et $-3+i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre le quadrilatère ABCD est un carré.

N// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2i$; 1 ; $3+i$ et $4+4i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.

O// Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-1+3i$; -2 ; $-1-i$ et $-2+2i$.
1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2) Démontre le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

P// Soient A, B et C trois point points d'affixes respectives : $1-3i$; $4+5i$ et $-3+2i$.
1) Détermine l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Détermine l'affixe des points D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$
3) Démontre que A, D et E sont alignés.

Les symétriques

Exercice 20

On considère les points A d'affixe $3+i$ et I d'affixe 1.
1) On note B le symétrique de A par rapport au point O, détermine l'affixe de B.
2) On note C le symétrique de A par rapport au point I, détermine l'affixe de C.
2) On note D le symétrique de A par rapport à (OJ), détermine l'affixe de D.
3) On note E le symétrique de A par rapport au point (OI), détermine l'affixe de E.

Racines carrées

Exercice 21

Détermine les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de chacun des nombres complexes suivants :

$45+28i$; $-5+12i$; $8-6i$; $120-22i$; $-2i$; $8i$; $46-14\sqrt{3}i$; -3 ; $6+6i\sqrt{3}$; $-7-24i$.

Résolution d'équations et systèmes

Exercice 22

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)\ 2iz-3=z+i$; $b)\ \frac{z-1}{iz+3}=4i$; $c)\ 3z-5+2iz=2i-3z+4iz$; $d)\ (z+4)(6-2i)=(3+2i)z$

$e)(2+3i)z-(5+2i)=3z+4i$; $f)\ 6+2i-4iz=3z+2$; $g)\ 2z-3+4i=5+i$.

Exercice 23

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)\ iz-3=2\bar{z}$; $b)\ 3\bar{z}-2iz=2-3i$; $c)\ iz+2\bar{z}=i-1$; $d)\ z+(1+3i)\bar{z}=5+3i$

$e)\ z-2+i+\overline{z+i-1}=0$; $f)\ z^2-\bar{z}+1=0$; $g)\ iz^2-2\bar{z}-i=0$; $h)\ iz^2-2\bar{z}+2-i=0$.

Exercice 24

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)\ z^2+2i=0$; $b)\ z^2-4(1+i)z+10i=0$; $c)z^2-3z+3-i=0$; $d)\ z^2+\sqrt{3}z+1=0$

$e)\ z^2-(2+6i)z-16+12i=0$; $f)\ z^2+2=0$; $g)\ z^2-4=0$; $h)\ z+\frac{1}{z}=1$; $h)\ z+\frac{1}{z}=1+\sqrt{3}i$

$i)\ z^2=-3+4i$; $j)\ z^2-2z\cos\theta+1=0$; $k)\ z^2+(2-3i)z-6i=0$; $l)\ \left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2-6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)+13=0$

$m)\ z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$; $n)\ (1+i)z^2-(5+i)z+6+4i=0$; $o)\ z^2=i$

$p)\ z^2-\left(\sqrt{3}+i\right)z+1+i\sqrt{3}=0$; $q)\ iz^2-2(\sin\theta+i)z+2\sin\theta=0$; $r)\ z^2-4\sin\theta z+4=0$

$s)\ z^2-(2+mi)z+2+m(-1+i)=0$; $t)\ iz^2-(1-5i)z+6i=0$; $u)\ z^2=-7-24i$.

Exercice 25

Montre que chacune des équations ci-dessous admet une solution réelle et termine sa résolution.

1) $z^3+(-4+i)z^2+3z+8-i=0$.

2) $z^3-(3+2i)z^2+(1+4i)z+1-2i=0$.

3) $8z^3-8(1+i)z^2+6iz+1-i=0$.

4) $z^3-(3+2i)z^2+(1+5i)z+2-2i=0$.

5) $z^3-\left(6+i\sqrt{3}\right)z^2+\left(11+4i\sqrt{3}\right)z-6-3i\sqrt{3}=0$ (admet 2 solutions réelles).

Exercice 26

Montre que chacune des équations ci-dessous admet une solution imaginaire pure et termine sa résolution.

1) $z^3-2iz^2+4(1+i)z+16+16i=0$.

2) $z^3+(1-i)z^2+(2+2i)z-8i=0$.

3) $z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=0$.

4) $z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}=0$.

5) $z^3-(2+3i)z^2+2(5+3i)z-20=0$ (admet 2 solutions imaginaires pures).

Exercice 27

Vérifie que $P(\alpha)=0$ et termine la résolution de l'équation $P(z)=0$.

1) $P(z)=z^3+(3-2i)z^2+(1-4i)z-1-2i$ et $\alpha=-2+i$.

2)$P(z)=z^3+(-6-4i)z^2+(12+21i)z+9-45i$ et $\alpha=3-2i$.

3) $P(z)=4z^3-6i\sqrt{3}z^2-3\left(3+i\sqrt{3}\right)z-4$ et $\alpha=1+i\sqrt{3}$.

4)$P(z)=z^3+3z^2-3z-5-20i$ et $\alpha=-1-2i$.

5) $P(z)=z^3+\left(3-\sqrt{3}\right)z^2+\left(6-2\sqrt{3}\right)z+4-4\sqrt{3}$ et $\alpha=\sqrt{3}-1$.

Exercice 28

Soit $P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$.

1) Vérifie que $P(1)=0$.

2) En déduis une factorisation de $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.
3) En utilisant la première question, résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

<u>Exercice 29</u>
Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)\ z^3 = 1$; $b)\ z^3 = 8i$; $c)\ z^3 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$; $d)\ z^3 - 8 = 0$; $e)\ \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2 = 0.$

<u>Exercice 30</u>
Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$a)\ z^4 - (5 - 14\,i)z^2 - (24 + 10i) = 0$; $b)\ z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$; $c)\ 2z^4 - 5z^2 - 12 = 0$; $d)\ z^4 + z^2 + 1 = 0.$

<u>Exercice 31</u>
On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 - 3z + 1$. α désigne un complexe quelconque.
1) Montre que si α est solution de l'équation $P(\alpha) = 0$, il en est de même de $\overline{\alpha}$ et de $\frac{1}{\alpha}$.
2) a) Calcule $P(1 + i)$.
b) En déduis la résolution de l'équation $P(\alpha) = 0$.

<u>Exercice 32</u>
Résous dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

$a)\ \begin{cases} z_1 \times z_2 = 9 \\ z_1 + z_2 = 3 \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} (2+3i)z - 5z' = -1 \\ (1-i)z + 2z' = 2(1+i) \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} ix - 3y = 2 - 3i \\ (1+i)x + 2iy = 5 - i \end{cases}$; $g)\ \begin{cases} 2z_1 \times z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} ix - 3y = 2 - 3i \\ (1+i)x + 2iy = 5 - i \end{cases}$; $e)\ \begin{cases} (2+i)x + 7y = 1 + 2i \\ (1-i)\bar{x} - i\bar{y} = 4 - i \end{cases}$; $f)\ \begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2 + 6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5 + 4i \end{cases}$

<u>Exercice 33</u>
Résous dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants :

$a)\ \begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$ et $b)\ \begin{cases} x + yi - 2z = 10 \\ x - y + 2i\,z = 20 \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30 \end{cases}$.

Racine $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe et d'unité

<u>Exercice 34</u>
Détermine dans $\mathbb{C}$ **:**
1) Les racines cubiques de 1 ; 8 ; $8i$; $4\sqrt{3} - 4i$; $4\sqrt{2}(-1 + i)$; $-27i$; $18 + 26i$.
2) Les racines quatrièmes de 1 ; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $8\sqrt{2}(1 - i)$; $1 + 4i\sqrt{5}$; $3 + 4i$; $8\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.
3) Les racines cinquièmes de 1 et i.
4) Les racines sixièmes de 1 et $4\sqrt{2}(-1 + i)$.

<u>Exercice 35</u>
z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E): $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.
1) Vérifie que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).
2) Détermine sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduis dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

<u>Exercice 36</u>
1) Résous dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 1$
2) a) Développe $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$
b) Soit l'équation (E): $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.
En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, détermine sous forme algébrique et trigonométrie les racines de l'équation (E).
c) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 37

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a)\ z^6-(1-i)z^3-i=0$; $b)\ z^6-\sqrt{2}z^3+1=0$; $c)\ z^6-9iz^3+18-26i=0$ (On calculera $(2+i)^2$ et $(1-i)^2$).

Similitudes

Exercice 38

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-1-i$; i ; $1+3i$ et $5+i$.

Détermine dans chaque cas, l'écriture complexe de la similitude directe f donnée :

1) f transforme O en A et B en C.
2) f transforme A en C et B en D.
3) f admet un centre A et transforme C en D.
4) f laisse invariant le point C et transforme A en B.

Exercice 39

Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe (S) dont l'écriture complexe est :

$z'=(1+i)z+1-i$; $z'=(1-i)z+i$; $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2i\sqrt{3}$; $z'=-iz+2+6i$

Exercice 40

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-i$; $2i$ et $3-i$.

1) Détermine l'affixe du point I, l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2+4i$.
2) Détermine l'affixe du point D, l'image du point C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3) Détermine l'affixe du point E, l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
4) Détermine l'affixe du point F, l'image du point E par l'homothétie de centre B et rapport 2.
5) Détermine l'affixe du point G, l'image du point F par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 41

Pour chacune des similitudes directes et indirectes f, donne la nature et les éléments caractéristiques :

1) f d'écriture complexe $z'=-3z+1-i$; 2) f d'écriture complexe $z'=z+1-2i$
3) f d'écriture complexe $z'=e^{-\frac{\pi}{4}i}z+1+\sqrt{2}-i$; 4) f d'écriture complexe $z'=iz+1$
5) f d'écriture complexe $z'=(1+i)z-1+i$; 6) f d'écriture complexe $z'=e^{\frac{2\pi}{3}i}z$
7) f d'écriture complexe $z'=\overline{z}-4i$; 8) f d'écriture complexe $z'=-z-2i$.
9) f d'écriture complexe $z'=i\overline{z}+1$; 10) f d'écriture complexe $z'=(1+i)\overline{z}+i$.

Exercice 42

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $4i$; $2+2i$ et $3+3i$.

Soit S la similitude directe transformant O en B et A en C.

1) Détermine le rapport k et l'angle θ de S
2) Détermine l'écriture complexe f associée à S.
3) Détermine l'affixe de Ω le centre de S.

Exercice 43

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=2i$; $z_B=2+i$ et $z_C=1-i$.

Soit S la similitude directe de centre C, d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

1) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z'=(1-i)z+1+i$.
2) Soient D et E deux points du plan tels que $S(D)=A$ et $S(B)=E$.
   Détermine les affixes des points D et E.

Exercice 44

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x'=x+y+2 \\ y'=-x+y-1 \end{cases}$.

1) Détermine l'écriture complexe de f.
2) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 45

Détermine l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1) f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1-3i$.
2) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. (avec $z_A = 3+i$ et $z_B = 2i$)
3) f est la translation qui transforme A d'affixe $2-i$ en B d'affixe $1-3i$.
4) f est l'homothétie de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui transforme A d'affixe $1+\sqrt{3}i$ en B d'affixe $-1+i$.
5) f est l'homothétie de centre A d'affixe $2+2i$ et de rapport -3.
6) f est l'homothétie de centre O et de rapport 2.
7) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1+i$ en B d'affixe $-2+i$.
8) f est la rotation de centre C d'affixe $2+i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
9) f est la rotation de centre J et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. (Le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$).
10) f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
11) f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1-i$ en B d'affixe $-i$.
12) f est la similitude directe plane de centre $A(1;-1)$, de rapport 3 et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.
13) f est la similitude directe plane de centre A d'affixe i, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
14) f est la similitude directe plane de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
15) f est la similitude directe plane de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, transformant A en B. (avec $z_A = 3$ et $z_B = 2i$)

Exercices de perfectionnement

Exercice 46

1) Pour tout nombre complexe z**,** on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$
   a) Calcule $P(-1)$
   b) Détermine les réels a et b tels que pour tout nombre z, on ait : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (unité : 2cm) .
   On désigne par A,B,C et G les points du plan d'affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = 2+\sqrt{3}i$, $z_C = 2 - i\sqrt{3}$, $z_G = 3$.
   a) Réalise une figure et place les points A, B, C et G.
   b**)** Calcule les distances AB, AC et BC puis en déduis la nature du triangle ABC**.**
   c) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC

Exercice 47

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

1) Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$.
2) On pose : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i)z - 8i$.
   a) Justifie que : $P(-2i) = 0$.
   b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$.
   c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.
3) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-2i$; $-2+2i$ et $1+i$.
   On note D le symétrique de A par rapport au point O.
   a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
   b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.
   c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 48

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 4(2+4i)$.

1) Calcule $P(2i)$. Que peut-on conclure ?
2) Détermine les réels complexes a, b et c tels que pour tout nombre z, on ait : $P(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$.
3) a) Calcule $(1+3i)^2$.
   b) En déduis la résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$.
4) On désigne par A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = 2 - 2i$.

a) Place les points A, B et C.

b) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduis la nature du triangle ABC.

c) Soit D un point d'affixe z_D telle que $z_D - z_C = z_A - z_B$.
Détermine z_D puis place sur la figure précédente. En déduis la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 49

Soit $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z}_C$

a) Place les points A, B, C et D.

b) Quelle est la nature de triangle ACD ?

c) Montre que les points A, B, C et D appartiennent à même cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.
Donne une équation de $(\mathcal{C})$.

4) On note E le symétrique de C par rapport à O.
Précise l'affixe de E et détermine la nature du triangle BED.

Exercice 50

1) Résous dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a) $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$

b) $z + \frac{1}{z} = 1$; $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

2) Soit P le polynôme de la variable complexe z tel que : $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.

a) Vérifie que pour tout z non nul on a :
$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$.

b) En utilisant ce qui précède, résous l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 51

Soient les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$.

1) Détermine le module et un argument des complexes : z_1; z_2 et z_3. En déduis que les points M_1 ; M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1; z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera. Fais la représentation graphique.

2) On pose $z_4 = -2z_1\left(\frac{z_2}{z_3}\right)^2$. Met z_4 sous la forme algébrique

3) Détermine les racines carrées de z_4.

4) On pose $z_5 = -4z_1z_3$. Détermine les racines quatrièmes de z_5.
Fais la représentation graphique.

5) a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) Ecris chacune des solutions sous forme exponentielle.

Exercice 52

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 7i + 4$.

1) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on donnera.

2) Trouve les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

3) a) Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i = 0$.

b) En déduis la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

4) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2 - i, i$ et $2 + 3i$.

a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Calcule : AB, AC et BC. En déduis la nature du triangle ABC.

Exercice 53

Soit P le polynôme complexe défini par : $P(z) = z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$.

1) Justifie que : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + (-5 + i)z + 8 - 4i)$.

2) a) Détermine les racines carrées du nombre complexe : $-8 + 6i$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i$.
b) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $P(z) = 0$.
3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = -3 + i$ et $z_C = -2 - 2i$.
a) Place les points A, B et C.
b) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$.
c) En déduis la nature du triangle ABC.

Exercice 54

1) On considère l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 + (-1-i)z^2 + 2(1+3i)z + 8 = 0$.
a) Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
b) Résous $\mathbb{C}$ dans l'équation (E).
2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $2i$, $2 - 2i$ et $-1 + i$.
a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
b) Détermine l'affixe du point D pour que $ADBC$ soit un parallélogramme. Place le point D.
3) On pose $Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.
a) Ecris Z sous forme algébrique. En déduis la nature du triangle ABC.
b) Détermine l'affixe z_E du point E milieu de $[AB]$. Place le point E.

Exercice 55

On considère, dans $\mathbb{C}$, le polynôme suivant : $p(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(-11+6i)z - 3(12+4i)$.
1) Démontre que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_1 que l'on déterminera.
2) Détermine le polynôme $q(z)$ tel que : $p(z) = (z - z_1)q(z)$.
3) Démontre que l'équation $q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_2 que l'on déterminera.
4) Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$.
5) On note z_3 la troisième solution de l'équation $p(z) = 0$.
Démontre que les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives et sont alignés.

Exercice 56

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2} = 0$.
1) Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E).
2) Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :
$z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2} = (z - iy)(z^2 + az + b)$.
3) Achève la résolution de (E) puis écris chacune des solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 57

I/ On pose $a = \sqrt{3} - i$; $b = -\sqrt{3} - i$; $c = \frac{a^2}{b^3}$.
1) Détermine le module et un argument de c.
2) Donne la forme trigonométrique de $t = ab$.
II/ Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme d'inconnue $z : P(z) = z^3 - 4iz^2 - 6z + 4i$.
1) Calcule $P(2i)$.
2) Détermine les complexes a et b tels que pour tout complexe z on ait : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$.
3) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On désigne par z_1 la solution imaginaire pure et par z_2 et z_3 les deux autres solutions.
b) Compare z_1 et par $z_2 + z_3$.

Exercice 58

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes associés au plan affine rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les complexes z_1 et z_2 définis par : $z_1 = \frac{i - 13}{-12 + 14i}$ et $z_2 = \frac{2i + 1}{1 - 3i}$.
1) Ecris z_1 et z_2 sous forme algébrique, puis détermine le module et un argument de chacun d'eux.
2) On désigne par A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2, détermine le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduis la nature du triangle AOB.

Exercice 59
On considère l'équation : (E) : $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$.
1) Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.
2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$.
   a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
   b) Montre que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ?
   c) Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B.
   Donne l'écriture complexe de S et précise son centre Ω.

Exercice 60
On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z + 20$, où z est un nombre complexe.
1) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + az + b)$.
2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3) Place dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les images A, B, C et D des nombres complexes respectifs $z_A = -2 + 4i$, $z_B = -2 - 4i$, $z_C = 2 + 3i$ et $z_D = 2 - 3i$. Fais une figure.
4) Soit S la similitude directe qui transforme A en A et C en B.
   a) Détermine l'écriture complexe de S.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
   a) Détermine l'image du point B par S.

Exercice 61
1) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, détermine le module et un argument de chaque solution.
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z$.
   a) Détermine la nature de la transformation T et donne tous ses éléments caractéristiques.
   b) Soit A le point d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$. Détermine les affixes respectives z_B et z_C des points B et C tels que B = T(A) et C = T(B). Construis les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
3) Calcule $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$, puis en déduis la nature du triangle ABC.

Exercice 62
Soit a un nombre réel quelconque. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :
$z^3 - (ai + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai = 0$.
1) Détermine le réel a pour que $-2i$ soit une solution de (E).
2) Détermine le polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que :
   $z \in \mathbb{C}, z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = Q(z).(z - \sqrt{3} - i)$
3) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) pour $a = -2$.
4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives :
   $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -2i$ et $z_C = \sqrt{3} - i$
   a) Place les points A, B et C.
   b) Détermine le module et l'argument de des nombres complexes z_A et z_C.
   c) D désigne le symétrique de A par rapport à (OJ). Montre que le triangle CDA est rectangle en A.
   d) Montre que les points ACBD sont cocyclique.

Exercice 63
On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Soit le polynôme P de la variable complexe z tel que : $P(z) = z^3 + z^2 + (-5 + 4i)z - 21 - 12i$.
1) Calcule $P(3)$ et mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3) Dans le plan complexe soit les points A, B et C d'affixes respectifs 3 ; $1 - 2i$; $3 + 2i$.
   a) Détermine la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.
   b) Détermine ses éléments caractéristiques.

Exercice 64

A//

1) Détermine le nombre complexe z_1 tel que $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1+i\sqrt{3})z_1] = \frac{7\pi}{12}$.

2) Soit $P(z) = z^2 - 4z + 8$.

a) Montre que z_1 est solution de l'équation $P(z) = 0$. Trouve l'autre solution z_2.

b) Détermine le module et un argument de z_2.

B// Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Détermine sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f, A étant l'image de la solution de l'équation $P(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative ; $P(z)$ défini dans A// 2).

Exercice 65

1) On considère l'équation (E): $z \in \mathbb{C},\ z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.

a) Justifie que $2i$ est une solution de (E).

b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)(z^2 + (1+3i)z - 4)$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$.

d) Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i,\ 1-i,\ 2i$ et $-2-2i$.
Place les points A, B, C et D dans le plan complexe. Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

3) Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.

a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$ et justifie que $S(B) = C$.

c) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S.

Exercice 66

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $[z^2 - 2(1+i)z + 4i] \times (z^2 + 4z + 8) = 0$.
Les images des racines dans le plan complexe sont notées A, B, C, D tels que :
- A et B ont même abscisse.
- A et C ont même ordonnée.

2) Définis la similitude directe s du plan complexe telle que : $s(A) = C$ et $s(B) = D$.
Donne l'angle, le rapport et le centre de Ω.

Exercice 67

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.
On pose : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 - 6z^2 + (12-i)z - 9 + 3i$.

1) Démontre qu'il existe un réel α tel que : $P(z) = 0$.

2) Détermine deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z-\alpha)(z^2 + az + b)$.

3) Résous $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

4) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $3, 2+i$ et $1-i$.

a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Démontre qu'il existe une unique similitude directe S de centre C, qui transforme A en B.

c) Détermine les éléments caractéristique de S.

Exercice 68

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme :
$P(z) = z^3 + (-3+5i)z^2 - 2(4+5i)z + 10 - 10i$.

1) Détermine les racines carrées du nombre complexe $u = -8i$.

2) a) Démontre que P peut s'écrire : $P(z) = (z - (3-i))(z^2 + 4iz - 4 + 2i)$.

b) En déduis les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3 - i$, $z_B = 1 - 3i$ et $z_C = -1 - i$.

a) Calcule le rapport $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

b) En déduis la nature du triangle ABC.

c) Détermine l'affixe du point D, centre de la rotation $\mathcal{R}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme C en A.

4) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C.

a) Détermine l'écriture complexe de S.

b) Détermine les éléments caractéristiques de S.

Exercice 69

1) a) Montre que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - 1 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

c) Déduis des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2) a) Ecris $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

b) En déduis les arguments des solutions de (E).

3) Déduis des questions 1) c) et 2) b) les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 70

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 9z - 27$.

a) Factorise $P(z)$, puis résous $P(z) = 0$.

b) Donne la nature du triangle formé par les points images des solutions de cette équation.

2) On nomme A, B, C et D les points d'affixes respectives a, b, c et d tels que : $a = 3; b = -3i; c = 3i$ et $d = 2 - \frac{5}{2}i$.

a) Détermine l'affixe du point E, image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Détermine l'affixe du point I, symétrique de B par rapport à D puis celle du point J, symétrique de C par rapport à E.

c) Détermine l'affixe du point F, milieu du segment $[IJ]$.

d) Précise en justifiant, la nature du quadrilatère $ODFE$.

e) On pose $Z = \frac{z_J - z_A}{z_I - z_A}$. Calcule Z.

En interprétant géométriquement le module et un argument de Z, détermine la nature du triangle AIJ.

Exercice 71

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J).

On considère la transforme S du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1) a) Soit Ω le point d'affixe 2. Vérifie que : $S(\Omega) = \Omega$.

b) Justifie que S est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2) a) Démontre que $\forall z \neq 2$, $\frac{z' - z}{2 - z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) En déduis que le triangle MΩM' est rectangle en M.

c) Donne un programme de construction de l'image M' par S d'un point M donné.

3) a) Place les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$ dans le plan muni du repère (O, I, J).

Construis les images respectives A' et B' de A et B par S.

b) On note z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'. Démontre que $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.

c) En déduis la nature du quadrilatère AA'BB'.

Exercice 72

On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1) Donne une écriture trigonométrique de z_0.

2) Montre que : $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

3) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 1$.

4) En déduis les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\frac{z}{1 - i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$.

5) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm, place les points A, B, C

et D d'affixes respectives : $z_A = 1 - i\sqrt{3}$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$; $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.
6) Donne une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
7) Vérifie que : $r(A) = C$; $r(C) = B$ et $r(B) = D$.
8) En déduis que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 73

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i, -i$, z et z' avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$

1) Exprime les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles $(x\,;\,y)$ de M.
2) Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :
   a) z' soit réel.
   b) z' soit imaginaire pur.
3) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifie que $ZZ' = -3 + 4i$. Puis calcule $|ZZ'|$.
4) a) Détermine l'ensemble des ponts M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.
   b) Détermine $\boldsymbol{r}$ pour que M et M' soient sur le même cercle.

Exercice 74

A//Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :
$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$
1) Montre que $-i$ est solution de (E).
2) Détermine les nombres réels a, b, c tels que : $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$
3) Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

B// On appelle A, B et C les points d'affixes respectives : $4 + i$; $4 - i$; $-i$.
1) Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2) Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r. Calcule l'affixe **s** de S.
3) Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Trace ce cercle.
4) A tout point d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' : $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$
   a) Détermine les affixes des points A′, B′, C′ associés respectivement aux points A, B, C.
   b) Vérifie que A′, B′, C′ appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. Détermine son rayon et tracer $\mathcal{C}'$.
   c) Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, Exprimer $|z' - i|$ en fonction de z.
   d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontre que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$
   e) En déduis à quel ensemble appartiennent les points M′ associés aux points M.

Exercice 75

On désigne par f l'application qui à tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z et distinct du point A associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $-2i$; $4 - 2i$ et $4 + 2i$.
1) Détermine par f les affixes $z_{B'}$ et $z_{C'}$ des points B' et C', image respectives des points B et C.
2) Détermine l'ensemble des points invariants de f.
3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' des réels.
   Démontre que : $x' = \frac{x^2+y^2-4x-4}{x^2+(y+2)^2}$ et $y' = \frac{-4x+4y+8}{x^2+(y+2)^2}$.
4) Détermine puis construis :
   a) L'ensemble $(\mathcal{T})$ des points M tels que z' soit un réel.
   b) L'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M tels que z' soit un imaginaire pur.
   c) L'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M tels que $|z'| = 1$.
5) a) Démontre que pour tout nombre complexe $z \neq -2i$ on a : $(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i$.
   b) En déduis que lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$ alors M' décrit un cercle $(\mathcal{C}')$ dont-on précisera le centre et le rayon.

LIMITES ET CONTINUITÉ

Domaine de définition

Exercice 1

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = x.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

5) $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$; 6) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$; 7) $f(x) = |x|.\sqrt{\frac{x}{x-1}}$; 8) $f(x) = x^3 - 3x - 4$

9) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$; 10) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$; 11) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$; 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

13) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$; 14) $f(x) = \frac{x^2+2x}{|x|-2}$; 15) $f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}$; 16) $f(x) = \frac{|x^2-3x|}{x+1}$

17) $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$; 18) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x}$; 19) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$; 20) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x-3|-5}$

21) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$; 22) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{9x^2}}$; 23) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$; 24) $f(x) = |x^3 - 3x - 4|$

25) $f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}$; 26) $f(x) = \left|1 + \frac{1}{x}\right|$; 27) $f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x}$; 28) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

29) $f(x) = |x - 1| + \frac{2}{x+1}$; 30) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; 31) $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 32) $f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$

33) $f(x) = \frac{-3x^2-4x+3}{-x^2+1}$; 34) $f(x) = \frac{4x+3}{x^3-x^2}$; 35) $f(x) = \frac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}}$; 36) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$

37) $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$; 18) $f(x) = \sqrt{-6x^3 + 3x}$; 39) $f(x) = \frac{x}{\left|1+\frac{1}{x}\right|}$; 40) $f(x) = \frac{x^2+2}{|x|-1}$

41) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$; 42) $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}+2}$; 43) $f(x) = \frac{x-\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}$; 44) $f(x) = \frac{|x+1|}{1-|x-1|}$

Calcul de limites

Exercice 2

1) Limites de fonctions polynômes et rationnelles quand $x \to \infty$

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -2x^3 - 3x^2 + 1$	2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(1-x)^2}{1-2x^2}$	3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 4x}$	4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{2x^3}$
5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 + 3x^2 + 1$	6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (1-x)^3$	7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (-2x^3 - 3x)(x+1)$	8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x + 1 - \frac{2}{x-3}$

2) Limites de fonctions rationnelles quand $x \to$ réel annulant le dénominateur et le numérateur

1) $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2-25}{x+5}$	2) $\lim\limits_{x\to2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$	3) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{x^2+3x+2}$	4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{1-x^3}{x-1}$
5) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^3+27}{x+3}$	6) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$	7) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$	8) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1+x^3}{x^3+x^2+4x+4}$

3) Limites de fonctions rationnelles quand x → réel annulant le dénominateur

1) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{-2x+1}{x+1}$	2) $\lim\limits_{x\to3} \frac{2-x}{x-3}$	3) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{(x+1)^3}$	4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x+7}{x^2-1}$
5) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{4}{(x+1)^2}$	6) $\lim\limits_{x\to2} \frac{-x+5}{(x-2)(1-x)}$	7) $\lim\limits_{x\to1} \frac{1-3x}{x^2-1}$	8) $\lim\limits_{x\to1} \frac{-5x}{x^2-2x+1}$

4) Limites de fonctions racines carrées quand $x \to \infty$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x+2}-\sqrt{4x+1}$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x^2+1}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+1}-x$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{9x^2}}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+1}-3x$	6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}+x$	7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}}$
10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x}-3x$	11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x}+3x+5$	12) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1}$	13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5-x}-\sqrt{1-x}$

5) Limites de fonctions trigonométriques

1) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos^2 x-1}{1+\cos x}$	2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$	3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$	4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x}$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}$	6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3x-\pi}$	7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$	8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{4+\cos x}$	10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$	11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x}{2\sin x-1}$	12) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$
13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$	14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{x}$	15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 3x-\sin^2 4x}{1-\cos 2x}$	16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x-\tan 2x}{\sin 4x-\tan x}$

6) Limites de fonctions trigonométriques avec taux de variation

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$	2) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$	3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$	4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin x-\sqrt{2}}{2x-\frac{\pi}{2}}$

7) Limites de fonctions trigonométriques avec théorème des gendarmes

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin x}{x+1}$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\cos x}{x^2+1}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sin x+1}$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2+1}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos x}{x^3+1}$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\cos x}{5x}$	7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x+\cos x}{x^2+1}$	8) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

8) Limites des fonctions rationnelles avec taux de variation ou expression conjuguée

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$	2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$	3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{3x+1}-1}$	4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$
5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$	6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$	7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{3x+1}-1}$	8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$
9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{3x-\sqrt{4x^2+5x}}$	10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{4x}$	11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{1-x}$	12) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x^2+5x-1}-7}{\sqrt{x^3+6}-9}$
13) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{2x^2-2}$	14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2-\sqrt{4+x}}$	15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+16}-4}$	16) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

Continuité en point x_0

Exercice 3

Etudie la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \text{ et } x_0 = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \text{ si } x \neq 9 \\ f(9) = \frac{1}{6} \text{ et } x_0 = 9 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{\sin x+1}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \text{ et } x_0 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{2x-2} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{5}{2} \text{ et } x_0 = 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}\ -2}{\sqrt{x+3}\ -1} \text{ si } x \neq -2 \\ f(-2) = -\dfrac{1}{2} \text{ et } x_0 = -2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x-1} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 1 \text{ et } x_0 = 2 \end{cases}$

Continuité sur un intervalle

Exercice 4

1) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \ si\ x \in [0;1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \quad si\ x \in]1;3] \end{cases}$ et 2) $\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5\ si\ x \in]-\infty\,;1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \ \ x \in [1\,;3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \ \ x \in [3\,;+\infty[\end{cases}$

Etudie la continuité de f en 1. Etudie la continuité de f en 1 et en 3.

Détermination de a et b pour que f soit Continuité en x_0

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$

Détermine la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$.

Exercice 6

Détermine le nombre réel a pour que la fonction f donnée soit continue.

$a)$ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+2a}{1-x} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$; $b)$ $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} \text{ si } x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + ax + 1 \text{ si } x < 2 \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2x + a \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{4x+1}{4x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 7

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x+a}{x^2+1} \text{ si } x \leq 1 \\ f(1) = b \\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Détermine a et b pour que f soit continue en 1.

Exercice 8

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = ax + 5b - a \text{ si } x \geq 0 \\ f(0) = 4 \\ f(x) = \frac{\sin ax}{bx} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Détermine a et b pour que f soit continue en 0.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \text{ si } x \in]-\infty\ ;\ -1[\\ f(x) = 2x - 1 \ \ si\ x \in]-1\ ;\ 1[\\ f(x) = b(x^2-1) \text{ si } x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$

1) Détermine a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$

2) Pouvez – vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Prolongement par continuité en x_0

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de définition de la fonction f et détermine (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

$a)$ $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \\ x_0 = 2 \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} \\ x_0 = 3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} f(x) = \frac{2x+\sqrt{x+5}}{x^2-1} \\ x_0 = -1 \end{cases}$

Exercice 11

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

1) Détermine les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g.

2) Vérifie que la fonction g est le prolongement par conitinuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) f admet-elle un prolongement par continuité au point 4 ? Si oui, donne alors ce prolongement.

Asymptotes, positions relatives et branches infinis

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x-3}{1-x^2}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f.

b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

2) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).

Exercice 15

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-5x+7}{3-x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) a) Détermine l'ensemble de définition de f, puis calcule les limites aux bornes de D_f.

b) Interprète graphiquement si possible les résultats obtenus.

2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{3-x}$.

b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).

c) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 17

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^3+2x^2}{x-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) Calcule les limites aux bornes de D_f. Interprète graphiquement le résultat de la limite en 1.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

DÉRIVATION

Calcul de dérivées

Exercice 1

Dérive les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

5) $f(x) = (x^4 - 7)^3$; 6) $f(x) = (3x^2 + 2x - 4)^{-4}$; 7) $f(x) = \left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^3$; 8) $f(x) = x^3 - 3x - 4$

9) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$; 10) $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^3-3}\right)^3$; 11) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$; 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

13) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$; 14) $f(x) = \sqrt{3 + \cos 2x}$; 15) $f(x) = x - \frac{2}{x-1}$; 16) $f(x) = sin^2 4x$

17) $f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1}$; 18) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x}$; 19) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$; 20) $f(x) = cos^4 \pi x$

21) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$; 22) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{9x^2}}$; 23) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$; 24) $f(x) = \frac{x}{2+\cos 4x}$

25) $f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6}$; 26) $f(x) = (x^3-1)^2\sqrt{x^2+1}$; 27) $f(x) = \sin 3x \cos 2x$; 28) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

29) $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3}$; 30) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; 31) $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 32) $f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$

33) $f(x) = \frac{-3x^2-4x+3}{-x^2+1}$; 34) $f(x) = \frac{4x+3}{x^3-x^2}$; 35) $f(x) = \frac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}}$; 36) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$

37) $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(3x+1)^3}$; 18) $f(x) = \sqrt{-6x^3 + 3x}$; 39) $f(x) = \frac{1-3\cos x}{\sin x - 2}$; 40) $f(x) = (1 + \cos^2 x)^4 \sin x$

Dérivabilité en point x_0

Exercice 2

Etudie la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

1) $f(x) = x\sqrt{x}$ et $x_0 = 1$; 2) $f(x) = |x^2 - 4|$ et $x_0 = 2$; 3) $f(x) = x\sqrt{\sin^2 x}$ et $x_0 = 0$

4) $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$ et $x_0 = 2$; 5) $f(x) = x^2 - 3x$ et $x_0 = 4$; 6) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ et $x_0 = 1$

Exercice 3

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; 1[, f(x) = -x^2 + x \\ \forall\, x \in]1; +\infty[, f(x) = x^2 - x \end{cases}$.

Etudie la dérivabilité de f en 1.

Continuité et dérivabilité en x_0

Exercice 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & si\ x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & si\ x < -1 \end{cases}$

1) Pour quelle valeur de a la fonction f est – elle continue au point -1 ?

2) Pour cette valeur, étudie la dérivabilité de la fonction f au point – 1.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) Etudie la continuité de f sur $[-1; +\infty[$.

3) Montre de f est dérivable en 0 et détermine l'équation de la tangente à sa courbe représentative en $A\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6

Détermine les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points x_0 donnés :

a) $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$ b) $\begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} \text{ si } x > -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$ c) $\begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} \text{ si } x > -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$

Tangentes

Exercice 7

Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 5}$ et $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ et $x_0 = 0$; 3) $f(x) = \cos x$ et $x_0 = \frac{\pi}{3}$

4) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$ et $x_0 = -1$; 5) $f(x) = x^2 - 3x$ et $x_0 = 4$; 6) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $x_0 = 3$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 2$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Montre que (C) admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -2x + 4$.

2) Donne une équation de chacune de ces tangentes.

Détermination de paramètre

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que (C) passe par $A(2\ ;\ 6)$ et admet comme tangente au point d'abscisse 6 la droite d'équation $y = -3x + 20$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que f admet 2 comme extremum relatif en 1 et que la tangente à sa représentation graphique au point d'abscisse 2 admet 3 comme coefficient directeur.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que (C) passe par $A(0;\ 4)$ et que la tangente au point $B(2\ ; 1)$ est parallèle la droite (OI).

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

Détermine les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

ETUDE DE FONCTIONS

Problème 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b} + \frac{c}{x-1}$.
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).
c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
3) Montre que le point $\mathrm{I}(1; -1)$ est un centre de symétrie de (C).
4) Détermine une équation de la tangente (T) aux d'abscisses 2.
5) Détermine les coordonnées du point d'intersection entre (C) et l'axe des ordonnées.
6) Trace (D), (T) et (C).

Problème 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite obtenu en 1.
3) a) Vérifie que $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$.
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C).
c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
4) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
5) Démontre que le point $\mathrm{A}(1; 3)$ est un centre de symétrie de (C).
6) Trace (D) et (C).

Problème 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b} + \frac{c}{x-3}$.
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).
c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
3) A est le point d'intersection des asymptotes à (C).
a) Détermine les coordonnées du point A.
b) Montre que le point A est un centre de symétrie de (C).
4) Détermine une équation de la tangente (T) aux d'abscisses 1.
5) Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des repères.
6) Trace (D), (T) et (C).

Problème 4

Soit f une fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :
■ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
■ $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
■ $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$; $\forall x \in]0; 2[, f'(x) < 0$.
■ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$.
1) Dresse le tableau de variation de f.
2) (C_f) représentant les variations de f, précise les équations des asymptotes à (C_f).
3) Précise le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4) Trace dans le même repère (C_f) et ses asymptotes.

Problème 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_f puis les limites de f aux bornes de D_f.
2) Montre que la courbe $(\mathcal{C})$de f admet une droite (Δ) asymptote oblique aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
3) Etudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).
4) Etudie le sens de variation de f et construire $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé.
5) Démontre que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie que l'on déterminera.
6) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point E d'abscisse 1.
   Existe-t-il un autre point de $(\mathcal{C})$ en lequel la tangente à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (T) ?
   Si oui, détermine les coordonnées de ce point et une équation de cette tangente (T').
7) Résous et discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2 - (m+1)x + 3m - 5 = 0$.

Problème 6

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. On désigne par (C$f$) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montre que (Cf) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
2) Précisez la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique.
3) Etudie les variations de f.
4) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$?
   Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
5) Trace la courbe (Cf) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
6) Montre que la restriction g de f à l'intervalle I $=]1\ ;\ 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
7) a) Calcule $(h^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$.
   b) Dresse le tableau de variation de h^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f.

Problème 7

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitide 0,01.
3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par $(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$. Soit C$f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine le domaine de définition de f. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.
2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$. En déduis les variations de f.
3) a) Détermine les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.
   b) En déduis que Cf admet une asymptote oblique (Δ) et étudie la position de Cf par rapport à (Δ).
   Vérifie en particulier que Cf rencontre (Δ) en un point unique A.
5) Détermine les abscisses des points B et B' de Cf admettant une tangente parallèle à (Δ).
6) Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$. En déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.
7) Trace Cf et (Δ).

Problème 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1 - x^3}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 1$

1) Etudie la fonction g (limites et sens de variation).
2) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$, puis en déduis l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :
1) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenues.
2) a) Prouve que le signe de la fonction dérivée f' de f dépend en signe et en racine de la fonction g étudier dans la partie A.
b) Détermine $g(x_0)$ où x_0 est l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses obtenu dans la partie A-2).
c) Dresse le tableau de variation de f.
3) trace la courbe (Cf) dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
4) Détermine graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation paramétrique :
(E_m) : $mx^3 + x = m$ où m est un paramètre réel.

Problème 9

Partie A :
On donne la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = x^2 - 6x + 5$.
1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) Calcule $g(1)$ et $g(5)$.
4) En déduis le signe de $g(x)$ sur ℝ.

Partie B :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-5x+10}{x-3}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 3 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en 3.
2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-3)^2}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).
4) Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha+5}{\alpha-3}$.
5) Trace (C) et (D).

Problème 10

I/ Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$.
1) Etudie les variations de g.
2) a) Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) Vérifie que $\alpha \in]-1; 0[$.
3) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(\alpha) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(\alpha) > 0 \end{cases}$.

II/ On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x - \frac{2}{x-1} \end{cases}$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (0; I; J), $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont respectivement les courbes de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) a) Démontre que pour tout réel x de $]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.
En déduis le sens de variations de f sur $]-\infty; 1[$.
b) Etudie le sens variation de f sur $]1; +\infty[$.
c) Dresse le tableau de variations de f.
3) a) Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_2)$ en $+\infty$.
b) Etudie la position de $(\mathcal{C}_2)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

4) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement le résultat.
5) Détermine les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_1)$ avec l'axe des ordonnées et de $(\mathcal{C}_2)$ avec l'axe des abscisses.
6) Représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère (0; I; J). ($\alpha = -0{,}1$).
7) Soit h la restriction de f sur $]1; +\infty[$.

a) Justifie que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle K à déterminer.
b) Dresse le tableau de variation de h et celui de sa bijection réciproque h^{-1}.
c) Calcule $(h^{-1})'(0)$.
d) Représente la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ dans le même repère $(0;\mathrm{I};\mathrm{J})$.

Problème 11

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3,1 < \alpha < 3,2$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 1 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en 1.
2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).
4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)^2}$
5) Trace (C) et (D). (On prendra $f(\alpha) \simeq 7$)

PARTIE C : Etude d'une bijection

Soit φ la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\ ; 1[$

1) Montre que φ réalise une bijection de $]-\infty\ ; 1[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
2) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ et (C^{-1}) sa représentation graphique.
a) Dresse le tableau de variation de φ^{-1}.
b) Justifie que φ^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(\varphi^{-1})'(0)$.
3) Trace (C^{-1}) dans le même repère que (C).

Problème 12

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x + 4$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ telle que $-2,2 < \alpha < -2,1$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2-1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$
b) Ecris D_f sous forme de réunion d'intervalles.
2) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, -1 , 1 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat des limites de f en -1 et 1.
3) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
b) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f.
4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}$
5) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (Δ) et (C).
6) Trace (C) et (Δ).

PARTIE C : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1\ ;+\infty[$.

1) Montre que h réalise une bijection de $]1\ ;+\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera.

2) a) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et $(C_{h^{-1}})$ sa représentation graphique.

Dresse le tableau de variation de h^{-1}.

b) Calcule $h(2)$ et $(h^{-1})'(2)$.

3) Trace $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C).

Problème 13

On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où $x \in [0;+\infty[$.

1) Détermine les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$ pour $x \in [0;+\infty[$.

2) a) Calcule la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

b) Justifie que la population est croissante.

3) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.

b) En déduis à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.

4) a) Quelle set la limite de f en $+\infty$?

b) En déduis une interprétation quant à la population de cette ville.

5) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Echelle : 1 cm → 10 ans sur l'axe des abscisses

1 cm → 10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

Problème 14

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

La fonction f a pour forme explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) Calcule $f'(x)$.

3) Détermine les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f.

4) Montre que la restriction g de f à $[0;+\infty[$ est une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. Montre que α est compris entre 1 et 2.

Donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

6) Donne une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$, puis trace (T_0) et (C_f).

7) Discute graphiquement suivants les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation

$(E) : \frac{-x^3+5+m}{3} - x^2 = 0.$

Problème 15

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprété graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3) Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$.
4) Trace (C).

Problème 16

A// Soit g la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x+1}$
1) Calcule les limites de g en -1 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
B// Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ **:** $f(x) = \quad (x+1)\sqrt{x+1} - 1$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Calcule les limites de f en -1 et $+\infty$**.**

2) Calcule $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$. f est-elle dérivable en -1 ? Interprète graphiquement le résultat de cette limite.

3) a) Montre que $\forall$ $x \in [-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{3}{2}\ g(x)$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

5) Trace (C).
C//
1) a) Montre que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Justifie que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} et dresse le tableau de variation de f^{-1}.
2) f^{-1} est-elle dérivable en -1 ?
3) Trace la courbe représentative (C^{-1}) de f^{-1} dans le même repère.

Problème 17

A// Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ 2x - \sqrt{x^2\ +\ 1}$
1) Etudie les variations de la fonction g.
2) Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.
3) En déduis le signe de g sur $\mathbb{R}$.
B// Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ 2\sqrt{x^2\ +\ 1} - x$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x \quad et \quad y\ =\ x$.
1) Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) a) Montre que $\forall$ $x \in \mathbb{R}$, $f\ '(x)\ = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2\ +\ 1}}$.
b) En déduis le tableau de variation de f.
3) Détermine la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$. Quelle conséquence graphique peut – on déduire de ce résultat ?
4) Montre la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
5) Etudie la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').
6) Trace la courbe (C), les droites (D) et (D').

Problème 18

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$.
1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) a) Montre que $\forall$ $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{4}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}$.
b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3) Déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
PARTIE B : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm)
1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en $-\infty$.
2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
   b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que (C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = 4x$ au voisinage de $+\infty$.
   b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).
4) Trace (C) et (D).
PARTIE C : Etude d'une bijection
1) Justifie que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble K que l'on précisera.
2) a) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   b) Calcule $f(0)$ et en déduis la valeur de α.
3) Donne les caractéristiques (ensemble de définition et sens de variation) de la bijection réciproque f^{-1} de f.
5) a) Justifie que f^{-1} est dérivable en 1.
   b) Détermine le nombre dérivé de f^{-1} en 1.
6) Montre que $\forall\ x \in]0\ ;\ +\infty[\ ,\ f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{4x}$
7) Représente dans le même repère (C^{-1}), courbe représentative de f^{-1}.

Problème 19

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}, \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x}, \text{si } x > 1 \end{cases}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
1) a) Etudie les variations de la fonction numérique g définie sur $]1\ ;+\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$.
   b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1\ ;+\infty[$ et vérifie que $1{,}28 < \alpha < 1{,}3$.
   c) Détermine le signe de g sur $]1\ ;+\infty[$.
2) a) Justifie que l'ensemble de définition D de f est $[-1;+\infty[$.
   b) Etudie la continuité de f en 1.
3) a) Etudie la dérivabilité de f en 1 et en -1, puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.
   b) Détermine l'ensemble de dérivabilité de f.
4) a) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \\ \forall x \in]-1;1[, f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$.
   b) Etudie le signe de f'sur $]-1;1[$.
5) Justifie que : $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$ et $-0{,}15 < f(\alpha) < -0{,}10$.
6) Dresse le tableau de variation de f sur $[-1;+\infty[$.
7) Etudie les branches infinies puis donne l'allure de $(\mathcal{C})$.

Problème 20

Soit la fonction f défini par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 9|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.
1) a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   b) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2) a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -3 et en 3.
   b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
3) a) Précise l'ensemble de dérivabilité de f.
   b) Calcule $f'(x)$ et étudie son signe.
4) Etudie les variations de f.
5) Démontre que (C_f) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.
6) Construis (C_f).
7) soit h la restriction de f à $]-\infty;-3]$.
   Montre que h définie une bijection de $]-\infty;-3]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

PRIMITIVES-INTÉGRALES

Primitives

<u>Exercice 1</u> : Formes simples

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 5$; 2) $f(x) = \cos\left(\frac{x+\pi}{5}\right)$; 3) $f(x) = \sin(-2x+\pi)$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 8x^2$; 6) $f(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{5}{x^2}$; 7) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$; 8) $f(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; 9) $f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2}$

<u>Exercice 2</u> : Formes $\boldsymbol{u'u^n}$ ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$)

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x+3)^5$; 2) $f(x) = \sin x.\cos^3 x$; 3) $f(x) = x^2(x^3-9)^5$; 4) $f(x) = (2x+1)^4$

5) $f(x) = (5-2x)^6$; 6) $f(x) = x(x^2+1)^5$; 7) $f(x) = (6x+3)(x^2+x+1)^4$; 8) $f(x) = \cos x.\sin^4 x$

9) $f(x) = \frac{6}{x^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$; 10) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2-x)^4$; 11) $f(x) = \tan^3 x + \tan^5 x$; 12) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

<u>Exercice 3</u> : Formes $\boldsymbol{\frac{u'}{u^n}}$ ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ *et* $\boldsymbol{n \geq 2}$)

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{3x}{(1-x^2)^4}$; 2) $f(x) = \frac{3x+6}{(x^2+4x+3)^4}$; 3) $f(x) = \frac{3}{(3-2x)^4}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^3+3x^2+3x+1}$; 5) $f(x) = \frac{-1}{(3-4x)^2}$

6) $f(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2$; 7) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x}$; 8) $f(x) = \frac{-x+1}{(x^2-2x)^2}$; 9) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 10) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^5}$

11) $f(x) = \frac{-x}{(x^2-9)^5}$; 12) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$; 13) $f(x) = \frac{1}{tan^3 x} + \frac{1}{tan\, x}$; 14) $f(x) = -x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{(x+3)^2}$

<u>Exercice 4</u> : Formes $\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{u}}}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; 2) $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x}}$; 3) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$; 4) $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$; 5) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$

6) $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x+1}}$; 7) $f(x) = \frac{cos\, x}{\sqrt{1+sin\, x}}$; 8) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}$; 9) $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}$; 10) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

<u>Exercice 5</u> : Formes $\boldsymbol{u'\sqrt{u}}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+5}$; 3) $f(x) = x\sqrt{9+x^2}$; 4) $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$

5) $f(x) = \sqrt{4x+9}$; 6) $f(x) = (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4}$; 7) $f(x) = \sqrt{x+2}$; 8) $f(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$

<u>Exercice 6</u> : Formes $\boldsymbol{f \times g'(f)}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$; 3) $f(x) = \frac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$; 4) $f(x) = 2x\sin(x^2)$

5) $f(x) = (x+1)^3\sin(x+1)^4$; 6) $f(x) = (x+1)\cos(x^2+2x)$; 7) $f(x) = (2x+1)\sin(x^2+x+1)$

<u>Exercice 7</u> : Formes $\boldsymbol{u'v + v'u}$ et $\boldsymbol{\frac{u'v - v'u}{v^2}}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x\cos x + \sin x$; 2) $f(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$; 3) $f(x) = x(2\cos x - x\sin x)$; 4) $f(x) = \sqrt{x}\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$

5) $f(x) = x^2 + 2x\tan x + x^2\tan^2 x$; 6) $f(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$; 7) $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$

8) $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x + \cos x}{(x+1)^2}$; 9) $f(x) = \frac{2x\cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}$; 10) $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

<u>Exercice 8</u> : Formes trigonométriques

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \cos 2x.\cos 3x$; 2) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin 2x}$; 3) $f(x) = \cos^5 x$; 4) $f(x) = \sin^4 x$; 5) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

6) $f(x) = \cos^3 x.\sin^3 x$; 7) $f(x) = \cos^2 x.\sin^3 x$; 8) $f(x) = \sin x.\cos 2x$; 9) $f(x) = \cos^5\left(\frac{3}{2}x\right)$

10) $f(x) = \sin 3x.\cos 4x$; 11) $f(x) = \sin x.\cos 3x$; 12) $f(x) = \cos^6 x$; 13) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

Exercice 9 : Formes pièges

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \tan^2 x$; 2) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}$; 3) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$; 4) $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$; 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$

Exercice 10 : Primitives vérifiant une condition

Détermine la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée :

1) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et F(0) = 7 ; 2) $f(x) = (x - 3)^6$ et F(3) = 0

3) $f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3}$ et F(0) = 0 ; 4) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}$

5) $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$ et $F(0) = \sqrt{5}$; 6) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

7) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x}$ et F(π) = 1 ; 8) $f(x) = \sin x \cos^4 x$ et $F(\pi) = 0$

Exercice 11 : Détermination des réels a, b et c ...

1) $f(x) = \frac{-1}{x^2(1+x)}$ et $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$

Détermine les réels a, b et c, puis en déduire les primitives de f.

2) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-3)^2}$ et $f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$

Détermine les réels a, b et c, puis en déduire les primitives de f.

3) $f(x) = \frac{2x - 5}{-x^2 + 3x - 2}$ et $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}$

Détermine les réels a et b puis en déduire les primitives de f.

4) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x-2)^2}$ et $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$

Détermine les réels a, b et c, puis en déduire les primitives de f.

5) $f(x) = \frac{x^3 \mp x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}$ et $f(x) = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$

Détermine les réels a, b et c, puis en déduire les primitives de f.

Primitive et dérivé

Exercices 12

Soit la fonction g définie sur [3 ; +∞[par : $g(x) = (x - 3)\sqrt{x - 3}$.

1) Détermine $g'(x)$.

2) En déduis la primitive sur [3 ; +∞[de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x - 3}$ prenant la 0 en 5.

Exercices 13

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ par : $f(x) = x\sqrt{1 - 2x}$.

Détermine les nombres réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1 - 2x}$ soit une primitive de f.

Intégration par primitivation

Exercice 14

Calcule chacune des intégrales suivantes

1) $I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)\, dx$; 2) $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; 3) $I = \int_0^1 \frac{3}{(3-2x)^4}\, dx$; 4) $I = \int_0^2 x\sqrt{9 + x^2}\, dx$

5) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-2x + \pi)\, dx$; 6) $I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}\, dx$; 7) $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^3}\, dx$; 8) $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

9) $I = \int_0^4 \sqrt{4x + 9}\, dx$; 10) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2}\, dx$; 11) $I = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx$; 12) $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2x\, dx$

13) $I = \int_0^1 (x - 1)(x^2 + 6x + 4)^2 dx$; 14) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$; 15) $I = \int_1^0 x(x^2 + 1)^5\, dx$

16) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx$; 17) $I = \int_1^0 (x+2)^3 \, dx$; 18) $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx$; 19) $I = \int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x - 3) \, dx$

20) $I = \int_{-1}^{2} \sqrt{x+2} \, dx$; 21) $I = \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2 - 5x + 4} \, dx$; 22) $I = \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$

23) $I = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$; 24) $I = \int_0^{\ln 2} \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+4} dx$; 25) $I = \int_0^{e} \frac{\ln x}{x} \, dx$; 26) $I = \int_{-3}^{0} x e^{-x^2} dx$

Une intégration par parties

Exercice 15

Calcule chacune des intégrales suivantes à l'aide d'intégration par parties

1) $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$; 2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; 3) $I = \int_1^2 x\sqrt{3-x} dx$; 4) $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$; 5) $I = \int_0^{\pi} (x-1)\sin 3x dx$

6) $I = \int_0^1 x e^x \, dx$; 7) $I = \int_{-1}^{1} (x+1)e^x \, dx$; 8) $I = \int_1^3 \ln x \, dx$; 9) $I = \int_1^e x \ln x \, dx$; 10) $I = \int_0^1 x e^{2x} \, dx$

11) $I = \int_1^3 (x+2)\ln x \, dx$; 12) $I = \int_0^1 (2x+1)e^x \, dx$; 13) $I = \int_1^2 x^2 \ln x dx$; 14) $I = \int_0^1 (x^3+1)\ln x \, dx$

15) $I = \int_0^1 (x-1)e^{2x} \, dx$; 16) $I = \int_0^1 x e^x \, dx$; 17) $I = \int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$; 18) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x dx$.

Deux intégrations par parties

Exercice 16

Calcule chacune des intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties

1) $I = \int_0^1 (x+1)^2 e^x \, dx$; 2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$; 3) $I = \int_{-\pi}^{0} x^2 \sin 2x \, dx$; 4) $I = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

5) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx$; 6) $I = \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} \, dx$; 7) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$; 8) $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x} \, dx$

9) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$; 10) $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx$; 11) $I = \int_1^{e^3} x(\ln x)^2 dx$; 12) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$

13) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$; 14) $I = \int_1^{e^3} x(\ln x)^2 dx$; 15) $I = \int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x \, dx$; 16) $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx$

17) $I = \int_1^{e^3} x(\ln x)^2 dx$; 18) $I = \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx$; 19) $I = \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx$; 20) $I = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$

Changement de variable

Exercice 17

En utilisant un changement de variable, calcule les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$; 2) $I = \int_0^1 x\sqrt{1+x} dx$; 3) $I = \int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Calcul d'aire

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$ et la droite (D) d'équation $y = x$.
Soit λ un nombre réel strictement positif et A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$. (unité graphique 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ)).
Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$
Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$. (unité graphique 2 cm).
Calcule $A(\lambda)$ à l'aide de deux intégrations par parties.

Exercices de perfectionnement

Exercice 20

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1) trouve les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$.

2) En déduis $\mathrm{I} = \int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 21

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.

1) trouve les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

2) En déduis $\mathrm{I} = \int_0^3 f(x)dx$.

Exercice 22

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$.

1) trouve les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$.

2) En déduis $\mathrm{I} = \int_0^2 f(x)dx$.

Exercice 23

1) Soient f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

a) Calcule $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

b) Soit $\mathrm{I}_2 = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. Calcule $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$. En déduis la valeur de I_2.

2) a) Détermine trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $\frac{x^2-1}{2x-1} = ax + b + \frac{c}{2x-1}$.

b) Calcule $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}\mathrm{d}x$.

Exercice 24

1) On pose pour tout $t \notin \{-1; 1\}, f(t) = \frac{t}{(t^2-1)^2}$. Détermine une primitive F de f sur $]0; +\infty[$.

2) On pose pour tout $t \notin \{-1; 0; 1\}, f(t) = \frac{1}{t(t^2-1)}$.

Détermine les trois réels a, b et c tels que pour tout $t \notin \{-1; 0; 1\}$, on ait : $g(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$.

En déduis une primitive G de g sur $]0; +\infty[$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, calcule, pour $x > 0, J(x) = \int_2^x \frac{t \ln t}{t^2-1} dt$.

Exercice 25

On pose : $\mathrm{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

1) Calcule A + B.

2) Calcule A – B en utilisant une intégration par parties.

3) Déduis des questions précédentes les valeurs de A et B.

Exercice 26

On considère les intégrales $\mathrm{I} = \int_0^\pi \cos^4 x \,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^\pi \sin^4 x \,\mathrm{d}x$.

1) a) Montre que l'intégrale I peut s'écrire $\mathrm{I} = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \,\mathrm{d}x$. $\mathrm{J} = \int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\mathrm{I}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montre que $\mathrm{I} = \int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\mathrm{J}$.

c) Montre de même que $\mathrm{J} = \int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\mathrm{I}$.

2) a) Montre que $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \frac{3\pi}{4}$.

b) Montre que $\mathrm{J} - \mathrm{I} = 0$.

c) En déduis les intégrales I et J.

Exercice 27

Soient les intégrales I et J définies par : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$.

1) Calcule $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} - \mathrm{J}$.
2) En déduis les valeurs de I et J.

Exercice 28

On pose $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} \mathrm{d}x$; $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} \mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}$.

1) Calcule I_2.
2) Calcule I_1.
3) En déduis I.

Exercice 29

Soient les intégrales suivantes : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, \mathrm{d}x$; $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, \mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

1) Calcule $\mathrm{I} - \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} + \mathrm{J} + \mathrm{K}$.
2) Calcule la primitive de $\cos 4x$.
3) En déduis la valeur de : $\mathrm{I} - \mathrm{J} - 3\mathrm{K}$ puis celles de I, J et K.

Exercice 30

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x \mathrm{d}x$.

1) Calcule $\mathrm{I} + \mathrm{J}$.
2) Soit $f(x) = \frac{1}{4} e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$.
   a) Détermine $f'(x)$.
   b) En déduis $\mathrm{I} - \mathrm{J}$.
3) Calcule I et J.

Exercice 31

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2 x \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin^2 x \mathrm{d}x$.

1) Calcule $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ puis $\mathrm{I} - \mathrm{J}$.
2) En déduis les valeurs de I et de J.

Exercice 32

On considère les intégrales suivantes : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1) Calcule I.
2) Soit la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.
   a) Montre que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.
   b) En déduis une relation entre I et J, puis calcule J.

Exercice 33

1) a) Démontre que pour tout réel x on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.
   b) En déduis la valeur de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} \mathrm{d}x$.
2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
   a) Calcule la dérivée de f.
   b) Calcule à l'aide d'une intégration par parties, la valeur de l'intégrale $\mathrm{J} = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x).\mathrm{d}x$.

Exercice 34

1) Soit la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = \ln(e^x - 1)$.
   Détermine la dérivée $f'(x)$, puis calcule l'intégrale $\mathrm{I} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} \mathrm{d}x$.
2) On pose $\mathrm{K} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} \mathrm{d}x$. Calcule $\mathrm{I} - \mathrm{K}$. En déduis la valeur de K.

Exercice 35

On pose $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.

1) A l'aide d'une intégration par partie exprime I en fonction de J.

2) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) En déduis J.

3) Calcule la valeur exacte de I.

Exercice 36

Soit $\mathrm{I} = \int_0^\pi e^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{J} = \int_0^\pi e^x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \int_0^\pi e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

1) A l'aide de 2 intégrations par parties, prouve que $\mathrm{K} = \frac{e^\pi - 1}{5}$.

2) a) Calcule $\mathrm{I} + \mathrm{J}$.

b) Montre que $\mathrm{K} = \mathrm{I} - \mathrm{J}$.

c) En déduis les valeurs de I et J.

Exercice 37

Soit $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.

Calcule la dérivée de f. En déduis la valeur de I.

2) a) Sans calculer explicitement J et K, vérifie que : $\mathrm{J} + 2\mathrm{I} = \mathrm{K}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontre que : $\mathrm{K} = \sqrt{3} - \mathrm{J}$.

c) En déduis les valeurs de J et de K.

Exercice 38

On se propose de calculer l'intégrale J définie par : $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}\,\mathrm{d}x$.

1) Calcule les deux intégrales A et B tel que : $\mathrm{A} = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{B} = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$.

2) Détermine les réels a, b et c tels que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$.

3) En posant $t = e^x$, calcule $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$.

4) A l'aide d'une intégration par partie, exprime J en fonction de I. En déduis la valeur de J.

Exercice 39

Soit n un entier naturel non nul, on pose : $\mathrm{I}_n = \int_1^2 (\ln x)^n \mathrm{d}x$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1 et I_2.

2) a) Trouve une relation indépendante entre I_n et I_{n-1}.

b) En déduis I_3 et I_4.

Exercice 40

Soit l'intégrale I_n définie par : $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

1) Calcule I_0 et I_1.

2) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-2}.

(On posera : $\sin^n x = \sin^{n-1}x.\sin x$)

3) En déduis I_2 et I_4.

Exercice 41

Soit l'intégrale I_n définie par : $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\, dx$

1) Calcule I_0.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1 et I_2.

3) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-2}.

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Les propriétés

Exercice 1

Exprime en fonction de ln 2 et ln 3 les réels suivants :

$A = \ln 18 + \ln 12$; $B = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{9}{8}\right)$; $C = \ln\left(\frac{1}{12}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; $D = \ln(3^{-2}) + \ln 24$; $E = \ln 3\sqrt{2} + 2\ln 6$

$F = \ln 3\sqrt{2} + \ln 2\sqrt{3}$; $G = \ln 144$; $H = 2\ln 2 - \ln 36 + 3\ln 3$; $I = \ln\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)$.

Exercice 2

Exprime en fonction de ln 2 et ln 5 les réels suivants :

$A = \ln 2000$; $B = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{32}{25}\right) + \ln 8$; $C = \ln 0{,}001 + 3\ln 4$; $D = \ln 0{,}025 + \ln 40$; $E = \ln 0{,}625$

$F = \ln\left(\frac{25}{320}\right)$; $G = \ln 0{,}005 + \ln 16$; $H = 2\ln\left(\frac{2}{5}\right) - 6\ln 10$; $I = \ln 25 + 4\ln 10$; $J = \ln 0{,}5 + \ln 80$

$K = \ln 50 - 2\ln 20$; $L = 3\ln 100 - 5\ln 10$; $M = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$.

Exercice 3

Simplifie les expressions suivantes :

$A = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $B = \ln\sqrt{e}$; $C = \sqrt{6\ln e - \ln e^2}$; $D = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$; $E = 5\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln e^2$

$F = 3\ln e^{-1} + \ln e^2$; $G = 4\ln e\sqrt{e} - 2\ln e$; $H = \ln\sqrt{\sqrt{e}}$; $I = 6\ln e^2\sqrt{e}$; $J = \sqrt{\ln e^4} - 2\ln\sqrt{e}$.

Exercice 4

Simplifie les expressions suivantes :

$A = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)^{20} + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)^{20}$; $B = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{10}$; $C = \ln\left(\sqrt{3}+1\right) + \ln\left(\sqrt{3}-1\right)$

$D = \ln\left(2+\sqrt{2}\right) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$; $F = 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 4\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - 5\ln 2$.

Résolution d'équations, d'inéquations et systèmes

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$A)$ $\ln(2x+7) = \ln(x-3)$; $B)$ $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$; $C)$ $\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1)$

$D)$ $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$; $E)$ $\ln(x-2) + \ln(x+3) = 2\ln(x+1)$

$F)$ $\ln(2x-2) + \ln(x+2) = 3\ln 2$; $G)$ $3(\ln x)^2 - 7\ln x + 2 = 0$; $H)$ $-5(\ln x)^2 + (\ln x) + 6 = 0$.

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$A)$ $\ln(2-3x) > \ln x$; $B)$ $\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$; $C)$ $\ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) \leq 0$

$D)$ $\ln(x^2 + 2x + 2) \geq \ln(-x^2 + x + 3)$; E) $\ln(2x-1) - \ln(1-x) < \ln 3$; $F)$ $(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0$

$G)$ $\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$; $H)$ $(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0$; $I)$ $(\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = 0$

$J)$ $\ln(x^2 + 2x + 2) > \ln(3 + x - x^2)$; $K)$ $\ln(5x^2 + 6x + 1) < 0$.

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes équations suivants :

1) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 32 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} xy = 243 \\ \log_x y + \log_y x = \frac{17}{4} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \ln(x^3y^4) = 6 \\ \ln\left(\dfrac{x^2}{y^5}\right) = 5 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x + y = 7 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 0 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \ln x \,.\, \ln y = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$.

Exercice 8

Soit le polynôme P définie par $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

1) a) Calcule $P(-1)$.

b) Détermine les nombres réels a et b tels que : $P(x) = (x+1)(2x^2 + ax + b)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
3) En déduis dans $\mathbb{R}$ la résolution de l'équation et l'inéquation :
   a) $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$.
   b) $\ln(2x + 3) + \ln(x^2 + 2x + 2) \leq \ln(8x + 9)$.

Exercice 9

On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.
1) a) Vérifie que $P(-1) = 0$.
   b) Ecris $P(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
2) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
   b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.
3) En déduis dans $\mathbb{R}$:
   a) L'équation : $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$.
   b) L'équation : $\ln(4 - x^2) + \ln(2x + 7) = \ln(10x + 25)$.
   c) L'inéquation : $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 \leq 0$.

Calcul de limites

Exercice 10

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 5 - \ln x$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x + 2$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x + 1 - 7\ln x$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 5 - \ln x$
5) $\lim\limits_{x\to3} \ln(3 - x)$	6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$	7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2x+1}$	8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2 + x + 1)$
9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	10) $\lim\limits_{x\to0} x^3\ln x$	11) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}\ln x$	12) $\lim\limits_{x\to1} -\frac{1}{\ln x} + \frac{x}{\ln x}$
13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x-1)}{x}$	14) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln x}{x^2} \cdot \ln(x+1)$	15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x\ln x}$	16) $\lim\limits_{x\to0} \left(x + \frac{1}{x^2}\right)\ln x - x$
17) $\lim\limits_{x\to0} x(\ln x)^5$	18) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x} + \ln x$	19) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x$	20) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
21) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$	22) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1+\ln x}{x}$	23) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1+\ln x}{x^2}$	24) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \frac{1}{x} - (\ln x)^2$
25) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1}$	26) $\lim\limits_{x\to0} \ln x + \ln^2 x$	27) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$	28) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$
29) $\lim\limits_{x\to e} \frac{x\ln x - x}{x - e}$	30) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$	31) $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln^5 x$	32) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 5 - \ln x$
33) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$	34) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$	35) $\lim\limits_{x\to0} x\ln^2 x$	36) $\lim\limits_{x\to0} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
37) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$	38) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$	39) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x\ln x}$	40) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-x+1}{4x+1}\right)\ln x$
41) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{1+\ln x}$	42) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x} - 2\ln x$	43) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x+1}{5x+2} - \ln x$	44) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
45) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x\ln x}$	46) $\lim\limits_{x\to0} x\ln x - \frac{1}{x} + 2$	47) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 4\ln^2 x$	48) $\lim\limits_{x\to0} 4x - 5 + \frac{\ln x}{x}$
49) $\lim\limits_{x\to0} x + \frac{3\ln x}{x}$	50) $\lim\limits_{x\to0} x - \frac{\ln x}{x^2}$	51) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x^2+1} - 2x^2$	52) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 + \frac{2\ln x - 1}{x}$

Détermination du domaine de définition

Exercice 11

1) $f(x)=\ln(x^2+\ 2x\ +\ 2)$; 2) $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 3) $f(x)=x^3-2-\ln x$; 4) $f(x)=\frac{x}{(\ln x)^2}$

5) $f(x)=\frac{\ln x-1}{x-e}$; 6) $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$; 7) $f(x)=\ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$; 8) $f(x)=\frac{\ln(x^2+x-1)}{x}$; 9) $f(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$

10) $f(x)=\ln|-x^2-3x\ +\ 4|$; 11) $f(x)=\frac{1-2\ln x}{1-\ln x}$; 12) $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$; 13) $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

Dérivée

Exercice 12

1) $f(x)=x+\frac{1}{2}-x\ln x$; 2) $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 3) $f(x)=x^3-2-\ln x$; 4) $f(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

5) $f(x)=\frac{\ln x-1}{x-e}$; 6) $f(x)=\ 1+x^2-\ln x$; 7) $f(x)=\ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$; 8) $f(x)=x(\ln x)^2$; 9) $f(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$

10) $f(x)=\ln|-x^2-3x\ +\ 4|$; 11) $f(x)=\ln x+x+1$; 12) $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$; 13) $f(x)=\ln(x)+\frac{1+x}{x+2}$.

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, démontre $f'(x)$ donnée :

1) $\begin{cases} g(x)=2\ln x+x-1 \\ f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2} \\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} g(x)=x^2-2\ln x \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1+\ln x}{x} \\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} g(x)=2x^3-1+2\ln x \\ f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2} \\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} g(x)=x+\dfrac{1}{2}-x\ln x \\ f(x)=\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x(1-x\ln x) \\ f'(x)=g(x) \end{cases}$; 5) $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x}{x-1}+\ln|x-1| \\ f(x)=x\ln|x-1| \\ f'(x)=g(x) \end{cases}$; 6) $\begin{cases} g(x)=2x^2-1-\ln x \\ f(x)=\ -2x^3+3x\ln x \\ f'(x)=-3g(x) \end{cases}$

7) $\begin{cases} g(x)=x\ln x-1 \\ f(x)=\dfrac{1+x}{1+\ln x} \\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+\ln x)^2} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} g(x)=1+x^2-2x^2\ln x \\ f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2} \\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} g(x)=\ln x+x+1 \\ f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1} \\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x)^2} \end{cases}$

Continuité et dérivabilité

Exercice 14

Etudie la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en $x_0=0$.

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1} \quad \text{si } x>0 \\ f(0)=\ 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} f(x)=x+\dfrac{1}{2}-x\ln x \ \text{ si } x>0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x(1-x\ln x) \ \text{ si } x>0 \\ f(0)=\ 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} f(x)=x^2-2x\ln x \quad \text{si } x>0 \\ f(0)=\ 0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1+x}{1+x-\ln x} \ \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \quad \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=\ 0 \end{cases}$

Problèmes

Problème 1

A// On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2+2-2\ln x$.

1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.

2) Dresse le tableau de variation g, puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B// On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+2\frac{\ln x}{x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité graphique : 2cm)

1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.

2) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

3) Démontre que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in\left[\frac{1}{2};1.\right]$

4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
b) Etudie la position relative de (D) et (C).
5) Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
6) Trace (C) et (D).
7) Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 2
1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.
a) Etudie le sens de variation de g et calcule $g(1)$.
b) En déduis le signe de $g(x)$.
2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$.
a) Détermine les limites de en 0 et en $+\infty$.
b) Calcule $f'(x)$.
c) Montre que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduis le tableau des variations de f.
d) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2; donne en justifiant un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles.
3) On note (C) la représentation graphique de dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm.
a) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (C).
b) Etudie la position de (C) par rapport à (D).
c) Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D).
d) Trace (C) et (D) dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Problème 3
Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln x + x + 1$.
1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique telle que $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$.
b) Déduis le signe $g(x)$ de suivant les valeurs de x.
Partie B : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
On note (C) la représentation graphique de dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2 cm)
1) a) Etudie la continuité de f en 0.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0.
2) Calcule la limite de f en $+\infty$ et étudie la branche infinie de (C) en $+\infty$.
3) a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
b) Déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
4) Montre que $f(\alpha) - \alpha$.
5) Trace (C).

Problème 4
PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.
1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) Calcule $g(1)$ et en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
PARTIE B : Etude de la fonction principale
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.
4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à (C).
b) Etudie la position relative de (D) et (C).

5) Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
6) Trace (C), (D) et (T).

PARTIE C : Calcul d'aire

Soit la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{(\ln x)^2}{2}$.
1) Démontre que h est une primitive de f.
2) Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 5

A// On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.
1) Etudie les variations de g, puis dresse son tableau de variation.
2) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B// On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,3 < \alpha < 1,4$.
4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à (C).
   b) Etudie la position relative de (D) et (C).
5) Détermine une équation de la tangente (T) à la droite (C) au point d'abscisses 1.
6) Trace (D), (T) et (C).
7) Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 6

A// On donne la fonction g définie par : $g(x) = 2x\ln x + x - 1$ sur $]0;+\infty[$.
1) Calcule la limite de g en 0 et en $+\infty$.
2) Dresse le tableau de variation de g.
3) Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de g sur $]0;+\infty[$.

B// Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2\ln x - x - 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. (C) sa courbe représentative et la droite (Δ) : $y = -x - 1$.
1) Détermine D_f et les limites aux bornes de D_f.
2) Etudie la continuité de f en 0 et la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement ce résultat.
3) Montre que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
4) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
5) a) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$.
   b) Vérifie que $\alpha \in [2;\ 2,5]$ et donne la valeur approchée de α à 10^{-2} près.
6) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement ce résultat.
7) Trace la courbe (C) et la droite (Δ) dans un même repère.
8) Représente et calcule l'aire du domaine délimité par (C), (Δ) et les droites $x = 1$ et $x = e$.

Problème 7

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$, par $g(x) = 2x^2 + \ln x$.
1) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
2) a) Montre que $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]0;+\infty[$.
   b) Montre que $0,548 < \alpha < 0,549$.
3) Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{2x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ ayant comme unité graphique 2 cm.
1) a) Détermine la limite de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

b) Détermine la limite de f en $+\infty$.
c) Montre que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C).
Etudie la position de (C) par rapport à l'asymptote (D).
2) a) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x^2}$.
b) Dresse le tableau de variation de f.
3) a) Montre que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$.
b) Donne alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
4) a) Calcule les coordonnées du point de (C) où la tangente est parallèle à (D).
Donne une équation de cette tangente (T).
b) Trace (C), (D) et (T) dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.
c) Soit λ un réel supérieur à $\frac{1}{e}$. Détermine l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (D) et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$.
Calcule la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 8

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie. Des relevés statistiques ont permis de modéliser le nombre de malades durant l'épidémie par la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 26]$ par : $f(t) = 24t \ln t - 3t^2 + 10$ où t représente le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines. On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.
1) Calcule $f'(t)$.
2) a) Etudie le signe de $f''(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$.
b) Dresse le tableau de variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[1; 26]$.
c) Montre que l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1; 26]$ dont on donnera un encadrement par deux entiers consécutifs.
d) En déduis le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$, puis les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 26]$.
3) On admet que $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
a) Dans le contexte du problème, donne une interprétation du tableau de variations de la fonction dérivée f' obtenu à la question 2) b).
b) En se servant des questions précédentes, détermine le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malade par semaine a commencé à diminuer.

Problème 9

A// Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^3 - 2\ln x$.
1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) Calcule $g(1)$ et en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
B// On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - x + 2$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$. (Unité graphique : 2cm)
1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) a) Calcule $f'(x)$ et vérifie que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[1; +\infty[$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.
4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C).
b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).
5) Trace (C), (D) et (T).
6) Calcule en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 10

Soit la fonction numérique f à variable réelle définie par : $f(x) = x + \frac{2(1+\ln x)}{x}$.
1) a) Détermine l'ensemble de définition de f et les limites de aux bornes de cet ensemble.
b) On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x^2 - 2\ln x$.
■ Etudie les variations de h sur $]0; +\infty[$.
■ En déduis le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$.

c) Etudie les variations de f, puis dresse son tableau de variation.

d) Prouve que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

2) a) Trace la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

b) On désigne par $A(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k (k \geq 2)$. Calcule $A(k)$.

c) Pour quelle valeur de k a-t-on $A(k) = 8$?

<u>Problème 11</u>

<u>Partie A</u>

Soit la fonction f définie sur $[10; 100]$ par : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$.

1) Calcule $f'(x)$.

2) Démontre que $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[10; e^3]$ et négative sur $[e^3; 100]$.

3) Dresse le tableau de variation de f.

<u>Partie B</u>

On se propose d'exprimer la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge.

x est représenté en année et $g(x)$ la capacité pulmonaire en litres, on admet que sur l'intervalle $[10; 100]$ on a : $g(x) = 110f(x)$.

1) Calcule la capacité pulmonaire à 10 ans, 15 ans, 30 ans et 60 ans.

2) Trace la courbe représentative de g dans un repère orthogonal (en abscisse 2cm pour 10 ans et en ordonné 3 cm pour 1 litre).

3) A quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?

4) Détermine graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.

<u>Problème 12</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm sur chaque axe.

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ et (C_h) sa courbe représentation graphique.

1) a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudie les limites de h aux bornes de D_h.

c) Montre que $\forall x \in D_h, h'(x) = \frac{x^2-8}{x^2-4}$. En déduis le sens de variation de h.

d) Dresse le tableau de variation de h.

2) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C_h) à l'infini.

Précise la position relative de (C_h) par rapport à (Δ).

b) Montre que le point $A(0; -2)$ est un centre de symétrie de (C_h).

c) Place le point A, puis trace (C_h) et (Δ).

3) A l'aide d'une intégration par parties, calcule en cm^2 l'aire de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe (C_h), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

On rappelle que : $\frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$ et $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$.

On donne : $h(-2\sqrt{2}) \approx -6{,}59$ et $h(2\sqrt{2}) \approx 2{,}59$.

<u>Problème 13</u>

<u>Partie A</u> : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + \frac{1}{2} - x\ln x$.

1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.

2) a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\ln x$.

b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $3{,}1 < \alpha < 3{,}2$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

<u>Partie B</u> : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x(1 - x\ln x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

1) a) Montre que f est continue en 0.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0.
c) Calcule la limite de f en $+\infty$.
d) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat.

2) On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = g(x)$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3) Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2+\alpha}{4}$.
4) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Détermine une équation de (T).
5) Trace (C) et (T). (On prendra $\alpha \approx 3{,}2$ et $f(\alpha) \approx 3{,}3$).

Partie C : Calcul d'aire
Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{9}x^3(-1 + 3\ln x)$.
1) Détermine la dérivée de h.
2) En déduis la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ telle que $F(1) = e$.
3) Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Problème 14

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse le tableau de variation de g.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.
On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)
1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$.
b) Déduis les variations de f et dresse le tableau de variation de f.
3) Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.
4) Trace (C).

Problème 15

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x}{x+1}$.
1) Détermine le domaine de définition de g.
2) a) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
2) a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$.
b) Donne alors le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
3) En déduis que $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 1$.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)
1) Montre que f est continue en 0.
2) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation graphique.
3) a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
b) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = g(x) - 1$.
c) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
5) Construis (C) et (T).

Problème 16

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$.

1) a) Détermine l'ensemble de définition de g.
   b) Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2) a) Montre que $\forall x \in]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[, g'(x) = \frac{x-7}{(x-3)^2}$.
   b) En déduis les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.
   b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\ln|x-3|$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 3 et $+\infty$.
   b) Interprète graphiquement le résultat de la limite en 3.
2) a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.
   b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
3) a) Montre que $\forall x \in]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[, f'(x) = g(x)$.
   b) En déduis le sens de variation de f et dresse alors son tableau de variation.
4) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^2}{3-\alpha}$.
5) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
6) Trace (C). (On prendra $\alpha = 0{,}8$)

PARTIE C : Calcule d'aire

1) a) Détermine les réels a, b et c tels que $\forall x \in]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[, \frac{x^2+2x}{3-x} = ax + b + \frac{c}{3-x}$.
   b) En déduis la valeur de $I = \int_0^2 \frac{x^2+2x}{3-x}dx$.
2) A l'aide d'une intégration par parties, calcule en cm^2 l'aire de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

PARTIE D : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]3;+\infty[$.

1) Montre que h réalise une bijection de $]3;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.
   a) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0.
   b) Calcule $(h^{-1})'(0)$.
3) Construis (C') la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.

Problème 17

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 - 2\ln x$.

1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.
   b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{3}x$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

1) a) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Interprète graphiquement le résultat en 0.
2) a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[\,, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
   b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.
   b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).

4) Montre que $f(\alpha) = \frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$.
5) a) Détermine le point A de (C) en lequel la tangente (T) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{3}$.
b) Détermine l'équation réduite de cette tangente (T).
6) Construis (C), (Δ) et (T).

PARTIE C : Calcul d'aire

1) Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.
En utilisant une intégration par partie, calcule l'aire A(λ) de la région limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$.
2) Détermine $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Problème 18

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x(\ln x)^2 - 1$.
1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \ln x(\ln x + 2)$.
b) En déduis les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $2{,}02 < \alpha < 2{,}03$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{\ln x} \text{ si } x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)
1) a) Montre que f est continue en 0.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0, puis donne une interprétation graphique.
2) a) Calcule la limite de f en 1 et en $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat en 1.
3) a) Montre que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.
c) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4) Montre que $f(\alpha) = \alpha - 1 + \sqrt{\alpha}$.
5) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).
6) Construis (C) et (Δ).

Problème 19

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 - 1 - \ln x$.
1) Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse le tableau de variation de g.
3) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = -2x^3 + 3x\ln x$.
On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)
1) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) a) Montre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -3g(x)$.
b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
3) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat obtenu.
4) Trace (C)

Problème 20

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$.
1) Justifie que l'ensemble de définition de g est $D_f =]-\infty;0[$.

2) Calcule les limites de g en $-\infty$ et 0.
3) a) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
   b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
<u>PARTIE B</u> : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty; 0]$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x\ln(-x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm)
1) a) Montre que f est continue en 0.
   b) Etudie la dérivabilité de f en 0.
2) a) Calcule la limite de f en $-\infty$.
   b) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.
3) a) Montre que $\forall x \in]-\infty\,; 0[\,, f'(x) = 2g(x)$.
   b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4) Ecris l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5) Trace (C) et (T).
<u>PARTIE C</u> : Calcul d'aire
On donne $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2\ln(-x) - \frac{1}{2}x^2$ pour $x < 0$.
1) Justifie que F est une primitive de f.
2) Soit α un réel tel que $-1 < \alpha < 0$. Calcule l'aire A(α) du domaine du plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \alpha$.
3) En déduis la limite de A(α) lorsque α tend vers 0.

Problème 21

<u>Partie A</u>
Soit la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x\ln x$.
1) a) Justifie que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$.
   b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation. (*On ne calculera pas les limites de g*).
2) En déduis que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.
<u>Partie B</u>

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+x\ln x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O; I; J})$. Unité graphique : 4 cm
1) a) Etudie la continuité de f en 0.
   b) Etudie la dérivabilité de f en 0.
   c) Démontre qu'une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O est : $y = x$.
   d) Démontre que :
      - $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{T})$ sur $]0; 1[$.
      - $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{T})$ sur $]1; +\infty[$.
2) Démontre que la droite (OI) est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
3) a) On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
      Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$.
   b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation
4) Construis la droite $(\mathcal{T})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère $(\mathrm{O; I; J})$.
<u>Partie C</u>
1) a) Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) \leq 1$.
   b) Démontre que : $\forall x \in [1; e], 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.
2) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
   Démontre que : $16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$.

Problème 22

<u>Partie A</u>
Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

1) a) Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
b) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) a) Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, calcule $g'(x)$.
b) Détermine le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
c) Etudie les variations de g, puis dresse son tableau de variation.
3) a) Calcule $g(1)$ et $g(2)$. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; 2]$.
b) En déduis un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
c) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthogonal (O, I, J).
(Unité graphique : $\mathrm{OI} = 2$ cm et $\mathrm{OJ} = 4$ cm).
1) a) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b) Interprète graphiquement les résultats ci-dessus.
2) a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$.
b) En déduis les variations de f.
c) Démontre que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.
d) Dresse le tableau de variation de f. On prendra $\alpha = 1{,}8$.
e) Construis $(\mathcal{C})$.

Partie C

1) Démontre que pour tout $x \geq 1, \frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.
2) On pose $\mathrm{E}_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$ et $\mathrm{E}_2 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.
a) Calcule E_1, puis en utilisant une intégration par parties calcule E_2.
b) En déduis un encadrement de $\mathrm{K} = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$.
3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$.
a) Exprime $\mathcal{A}$ en fonction de K.
b) En déduis un encadrement de $\mathcal{A}$ en cm^2.

Problème 23

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité graphique : 2 cm)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.
1) Détermine les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g.
3) Montre que dans $[0{,}5; 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α.
Détermine un encadrement de α à 0,1 près.
4) En déduis le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction f

1) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifie que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis étudie le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
3) Montre que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.
4) Donne le tableau de variation de f.
5) Construis $(\mathcal{C})$.

Partie C : Intégrale et suite

Soit $\mathrm{I}_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $\mathrm{A}_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t) dt$ pour tout entier naturel n. $\mathrm{I}_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$.
1) Montre à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathrm{I}_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$.
2) a) Montre que $\mathrm{A}_n = \mathrm{I}_n + e$.
b) Calcule I_0 et A_0.

c) Donne une interprétation géométrique de A_0.
3) Montrer que la suite (A_n) converge vers e.

Problème 24

A//

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
   a) Dresse le tableau de variation de g.
   b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.
   c) Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.
2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique (2 cm).
   a) Dresse le tableau de variation de f.
   b) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,01 près.
   c) Trace (C) dans le repère.

B// On considère la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1) a) Prouve que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et précise $F'(x)$.
   b) En déduis le sens de variation de F.
2) a) Vérifie que $\forall t \geq 1$, on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$.
   b) Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{I}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $\mathrm{J}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$.
      b-1) A l'aide d'une intégration par parties, calcule $\mathrm{I}(x)$.
      b-2) A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$ pour $t > 0$, calcule $\mathrm{J}(x)$.
   c) Déduis de ce qui précède que pour $x > 1$, on a : $\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.
   d) On admet que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ, vérifie que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$.

Problème 25

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$.
On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

A// Etude de f_1

1) Détermine $\lim_{x\to0} f_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduit pour $(\mathcal{C}_1)$?
2) Etudie le sens de variation de f_1 et donne le tableau de variation f_1.
3) Donne une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(\mathcal{C}_1)$.
4) Détermine $\lim_{x\to0} f_2(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduit pour $(\mathcal{C}_2)$?
5) Calcule $f_2'(x)$ et donne le tableau de variation f_2.

B//

1) Etudie le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduis la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.
2) Trace $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans le même repère orthogonal.

C// m étant un entier naturel non nul, on pose $\mathrm{I}_m = \int_1^e f_m(x)dx$.

1) On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calcule $F'(x)$. En déduis I_1.
2) En utilisant une intégration par parties, montre que $\mathrm{I}_{m+1} = -\frac{1}{e} + (m+1)\mathrm{I}_m$.
3) Calcule I_2 puis l'aire en $cm2$ du domaine compris entre $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Les propriétés

Exercice 1

Ecris plus simplement les nombres suivants :

$A = e^{\ln 4}$; $B = e^{\ln 3}.e^{\ln 5}$; $C = \ln\left(\frac{e^{-1}}{e}\right) - e^{\ln 7}$; $D = e^{\ln 1} - 1$; $E = e^{\ln\frac{1}{5}} + e^{\ln\frac{4}{5}}$; $F = 3\ln(\ln e) - e^{\ln 1}$

$G = e^{\ln\sqrt{e}} - \sqrt{9e^{\ln e}}$; $H = e^{(\ln 3^2 - \ln 2)}$; $I = \left(e^{\ln 6} - 1\right)\left(e^{\ln 6} + 1\right)$; $J = \ln(e^3 + 1) - \ln(1 + e^{-3})$.

Exercice 2

Démontre pour tout nombre réel x, les relations suivantes :

1) $\ln(e^x + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-2x})$; 2) $x + \ln(1 + e^{-x}) = \ln(1 + e^x)$; 3) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

4) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$; 5) $\frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Résolution d'équations, d'inéquations et systèmes

Exercice 3

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)$ $e^x = -2$; $b)$ $2e^x - 1 = 0$; $c)$ $e^{2x-1} = e^{3-2x}$; $d)$ $e^{x^2+7} = e^{-3x+5}$; $e)$ $-1 + 2e^{-x} = 0$; $f)$ $e^{3x+2} = 4$

$g)$ $e^x + e^{-x} = 2$; $h)$ $\frac{e^x}{1 - 2e^x} = 5$; $i)$ $(e^x - 3)(e^x + 2) = 0$; $j)$ $e^x(e^{2x} - 4) = 0$; $k)$ $\frac{1}{2 + e^x} = 2e^{-x}$

$l)$ $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$; $m)$ $4e^{2x} - e^x + 2 = 0$; $n)$ $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$; $o)$ $2e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$; $p)$ $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = 7$

$q)$ $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$; $r)$ $e^{4x} - 4e^{2x} - 21 = 0$; $s)$ $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$; $t)$ $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

$u)$ $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$; $v)$ $5^{2x} + 5^x - 2 = 0$; $w)$ $2^{2x+1} + 2^x - 105 = 0$; $x)$ $2^{2x+3} - 3.2^{x+1} + 1 = 0$.

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$a)$ $e^x > 2$; $b)$ $e^{3x-1} \leq e^{2x+4}$; $c)$ $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$; d) $e^{\frac{1}{x}} > e^{x-2}$; $e)$ $e^{2x+3} < 3$; $f)$ $e^{-x} \leq 0$; $g)$ $2e^x - 1 \geq 0$;

$h)$ $3e^{2x} + e^x - 4 < 0$; $i)$ $e^{2x} - 4e^x - 5 \leq 0$; $j)$ $2e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$; $k)$ $e^{2x} - 4e^x + 3 \geq 0$;

$l)$ $3e^{6x} + 5e^{3x} - 2 > 0$; $m)$ $2e^{3x} - 2e^{2x} - 20e^x - 16 \leq 0$; $m)$ $(e^x - 3)(2 - e^x) \geq 0$.

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes équations suivants :

1) $\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^{x-y} = 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3e^x + e^y = 13 \\ e^x - 2e^y = -5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} e^{4x} \times e^y = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{e^x}{e^{2y}} = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 9 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \ln(y + 6) - \ln x = 3\ln x \\ e^{6x} \times e^y = e^{-6} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} \ln(x + 4) - \ln(y + 1) = 3\ln 2 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y - y^x = 0 \\ x^4 - y^8 = 0 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 2\sqrt{2} \end{cases}$; 12) $\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases}$; 13) $\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$.

Exercice 6

On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$.

1) a) Calcule $P(1)$.

b) Vérifie que $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x - 15)$.

2) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.

3) En déduis dans $\mathbb{R}$, la résolution de :

a) L'équation : $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 8\ln x + 15 = 0$.

b) L'équation : $2e^{3x} - 9e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$.

c) L'inéquation : $2e^{3x} - 9e^{2x} - 8e^x + 15 \leq 0$.

Exercice 7

Soit le polynôme P définie par $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$.

1) a) Calcule $P(1)$.

b) Détermine les réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

3) En déduis dans $\mathbb{R}$, la résolution des équations suivantes :

a) $4(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - \ln x + 1 = 0$.

b) $e^{-3x} + 4 = e^{-2x} + 4e^{-x}$.

c) $2^{3x+2} - 2^{2x+2} - 2^x + 2 = 0$.

d) $4\left(\log_3 x\right)^3 - 4\left(\log_3 x\right)^2 - \log_3 x + 1 = 0$.

Calcul de limites

Exercice 8

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3 - e^x$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+x}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - e^x + 1$	4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+4)e^x$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x}$	7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+x}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - e^x + 1$
9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^x + 4}{e^x + 5}$	10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	11) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-x}$	12) $\lim\limits_{x\to0} (x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$
13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$	14) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x - e^{-2x}$	15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$	16) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 2x + 1$
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - x^2 e^x$	18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + xe^x}$	19) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 + 2e^{-x}$	20) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - (x+1)e^{1-x}$
21) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^x - 1$	22) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^x - 2x - 1}{e^x - x}$	23) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - x^2 e^x$	24) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x)$
25) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x - e^x$	26) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x}$	27) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{e^x - 2x}$	28) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{1-x} - 1$
29) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x - \ln x}$	30) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(1 - x^3)$	31) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{e^x - 2x}$	32) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} - 1$
33) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - x + xe^{1-x}$	34) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 + xe^{-x}$	35) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x$	36) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$
37) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)(1+e^x)$	38) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} - x$	39) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \ln x$	40) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$
41) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - e^{-x})\ln x$	42) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + 1 + e^x$	43) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$	44) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + 2)\mathrm{e}^{-x} + x - 1$
45) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x + e^{-x})$	46) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 4e^x - 1$	47) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left\lvert\frac{1}{e^x - 1}\right\rvert$	48) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{2x} - 5e^x + 2$
49) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + e^{-\frac{x}{2}}$	50) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 4 + \frac{4}{e^x - 3}$	51) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{1 + xe^x}$	52) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$

Détermination du domaine de définition

Exercice 9

1) $f(x) = 2 - x + xe^{1-x}$; 2) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$; 3) $f(x) = e^x - 4 + \frac{4}{e^x-3}$; 4) $f(x) = \ln x + 1 + e^x$
5) $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$; 6) $f(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$; 7) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; 8) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$; 9) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$
10) $f(x) = \ln|e^x|$; 11) $f(x) = \frac{e^{3x}-4x+1}{e^{2x}-4e^x-5}$; 12) $f(x) = e^{\sqrt{x-1}} + \frac{e^x}{x-2}$; 13) $f(x) = \frac{\ln x}{e^{-x}+e^x}$.

Dérivée

Exercice 10

1) $f(x) = x + 3 - e^x$; 2) $f(x) = 3xe^{2x} - 5e^x$; 3) $f(x) = 1 - x^2e^x$; 4) $f(x) =(x + 1)e^{-x} + x$
5) $f(x) = (2 + x)e^{-x} - 2$; 6) $f(x) = xe^x - e^x - 1$; 7) $f(x) = 1 - (1 + x)e^{1-x}$; 8) $f(x) = x - 2 + 2e^{-x}$;
9) $f(x) = (x + 1)^2e^{-x}$; 10) $f(x) = e^{2x} - 2x + 1$; 11) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$; 12) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$
13) $f(x) = \ln x + 1 + e^x$; 14) $f(x) = 2 - x + xe^{1-x}$; 15) $f(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$; 16) $f(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x-1}$.

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, démontre $f'(x)$ donnée :

1) $\begin{cases} g(x) = x - 2 + 2e^{-x} \\ f(x) = (x - 3)e^x + 2x + 3 \\ f'(x) = e^x g(x) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} g(x) = 2e^x + 2x - 7 \\ f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x}) \\ f'(x) = e^{-x} g(x) \end{cases}$; 3) $\begin{cases} g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1 \\ f(x) = x^2e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) = xg(x) \end{cases}$

4) $\begin{cases} g(x) = xe^{-x} - 1 \\ f(x) = (x + 1)e^{-x} + x \\ f'(x) = -g(x) \end{cases}$; 5) $\begin{cases} g(x) = (1 - x)e^{1-x} + 1 \\ f(x) = xe^{1-x} + x - 2 \\ f'(x) = g(x) \end{cases}$; 6) $\begin{cases} g(x) = 1 + (2x - 3)e^{-2x} \\ f(x) = x - (x - 1)e^{-2x} \\ f'(x) = g(x) \end{cases}$

7) $\begin{cases} g(x) = 1 - x^2e^x \\ f(x) = \dfrac{x}{1 + xe^x} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1 + xe^x)^2} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} g(x) = (2 + x)e^{-x} - 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^{-x} - 1} \\ f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^{-x} - 1)^2} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} g(x) = 1 - (1 + x)e^{1-x} \\ f(x) = \dfrac{x}{1 - e^{1-x}} \\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1 - e^{1-x})^2} \end{cases}$

Continuité et dérivabilité

Exercice 12

Etudie la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en $x_0 = 0$.

1) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^{-x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}} + 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} f(x) = (1 - e^{-x}) \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} f(x) = x - e + \dfrac{e}{\ln x} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = -e \end{cases}$.

Problèmes

Problème 1

I// Soit φ la fonction définie sur R par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.
1) Etudie les variations de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une unique solution α et que $-1,28 < \alpha < -1,27$.
3) En déduis le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II// Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$. (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité: 4cm)
1) Montre que $f'(x) = \frac{e^x\varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$. En déduis le sens de variations de f.
2) Montre que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
Donne une équation de (T) et étudie la position de (C) par rapport à (T).
4) Calcule les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudie la position de (C) par rapport à (D).
5) Dresse le tableau de variation de f.
6) Trace dans un même repère (T), (D) et (C).

Problème 2

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1) Détermine la limite de $f(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interprète ces résultats.
2) a) Etablis que pour tout x réel $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$. En déduis le signe de $f'(x)$, puis le tableau de variation de f.
b) Ecris l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 0$.
c) Construis la courbe (C) et la tangente (T) dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité 2cm).
3) Démontre que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur $[-2; 4]$.
4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)e^{-x}$.
a) Détermine les réels a et b pour que g soit une primitive de f.
b) Calcule en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -2$ et $x = 4$. Donne une valeur approchée de l'aire à 10^{-2} près par défaut en cm^2.

Problème 3

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une pétrie. Le nombre de bactéries en centaine est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heure.
On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.
1) a) Calcule $f(0)$ et interprète ce résultat.
b) Montre que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduis la limite de f en $+\infty$.
On rappelle cette valeur la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de f ?
c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifie la réponse.
2) Montre que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t+2)^2}$. En déduis le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.
3) Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Détermine l'équation de (T).
4) Recopie et complète le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près.

t	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$							

5) Trace (C) et (T) ainsi que les asymptotes éventuelles à (C).
6) Calcule à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égale à 200.
7) Détermine graphiquement au bout de combien de temps, la population de cette colonie dépassera 80% de sa saturation.

Problème 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité graphique : 2 cm.
On note E le point de coordonnées $(\ln 2, \ln 2)$.
1) Soit a et b deux nombres réels, on désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x+2}$.
a) Calcule la dérivée de g.
b) Détermine a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$.
a) Montre que pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$.
b) Montre que les droites (D_1) d'équation $y = x + 2$ et (D_2) d'équation $y = x - 2$ sont asymptotes à la courbe représentative (C) de f respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Précise la position de la courbe par rapport à chacune de ces droites.
d) Dresse le tableau de variation de f.
e) Construis la courbe (C), (D_1) et (D_2).
3) a) Détermine une primitive de la fonction h définie tout nombre réel x par : $h(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$.
b) En déduis une primitive de f qui s'annule pour $x = \ln 2$.

Problème 5

A//

1) On considère l'équation différentielle (E): $y"-y=4xe^{x}$.

Détermine les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x)=(ax^2+bx)e^{x}$ soit solution de (E).

2) Vérifie qu'une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) équivaut à $f-g$ est solution de l'équation (E') : $y"-y=0$.

3) Résous (E') puis en déduis la solution générale de (E).

B// On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-x+1)e^{x}$ de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (Unité 1cm).

1) Détermine la limite de f en $-\infty$ puis interprète graphiquement ce résultat. Détermine la limite de f en $+\infty$.

2) Calcule la fonction dérivée de f puis dresse son tableau de variation.

3) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

4) Trace (T) et (C).

Problème 6

Partie A :

1) Résous l'équation différentielle : $4y''+y=0$.

2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point Ω (0, 1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x$.

Partie B :

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-2x+e^{2x}$.

a) Etudie les variations de la fonction g.

b) En déduis le signe de $g(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+2+xe^{-2x}$, (C) sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique est 2cm sur (ox) et 1cm sur (oy)).

a) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Démontre que la droite (Δ) : $y=x+2$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Etudie la position relative de (C) et (Δ).

c) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{2x}}$ puis dresse le tableau de variation de f.

d) Trace (C) et (Δ).

3) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}$.

a) Prouve que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calcule en cm² l'aire A(D) de la partie D du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Problème 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative sur un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$.

1) Etudie les variations de g.

2) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que : $0{,}35\leq\alpha\leq0{,}36$.

3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Démontre que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=g(x)$.

3) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4) Démontre que $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$. Détermine un encadrement de $f(\alpha)$ d'ordre 2.

5) a) Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=x-1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

b) Précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

6) Détermine une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

7) Trace $(\mathcal{D}),(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C})$.

Partie C :

1) Détermine les réels a,b et c tels que la fonction P définie par : $P(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction de $x\mapsto(x^2+2)e^{-x}$.

2) a) Calcule en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm² de la partie limitée par $(\mathcal{C}),(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x=-\alpha$ et $x=0$.

b) Calcule la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.

Problème 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Unité 1cm.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) Etudie les variations de f.

3) Montre que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

4) Dresse le tableau de variation de f.

5) Trouve l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle.

6) Trouve les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes de coordonnées.

7) Trace $(\mathcal{C}_f)$ et (T).

8) Soit F la fonction définie par $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ où a, b et c sont des réels.

a) Détermine les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f.

b) Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses, la tangente (T) et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

Problème 9

Partie A

Soit g la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2+(x-1)e^{-x}$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

a) pour tout nombre réel x, calcule $g'(x)$ puis étudie son signe suivant les valeurs de x.

b) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty;2[$.

b) Justifie que : $-0{,}38 < \alpha < -0{,}37$.

4) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, h(x) > 0 \end{cases}$.

Partie B

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x+1-xe^{-x}$.

On notera (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 1 cm).

1) a) Calcule la limite de f en $+\infty$.

b) Calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Donne une interprétation graphique des résultats.

2) a) Justifie que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

b) En déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x+1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudie les positions relatives de (C) et (D).

4) a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point $J(0;1)$ est : $y = x+1$.

b) Etudie les positions relatives de (C) et (T).

5) Construis (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = -0{,}38$.

6) a) Détermine les réels a et b tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \to -xe^{-x}$.

b) Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

Problème 10

A// A l'instant $t=0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3ml d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0;12]$ par : $f(t) = 3e^{-0{,}1t}$.

1) Détermine $f'(t)$ et justifie que pour tout $\forall x \in [0;12], f'(t) < 0$.

2) Dresse le tableau de variation de f sur $[0;12]$.

3) Calcule $f(2), f(3), f(4), f(6)$ et $f(8)$. Que représente chacune de ces valeurs ?

4) Trace la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques.

(1 cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).

B// Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à 1,25 ml, ainsi on procède à une seconde injection.
1) Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ?
(On Déterminera ce temps graphiquement et par calcul).
2) On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de 4,5 ml.
Le patient court –il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

Problème 11

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty;+\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.
1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ puis précise la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ).
3) a) Etudie les variations de la fonction dérivée f' de f.
b) Calcule $f'(1)$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty;+\infty[$.
c) Dresse le tableau de variations de f.
4) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que : $1{,}9 < \alpha < 2$ et $-0{,}6 < \beta < -0{,}5$.
5) Calcule la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ puis en donne une interprétation géométrique.
6) Trace $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ).

Problème 12

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle
Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 2x + 1 - e^{-2x}$.
1) Vérifie que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x - (x+3)e^{-2x}$ est solution de (E).
2) a) Montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation différentielle (E') :
$y' + 2y = 0$.
b) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).
3) Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.
PARTIE B : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (2x - 3)e^{-2x}$.
1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g, puis dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α telle que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
PARTIE C : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x-1)e^{-2x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Détermine les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
b) En déduis les variations de f et dresse le tableau de variation de f.
3) Montre que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1-\alpha}{3-2\alpha}$.
4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D) sur $\mathbb{R}$.
c) Montre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
5) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
6) Tracer (T), (D) et (C).
PARTIE D : Etude d'une bijection
Soit φ la restriction de f à l'intervalle [1 ; +∞[.
1) Montre que φ réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
2) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ.
Calcule $(\varphi^{-1})'(1)$.
3) Construis (C') la courbe représentative de φ^{-1} dans le même repère que (C).
PARTIE E : Calcul d'aire
Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. $\mathcal{A}(\lambda)$ désigne l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

1) Calcule $\mathcal{A}(\lambda)$.
2) Calcule $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Problème 13

Partie A : Résolution de l'équation différentielle
On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$.
1) Résous l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
   a) Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b) Montre que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de (1).
   c) En déduis l'ensemble des solutions de (1).
3) Détermine la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.
1) Détermine la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g, puis dresse son tableau de variation.
3) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles : 0 et α telle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.
4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)
1) Détermine la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.
3) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
4) Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
5) Trace la courbe (C).

Partie D : Calcul d'aire
1) Soit m un réel négatif
   Interprète graphiquement l'intégrale $\mathcal{A} = \int_m^0 f(x)dx$.
2) a) Calcule $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b) En déduis la valeur de $\mathcal{A}$.
3) Calcule la limite de $\mathcal{A}$ lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 14

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x - 1$.
1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions : 0 et α telle que $1 < \alpha < 2$.
   b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 3)e^{-x} + x - 1$.
On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)
1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} g(x)$.
   b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
   b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).
      Donne les coordonnées du point A commun à la courbe (C) et la droite (D).
4) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.
5) Trace (C) et (D). (On prendra α = 0,8)
6) Soit $\mathcal{R}$ la parties du plan limitée par la courbe (C), l'axe des ordonnées, la droite (D) et la droite d'équation $x = 2$.
   A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'aire $\mathcal{A}$ de la région $\mathcal{R}$.

Problème 15

Partie A :

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$.

1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) a) Démontre que, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$.

b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifie que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

4) En déduis que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B :

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm)

1) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) a) Démontre que f est une primitive de g.

b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Etudie la position relative de (D) et (C).

4) Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6) Démontre que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$.

7) Justifie que, pour tout nombre réel $x, f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$.

8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

On appelle β l'une de ces solutions. Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9) Trace (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}5$.

Partie C :

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1) Calcule $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2) Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 16

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x - (1+x)e^x$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0{,}79 < \alpha < 0{,}80$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x + 1 - xe^x$. On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 2 cm.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donne une interprétation graphique du résultat.

3) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.

4) Montre que $f(\alpha) = e^\alpha + 4\alpha - 3$.

5) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) Etudie la position relative de (C) par rapport (Δ).

6) a) Montre que la droite $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\lambda\ et\ \beta$ telles que : $-1 < \lambda < 0$ et $1 < \beta < 2$.

b) Trace (C) et (Δ).

Partie C

t est un nombre réel tel que $t \leq 0$. On désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie du plan délimitée par (C), (Δ) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 0$.

1) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\mathcal{A}(t)$.

2) a) Détermine la limite de $\mathcal{A}(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.
   b) Interprète le résultat obtenu.

Problème 17

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$.

1) a) Démontre que pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{8(e^{x}-1)}{e^{2x}}$.
   b) Démontre que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{8(2-e^{x})}{e^{2x}}$. En déduis le signe de $f'(x)$.
   c) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   d) Dresse le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
   e) Représente la fonction f dans un repère orthogonal. (unités : 4 cm sur (ox) et 2 cm sur (oy))

2) On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t où t est positif et exprime en seconde, la concentration g de la substance injectée est : $g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On rappelle que la $\ll$ concentration $\gg$ est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.
   a) En utilisant les résultats de la question 1), Donne le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps t.
   b) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ?
   On Donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centime de secondes.
   c) Détermine les instants t_1 et t_2 pour les quels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale.

Problème 18

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par $f_m(x) = e^{x-1} - mx$, où m est un paramètre réel.
On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Unité 2 cm.

1) Montre que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
2) Montre que la droite (Δ_m) d'équation $y = -mx$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_m)$ et détermine la position de cette droite par rapport à $(\mathcal{C}_m)$.
3) Etudie la fonction f_1 et trace avec soin la courbe $(\mathcal{C}_1)$ dans le repère.
4) Soit g_1 la restriction de f_1 à $[1; +\infty[$.
   Montre que g_1 admet une réciproque $(g_1)^{-1}$. Représente la courbe $(g_1)^{-1}$.
5) Calcule en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion du plan limitée par $(\mathcal{C}_1)$, la droite (Δ_1): $y = -x$, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \alpha$. $(\alpha < 1)$.

Problème 19

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^{x}}{1+2e^{x}} - \ln(1 + 2e^{x})$.

1) Calcule $g'(x)$ et montre que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
2) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   Dresse le tableau de variation de g.
3) Donne le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}\ln(1 + 2e^{x})$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)

1) Calcule $f'(x)$ et montre que pour tout réel $x, f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.
2) a) Détermine la limite de f en $-\infty$.
   b) Détermine la limite f en $+\infty$. On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^{x}, f(x)$ s'écrit $4\frac{X}{(X-1)^2}.\frac{\ln X}{X}$.
3) Dresse le tableau de variation de f.
4) Trace (C).
5) Soit α un réel strictement positif.
   a) Vérifie que, pour tout réel $x, \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$. En déduis la valeur de l'intégrale $\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{\alpha}\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}dx$.
   b) Calcule, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $\mathrm{J}(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$.
   Donne une interprétation graphique de $\mathrm{J}(\alpha)$.

Partie C

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

1) Vérifie que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).

2) Montre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle $(E') : \ y' + 2y = 0$.

3) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).

Problème 20

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie ℝ par : $g(x) = e^{2x} - 4e^{x} - 1$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$.

b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{x}-2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 3cm sur (ox) et 1cm sur (oy)).

1) a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; \ln 2[\text{U}]\ln 2; +\infty[$.

b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f.

c) Interprète graphiquement les résultats.

d) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.

2) a) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{e^{x} g(x)}{(e^{x}-2)^2}$.

b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.

3) Montre que $f(\alpha) = 4 + \frac{10}{e^{\alpha}-2}$.

5) Trace (C).

PARTIE C : Calcul d'aire

1) Montre que $\forall x \in D_f, \frac{e^{2x}+1}{e^{x}-2} = e^{x} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}-2}\right)$.

2) On désigne par (E) la partie du plan limitée par (C), la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ et les droites d'équations respectives $x = -\ln 5$ et $x = 0$. Calcule l'aire de (E) en cm^2.

Problème 21

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-\infty; 0]$ par : $g(x) = \frac{1}{2} + (x-1)e^{x}$.

1) a) Calcule la limite de g en $-\infty$.

b) Justifie que $\forall x \in]-\infty; 0], g'(x) = xe^{x}$.

c) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

2) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty; 0]$.

b) Justifie que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; 0], g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B

le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \mathrm{I}; \mathrm{J})$. Unité graphique : 2 cm.

f est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + (x-2)e^{x} \ ; \ \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln x \ ; \ \text{si } x > 0 \end{cases}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1) a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudie la continuité de f en 0.

d) Etudie la dérivabilité de en 0. Donne une équation des demi-tangentes au point d'abscisse 0.

2) On suppose que est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

a) Montre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = g(x) \\ \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1 + \ln x \end{cases}$.

b) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

c) Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
d) Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]-\infty; 0]$.
e) Justifie que l'axe des ordonnées est une branche parabolique à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
3) a) Justifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha-1}\right)$.
b) Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ). On prendra $\alpha = -2$.

Partie C

On désigne par $(\mathcal{D}_\lambda)$ la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = -2$.
1) En utilisant une intégration par parties, justifie que l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ de $(\mathcal{D}_\lambda)$ est égale à : $\left(20e^{-2} + 4(\lambda - 3)e^{\lambda}\right)$ cm^2.
2) Calcule la limite de $\mathcal{A}_\lambda$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

Problème 22

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(0; \mathrm{I}; \mathrm{J})$. Unité graphique : 2 cm.
1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
b) Trouve les trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$.
2) Détermine les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.
3) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$.
b) Justifie que la dérivée de la fonction f est liée à l'équation (E).
c) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f.
4) a) Démontre que les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = 2x - 2$ sont des asymptotes de la Courbe $(\mathcal{C})$ respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) La courbe $(\mathcal{C})$ admet-elle une autre asymptote ? si oui ; précise la.
5) Pour tout $x \in D_f$, on considère les points M et M' de $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.
a) Détermine les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$.
b) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
6) Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et ses différentes asymptotes.
7) a) Détermine les réels α et β tels que pour tout $x \in D_f$, on ait : $f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$.
b) Soit k un nombre réel supérieur ou égal à 2. Détermine l'aire $\mathcal{A}(k)$ en cm^2 de la partie du plan contenant les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifiant : $\begin{cases} \ln 2 \leq x \leq \ln k \\ 2x - 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.
c) Calcule la limite de $\mathcal{A}(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Problème 23

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

Partie A

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + e^x + \ln x$.
1) Calcule les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2) Démontre que h est croissante sur $]0; +\infty[$.
3) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$ et que $0{,}11 < \alpha < 0{,}12$.
4) En déduis que $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, h(x) > 0 \end{cases}$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x + e^x - 1$.
1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) a) Justifie que : $g(\alpha) = -2 - (1 - \alpha) \ln \alpha$.
b) Détermine à l'aide de la question A//-3) un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1} puis en déduis que $g(\alpha) < 0$.
3) a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = h(x)$.
b) Dresse le tableau de variation de g.
4) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]\alpha; +\infty[$ une solution unique β tel que $0{,}11 < \beta < 0{,}12$.
5) En déduis que : $\begin{cases} \forall x \in]0; \beta[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\beta; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$.

Partie C

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = (1 - e^{-x})\ln x\,, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1) a) Justifie que $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{(e^{-x}-1)x\ln x}{-x}$.

b) En déduis que f est continue en 0.

c) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat.

2) a) Calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3) a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{e^{-x}}{x}g(x)$.

b) En déduis les variations de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

4) Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

5) Trace (T) et construire $(\mathcal{C})$. On prendra $\beta = 0{,}35$.

Problème 24

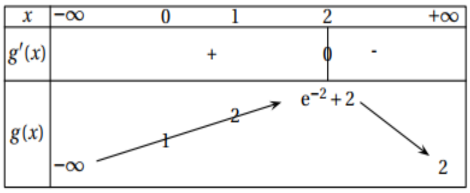
Partie A

1) Soient a, b et c des nombres réels. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x} + c$.

On note g' la fonction dérivée de g.

a) Calcule $g'(x)$.

b) Le tableau de variation de g est le suivant :



En utilisant les données numériques de ce tableau, établis que $a = 1, b = -1$ et $c = 2$.

Ainsi, pour la suite du problème : $g(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$.

2) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1; 0]$. On note α cette solution.

b) Détermine à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de α.

3) Etudie le signe de $g(x)$ pour x appartenant à R.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x}$.

1) a) Détermine la limite de f en $+\infty$.

b) Détermine la limite de f en $-\infty$.

2) a) Soit $f\,'$ la fonction dérivée de f. Montre que $f'(x) = g(x)$.

b) Dresse en le justifiant, le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f et (D) la droite d'équation $y = 2x + 1$.

a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x + 1)]$.

b) Donne une interprétation graphique de ce résultat.

c) Etudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D).

d) Trace (D) et $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère orthonormal $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Partie C

Soient H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -e^{-x}(1 + x)$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{-x}$.

1) Montre que la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

2) Hachure sur le graphique précédent le domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3) Calcule l'aire S en cm^2 du domaine hachuré.

EQUATIONS DIFFERENTIEELLES

Equations différentielles d'ordre 1 sans second membre

Exercice 1

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$a)\ f' - 5f = 0$; $b)\ f' + 7f = 0$; $c)\ 7f' = 2f$; $d)\ 3f' + \frac{2}{3}f = 0$; $e) - 2f' + \sqrt{3}f = 0$; $f)\ 2f' + f = 0.$

$g)\ f' + \ln 2\, f = 0$; $h)\ 3f' + 2f = 6$; $i)\ \sqrt{3}f = f'$; $j)\ f' + \sqrt{2}f = 0$; $k)\ f' - 4f = 0$; $l)\ 2f' + 3f = 0.$

Solution d'une équation différentielle d'ordre 1

Exercice 2

Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

1) $f(x) = xe^{2x}$; $y' - 2y = e^{2x}$.
2) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $2y' + y = x^2 + 2x - 2$.
3) $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$; $y' + y = 2(x + 1)e^{-x}$.
4) $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$; $y' + 2y = e^{-2x}$.
5) $h(x) = 1 - 2xe^{2x}$; $y' - 2y = -2(e^{2x} + 1)$.

Exercice 3

A// Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = x^2 + 1$ et $g(x) = ax^2 + bx + c$.
Détermine les réels a, b et c tels que g soit une solution de (E).

B// On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$ et $u(x) = (\mathrm{a}x + \mathrm{b})e^x$.
Détermine les réels a et b pour que u soit une solution de l'équation (1).

C// Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 3y = \sin x$ et $g(x) = a\cos x + b\sin x$.
Détermine les réels a et b pour que g soit une solution de (E).

Exercice 4

Dans chacun des cas suivant, détermine la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

$a)\ f' - f = 0$ et $f(2) = 0$; $b)\ 2f' + 3f = 0$ et $f(0) = 5$; $c)\ -f' + 6f = 0$ et $f(3) = 1$.

$d)\ f' + 3f = 0$ et $f(1) = 1$; $e)\ 2f' - 5f = 0$ et $f(1) = -1$; $f)\ -f' + 2f = 0$ et $f(3) = -2$.

Exercice 5

1) Résous l'équation différentielle (E) : $2f' + f = 0$.
2) Détermine la solution particulière g dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (2 ; 1).

Exercice 6

1) Résous l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f de l'équation (E) qui s'annule en 0.

Exercice 7

1) Résous l'équation différentielle (E) : $4y' - 3y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f de l'équation (E) qui prend la valeur 1 en -4.

Equations différentielles d'ordre 1 avec second membre

Exercice 8

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

1) $y' = x^2 + x - 2$; 2) $y' = \cos 3x$; 3) $y'\sqrt{x} = 1$; 4) $y' = x + \sin x$; 5) $(x^2 + 1)y' = x$; 6) $xy' = 1$.
7) $x^3y' + x^2 + 1 = 0$; 8) $y' = 2$; 9) $y' = 1 + \tan^2 x$; 10) $y'\sin x - \cos x = 0$; 11) $y' = 3x$.

Exercice 9

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = x^2 + 1$.

1) Détermine une fonction polynôme g de degré deux solution de (E).
2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation $(E') : y' + 2y = 0$.
   a) Résous l'équation (E').
   b) Donne les solutions de l'équation (E).

Exercice 10

Soit l'équation différentielle $(E) : f' + 2f = 5\cos x$.

1) Résous l'équation différentielle $(F) : f' + 2f = 0$.

2) Détermine les nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a\cos x + b\sin x$ est une solution de (E).

3) Démontre qu'une fonction h est une solution de (E) si et seulement si $h - g$ est une solution de (F).

4) En déduis les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 11

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$.

1) Résous l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$.

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

   a) Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   b) Montre que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de l'équation (1).

   c) En déduis l'ensemble des solutions de l'équation (1).

3) Détermine la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 12

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x + 1 - e^{-2x}$.

1) Vérifie que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x - (x + 3)e^{-2x}$ est solution de (E).

2) a) Montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

   b) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).

3) Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

Equations différentielles d'ordre 2 sans second membre

Exercice 13

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$a)\ f'' - 3f' - 10f = 0$; $b)\ f'' + 2f' + f = 0$; $c)\ f'' + f' + f = 0$; $d)\ 2f'' + 3f' - 2f = 0$
$e)\ f'' - f' - 6f = 0$; $f)\ f'' - 4f' + 4f = 0$; $g)\ f'' + 9f = 0$; $h)\ f'' - f = 0$; $i)\ 4f'' = -f$
$j)\ 3f'' + 3f' - f = 0$; $k)\ f'' + 3f' = 0$; $l)\ 2f'' + f = 0$; $m)\ f'' - 2f = 0$; $n)\ 2f'' - 2\sqrt{2}f' + f = 0$.

Solution d'une équation différentielle d'ordre 2

Exercice 14

Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

1) $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$; $y'' + 2y' + y = 0$.

2) $f(x) = x\sin x$; $y'' + y = 2\cos x$.

3) $f(x) = e^{-x}.\sin x$; $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4) $f(x) = e^{-x}.\ln x$; $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

5) $f(x) = x - 2$; $4y'' + 4y' + y = x + 2$.

Exercice 15

A// Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - y = 4xe^x$ et $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$.
Détermine les réels a, b et c tels que g soit une solution de (E).

B// On considère l'équation différentielle : (E) : $y'' - y' - 6y = 0$ et $h(x) = ax + b$
Détermine les réels a et b pour que h soit une solution de l'équation (E).

C// Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 + 5x$ et $g(x) = ax^2 + bx + c$.
Détermine les réels a, b et c tels que g soit une solution de (E).

Exercice 16

Dans chacun des cas suivant, détermine la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données.

1) $f'' + 2f' + f = 0$ avec $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$; 2) $2f'' + 3f' - 2f = 0$ avec $f(3) = 1$ et $f'(1) = 2$.

3) $f'' + 2f' + 3f = 0$ avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; 4) $f'' + 9f = 0$ avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$.
5) $f'' - 6f' + 9f = 0$ avec $f(-1) = 0$ et $f'(0) = -2$; 6) $f'' - f = 0$ avec $f(5) = 3$ et $f'(2) = 4$.

Exercice 17
1) Résous l'équation différentielle (E) : $4y'' - 4y' + y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative passe par le point $\Omega\ (2\,;1)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

Exercice 18
1) Résous l'équation différentielle : $4y'' + y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point I et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 19
1) Résous l'équation différentielle : $4y'' = -y$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point $\Omega\ (0\,;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 3$.

Exercice 20
1) Résous l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point $\Omega\ (0\,;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 21
1) Résous l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point $\Omega\ (\ln 2\,;0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4.

Equations différentielles d'ordre 2 avec second membre

Exercice 22
Résous chacune des équations différentielles suivantes :
1) $1 + 6x^2 + y'' = 0$; 2) $y'' = \cos 3x$; 3) $2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0$; 4) $y'' = (x+1)e^x$; 5) $y'' = 4x + 1$; 6) $y'' = 3$.

Exercice 23
Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
1) a) Vérifie que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}.\ln x$ est solution de (E).
b) Résous l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
2) a) Montre qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation différentielle (E').
b) En déduis les solutions de (E).

Exercice 24
On considère les équations différentielles (E) : $f'' + 4f = 3\cos x$ et (E') : $f'' + 4f = 0$.
1) Quelles sont les fonctions g solutions de (E') ?
2) Vérifie que la fonction cosinus est solution de (E).
3) g étant une solution de (E'), vérifie que toute fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) + \cos x$ est solution de (E).
4) Parmi les fonctions h définie à la question 3), détermine celle qui vérifie : $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 25
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 4xe^x$.
1) Détermine les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E).
2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de

l'équation différentielle (E') : $y'' - y = 0$.
3) Résous (E') et en déduire la solution générale de (E).
4) Détermine la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 26

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$.
1) Résous l'équation différentielle (E') : $y'' - y' - 6y = 0$.
2) Détermine les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$ soit solution de (E).
3) a) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation (E').
b) En déduis l'ensemble des solutions de (E).
4) Détermine la solution f de (E) telle que $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

Exercice 27

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$.
1) Détermine une fonction polynôme g de degré deux solution de (E).
2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation (E') : $y'' + 2y' + y = 0$.
a) Résous l'équation (E').
b) Donne les solutions de l'équation (E).

Exercices de perfectionnement

Exercice 28

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$
1) Détermine la solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x}g(x)$.
a) Calcule $g(0)$.
b) Calcule $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.
c) Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
d) En déduis l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

Exercice 29

Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de $1000°C$. La température θ est une fonction du temps t (en heures) qui vérifie l'équation différentielle (E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$.
1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$. Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y.
2) Résous (F) puis (E).
3) Le bloc, initialement à $40°C$ est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est de $160°C$ au bout d'une heure. En déduis l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
4) a) Calcule la température du bloc au temps $t = 3\ heures$.
b) Détermine le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera $500°C$.

Exercice 30

A l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60°C$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20°C$.
Au bout de 10 minutes, la température du corps est 50°C. Sa température à la date t exprimée en minutes, est solution de l'équation différentielle : $\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_1)$ où k est une constante réelle.
On pose : $\phi(t) = \theta(t) - \theta_1$.
1) a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par ϕ ?
b) Détermine $\phi(t)$.
c) En déduis $\theta(t)$ en fonction de k.
d) Détermine la constante k puis, en déduis l'expression définitive de $\theta(t)$.
2) a) Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-elle de moitié ?
b) Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ? On donne : $\ln 2 = 0,7$ et $\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,29$.

Exercice 31

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t (exprimé en heures), peut être considéré comme une fonction g à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée g' de cette fonction. On a constaté que $g'(t) = kg(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.
On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1) Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $g'(t) = kg(t)$ telle que $g(0) = \text{N}$.
2) Sachant qu'au bout de 2 heures le nombre de microbes a quadruplé, calcule en fonction de N le nombre de microbes au bout de 3 heures.
3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures.

Exercice 32

On note $Q(t)$ la quantité de carbone 14 présent à l'instant t dans un fragment d'os. On admet que Q vérifie, à tout instant t, $Q'(t) = -\lambda Q(t)$. (λ est appelé constante radioactive du carbone 14).

1) Soit Q_0 la quantité du carbone 14 à l'instant $t = 0$. Exprime $Q(t)$ en fonction de t et de Q_0.
2) On appelle période (ou demi-vie) d'un élément radioactif la durée T au bout de laquelle la moitié des atomes de cet élément se sont désintégrés. Sachant que $\lambda \approx 1{,}2444.10^{-4}$ et que t est évalué en années, détermine la période T du carbone 14.
3) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. A la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même, pris comme témoin. Calcule l'âge de ces fragments.

Exercice 33

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t (exprimé en heures), peut être considéré comme une fonction g à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée g' de cette fonction. On a constaté que $g'(t) = kg(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.
On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1) Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $g'(t) = kg(t)$ telle que $g(0) = \text{N}$.
2) Sachant qu'au bout de 2 heures le nombre de microbes a quadruplé, calcule en fonction de N le nombre de microbes au bout de 3 heures.
3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures.

Exercice 34

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.
En l'an 2000 l'effectif était à mille (1000).
L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f. Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000\,;\,+\infty[$ et est solution de l'équation différentielle : $(E_1) : y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$.

1) Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $[2000\,;\,+\infty[$ par : $h(t) = \frac{200}{t}$.

   Vérifie que h est une solution de (E_1).
2) Résous l'équation différentielle : $(E_2) : y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0$.
3) a) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_2).
   b) Déduis-en les solutions de (E_1).
   c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que : $\forall t \in [2000\,;\,+\infty[, f(t) = 999{,}9e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)} + \frac{200}{t}$.
   d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2020. (Donne le résultat arrondi à l'ordre 0).

SUITES NUMERIQUES

Calcul des termes d'une suite

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{U}_n = 3n + 1$.
1) Calcule $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1$ et U_2.
2) Exprime les termes $\mathrm{U}_{n+1}, \mathrm{U}_{n-2}$ et U_{2n-3} en fonction de n.

Exercice 2

Soit la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{V}_n = n^2 + 2n - 1$.
1) Calcule $\mathrm{V}_0, \mathrm{V}_1$ et V_2.
2) Exprime les termes $\mathrm{V}_{n+1}, \mathrm{V}_{n-1}$ et V_{2n} en fonction de n.

Exercice 3

Soit la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathrm{W}_0 = 2 \\ \mathrm{W}_{n+1} = 2\mathrm{W}_n - 1 \end{cases}$.
1) Calcule W_1 et W_2.
2) Détermine les termes $\mathrm{W}_{n-1}, \mathrm{U}_{n-2}$ et U_{2n}.

Exercice 4

Soit la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{2\mathrm{U}_n+3}{\mathrm{U}_n+4} \end{cases}$. Calcule $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ et U_3.

Exercice 5

Soit la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0 \\ \mathrm{U}_1 = 1 \\ \mathrm{U}_{n+2} = \frac{1}{3}\mathrm{U}_{n+1} + \frac{1}{3}\mathrm{U}_n \end{cases}$. Calcule $\mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$ et U_4.

Représentation graphique d'une suite

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ représente sur $(0\mathrm{I})$ à l'aide de la droite d'équation $y = x$ les 4 premiers termes de la suite (U_n).

$a)\ \begin{cases} \mathrm{U}_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} = -\mathrm{U}_n + 5 \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} \mathrm{U}_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{U}_n \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} = \dfrac{3}{5}\mathrm{U}_n + 1 \end{cases}$.

Raisonnement par récurrences

Exercice 7

Démontre par récurrence les propositions suivantes :

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 8

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 1 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \sqrt{2 + \mathrm{U}_n} \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n < 2$.

Exercice 9

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 4 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \frac{9}{6-\mathrm{U}_n} \end{cases}$. Démontre que la suite (U_n) est minorée par 3, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n > 3$.

Exercice 10

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+4}{U_n+3} \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$.

Exercice 11

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n-1}{U_n+3} \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq 0$.

Exercice 12

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n} \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < U_n < 2$.

Exercice 13

La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 \times 2^n - 1$.

Sens de variations d'une suite

Exercice 14

Etudie le sens de variation des suites suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 4 - 5n$; 2) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \dfrac{n}{n+2}$; 3) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$; 4) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = n^2 - 2n + 5$.

5) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = -n^2 + 2n + 4$; 6) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2^n - 4$; 7) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2n}$; 8) $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$.

Exercice 15

1) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n-4}{U_n-1} \end{cases}$. Etudie les sens de variation de (U_n) sachant que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 2$.

2) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n} \end{cases}$. Etudie les sens de variation de (U_n) sachant que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < U_n < 2$.

3) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3 + U_n} \end{cases}$. Etudie les sens de variation de (U_n) sachant que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 3$.

4) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = e \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \ln(1 + U_n) \end{cases}$. Etudie les sens de variation de (U_n).

Calcul de limite d'une suite et sa convergence

Exercice 16

Calcule la limite des suites suivantes et en déduis leurs convergences.

1) $U_n = 4 - 5n$; 2) $U_n = \dfrac{n}{n+2}$; 3) $U_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$; 4) $U_n = n^2 - 2n + 5$; 5) $U_n = 3n - 1$; 6) $U_n = 2^{n-1} - 1$.

7) $U_n = -n^2 + 2n + 4$; 8) $U_n = 2^n - 4$; 9) $U_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2n}$; 10) $U_n = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$; 11) $U_n = \dfrac{3n^2-2n+5}{n^2-1}$.

Suites arithmétiques

Exercice 17

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison -2.

1) Donne l'expression de U_n en fonction de n.

2) Calcule U_1, U_2, U_3 et U_{20}.

3) Calcule $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{20}$.

Exercice 18

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = U_n - 2$.

1) Calcule U_1 et U_2.

2) Montre que la suite (U_n) une suite arithmétique.
3) Exprime U_n en fonction de n.
4) Calcule $\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots + \mathrm{U}_n$.

Exercice 19
On considère (U_n) une suite arithmétique de raison r.
1) Calcule r et U_0 sachant que $\mathrm{U}_1 = 3$ et $\mathrm{U}_4 = 15$.
2) Calcule r et U_0 sachant que $\mathrm{S}_{2,4} = 15$ et $\mathrm{U}_6 = 20$.
3) Calcule r et S_{12} sachant que $\mathrm{U}_5 = 7$ et $\mathrm{U}_{12} = -8$.
4) Calcule n et r sachant que $\mathrm{U}_1 = -3, \mathrm{U}_n = 7$ et $\mathrm{S}_n = 12$.
5) Calcule U_0 et r sachant que $\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_3 = 9$ et $\mathrm{U}_1^2 + \mathrm{U}_2^2 + \mathrm{U}_3^2 = 35$.

Exercice 20
1) Détermine le réel x sachant que $x, 4$ et 6 sont en progression arithmétique.
2) Trouve 3 nombres consécutifs x, y et z d'une suite en progression arithmétique sachant : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x - 6y + z = 6 \end{cases}$

Suites géométrique

Exercice 21
Soit (V_n) la suite géométrique de premier terme $\mathrm{V}_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.
1) Donne l'expression de V_n en fonction de n.
2) Calcule $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ et V_{30}.
3) Calcule la somme $\mathrm{S} = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{V}_{30}$.

Exercice 22
Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\mathrm{U}_n = \int_n^{n+1} e^{-2x}dx$.
1) a) Montre que $\mathrm{U}_n = \frac{1}{2}e^{-2n}(1 - e^{-2})$ pour tout entier naturel n.
   b) Montre que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
2) Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots + \mathrm{U}_n$.
   a) Exprime S_n en fonction de n.
   b) Montre que la suite (S_n) converge et précise sa limite.

Exercice 23
On considère (V_n) une suite géométrique de raison q.
1) Calcule q et V_0 sachant que $\mathrm{V}_2 = 4$ et $\mathrm{V}_5 = 32$.
2) Calcule V_5 et S_5 sachant que$q = 3$ et $\mathrm{U}_1 = 2$.
3) Calcule q et S_5 sachant que $\mathrm{V}_1 = 162$ et $\mathrm{V}_5 = 32$.
4) Calcule n et q sachant que $\mathrm{V}_1 = 48, \mathrm{V}_n = 243$ et $\mathrm{S}_n = 633$.
5) Calcule V_1 et q sachant que $\mathrm{V}_3 + \mathrm{V}_4 = 160$ et $\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_3 = 64$.

Exercice 24
1) Détermine le réel y sachant que $4, y$ et 25 sont en progression géométrique.
2) Trouve 3 nombres consécutifs x, y et z d'une suite en progression géométrique sachant : $\begin{cases} x + y + z = 403 \\ z - x = 312 \end{cases}$.

Exercices de perfectionnement

Exercice 25
On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{16U_n - 12}{3U_n + 4}$.
1) Calcule U_1, U_2 et U_3.
2) On pose $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n - 2}$.
   a) Calcule V_0, V_1 et V_2.
   b) Montre que (V_n) est une suite arithmétique dont-on précisera la raison.
   c) Etudie le sens de variation de la suite (V_n).
3) a) Exprime V_n en fonction de n.

b) En déduis l'expression de U_n en fonction de n.
c) On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$. Exprime S_n en fonction de n.

Exercice 26

Soit la suite (U_n) définie dans $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} \mathrm{U}_1 = 2 \\ \mathrm{U}_{n+1} = 2\mathrm{U}_n - \frac{1}{3} \end{cases}$.

1) Détermine le réel a tel que la suite (V_n) définie par $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - a, \forall n \in \mathbb{N}^*$, soit une suite géométrique.
2) Exprime V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
3) Calcule $\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \cdots + \mathrm{U}_n$ en fonction de n.
4) Calcule la limite de la suite (U_n) et celle de la suite (S_n).

Exercice 27

On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 1 \\ \mathrm{U}_{n+1} = 2\mathrm{U}_n + 1 \end{cases}$ et $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n$.

1) Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Exprime, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.
3) Soit la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{V}_{n-1}$.
   a) Montre que pour tout entier naturel $n, \mathrm{S}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_0$.
   b) Calcule S_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

Exercice 28

Soit la suite (U_n) définie par $\mathrm{U}_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \geq 1, \mathrm{U}_{n+1} = \frac{3+\mathrm{U}_n}{2}$.

1) Calcule U_2 et U_3.
   (U_n) est-elle une suite arithmétique ? Est-elle une suite géométrique ?
2) Pour tout $n \geq 1$, on pose $\mathrm{V}_n = 3 - \mathrm{U}_n$. Montre que (V_n) est une suite géométrique.
3) Exprime V_n en fonction de n. En déduis U_n en fonction de n.
   Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{U}_n$.

Exercice 29

On considère la suite U définie par : $\mathrm{U}_0 = 2, \mathrm{U}_1 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \mathrm{U}_n = \frac{4\mathrm{U}_{n-1} - \mathrm{U}_{n-2}}{3}$ et la suite V définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1}$. $(\mathbf{1})$

1) a) Calcule V_1.
   b) Exprime V_n puis V_{n-1} en fonction de U_{n-1} et U_{n-2}.
   c) Montre que V est une suite géométrique et exprime V_n en fonction de n.
2) a) Calcule la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + \cdots + \mathrm{V}_n$ en fonction de n.
   b) En utilisant $(\mathbf{1})$, calcule S_n en fonction de U_n et U_0.
      En déduis l'expression de U_n en fonction de n.
   c) Montre que la suite U converge et précise sa limite.

Exercice 30

Soit la suite (U_n) définie dans $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} \mathrm{U}_1 = 3 \\ \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{U}_n + n \end{cases}$.

On considère la suite (V_n) définie par $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n$ $(\mathbf{1})$.

1) Exprime V_n en fonction de n et montre que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1$^{\text{er}}$ terme et la raison.
2) Calcule $\mathrm{S}_n = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + \cdots + \mathrm{V}_n$.
3) Utilise la relation **(1)** pour trouver une autre expression de S_n. En déduis U_n en fonction de n. Calcule la limite de U_n.

Exercice 31

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$. (v_n) est suite définie par : $v_n = \frac{u_n+1}{u_n}$.

1) Exprime v_{n+1} fonction de v_n.
2) Déduis-en la nature de la suite (v_n).
3) Exprime v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
4) On pose $\mathrm{S}_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

a) Exprime S_n en fonction de n.
b) Calcule la somme des 30 premiers termes de la suite (v_n).

Exercice 32

Soit (u_n) la suite définie par u_n= 0 et pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1) Calcule u_1 et u_2
2) a) Démontre que pour tout entier naturel non nul, $0 \leq u_n \leq 1$.
   b) Démontre que la suite est croissante.
   c) Que pouvez-vous en déduire ?
3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.
   a) Démontre que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Calcule, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   c) Démontre que la suite (u_n) est convergente et détermine sa limite.

Exercice 33

On considère la suite numérique U définie par : $\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1) Calcule U_2, U_3 et U_4. La suite U est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
2) a) Montre que pour tout entier naturel n différent de zéro, $1 < U_n < 2$.
   b) Démontre que la suite U est décroissante.
3) Soit V la suite numérique définie par : $V_n = \frac{U_n-1}{2-U_n}$, pour tout entier naturel n non nul.
   a) Montre que la suite V est bien définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   b) Montre que V est une suite géométrique.
   c) Exprime, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, V_n en fonction de n.
   d) Calcule, en fonction de n, la somme $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$.
   e) Détermine la limite de V_n et celle de S_n.

Exercice 34

Soit a un paramètre différent de $\frac{1}{3}$ et (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+7}{3U_n-1} \end{cases}$.

1) Détermine les nombres réels b et c tels que : Pour tout entier naturel $n, U_{n+1} = b + \frac{c}{3U_n-1}$.
2) Détermine les valeurs de a pour lesquelles (U_n) est une suite constante.
3) Dans la suite de l'exercice, on prendra $U_0 = 3$ et on considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{3U_n-7}{3(U_n+1)}$.
   Calcule V_0, V_1 et V_2.
4) a) Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Calcule V_n en fonction de n puis en déduis U_n en fonction de n.
5) a) Montre que (V_n) est une suite convergente et calcule sa limite.
   b) La suite (U_n) est-elle convergente ? Si oui, précise sa limite.

Exercice 35

On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$ et $v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$.

1) Calcule v_0.
2) Démontre que v_n est une suite géométrique de raison 2.
3) Exprime v_n en fonction de n.
4) Calcule la limite de v_n.
5) Exprime u_n en fonction de v_n puis en déduis la limite de u_n.
6) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$.
   a) Démontre que : $S_n = (1 - 2^n)\ln 2$.
   b) Justifie que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduis T_n en fonction de n.

Exercice 36
On considère la suite numérique $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathrm{U}_n = e^{2n-1}$.
1) a) Calcule $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$ et U_{n+1}.
b) Démontre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
c) Exprime en fonction de n la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots + \mathrm{U}_n$.
d) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{S}_n$.
e) Trouve la valeur minimale de n telle que $\mathrm{S}_n \geq 10$.
2) Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{V}_n = \ln(\mathrm{U}_n)$. On pose $\mathrm{T}_n = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{V}_n$.
Exprime le produit $\mathrm{P}_n = \mathrm{U}_0 \times \mathrm{U}_1 \times \ldots \times \mathrm{U}_n$ en fonction de T_n.

Exercice 37
Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an. En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année (2007+n). On a alors $r_0 = 40\,000$.
1) a) Calcule r_1 et r_2.
b) Justifie que pour tout entier naturel n, on a : $r_{n+1} = 0{,}95 r_n + 200$.
2) Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\mathrm{S}_n = r_n - 4\,000$.
a) Démontre que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Pout tout entier naturel n, exprime (S_n) en fonction de n. En déduis que, pour tout entier naturel n, on a :
$r_n = 36\,000 \times 0{,}95^n + 4\,000$.
c) La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifie.
d) Détermine la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.
e) Calcule une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011.

Exercice 38
En 2014, la foire gastronomique d'une commune a enregistré 6000 visiteurs. Une étude montre que chaque année, 80% des visiteurs de l'année précédente reviennent tandis que 2000 nouveaux visiteurs sont enregistrés.
On note U_0 le nombre de visiteurs en 2014 et U_n le nombre de visiteurs en $2014 + n$ $(n \in \mathbb{N})$.
1) Justifie qu'en 2015 le nombre de visiteurs U_1 est 6800.
2) Calcule le nombre de visiteurs en 2016.
3) On admet que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = 0{,}8\mathrm{U}_n + 2000$.
On pose, pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - 10000$.
a) Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme -4000.
b) Exprime, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.
c) Justifie que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n = 10000 - 4000(0{,}8)^n$.
4) a) Détermine le plus petit nombre entier naturel n pour lequel : $10000 - 4000(0{,}8)^n > 9000$.
b) Détermine l'année à partir de laquelle le nombre de visiteurs dépassera 9000.

Exercice 39
M. Yacouba signe, le 1er janvier 2015, un contrat de travail de 12 ans avec l'une des sociétés **A** et **B** qui lui font les offres suivantes :
La société **A** proposé un salaire annuel net de 1.200.000 F et une augmentation de 40.000 F par an à compter du 1er janvier de chaque année.
La société **B** propose également un salaire annuel net de 1.200.000 F mais avec une augmentation 3% de par an à compter du 1er janvier de chaque année.
On désigne par U_n le salaire annuel net proposé par la société **A** pour l'année $(2015 + n)$ et V_n le salaire net proposé par la société **B.** On note que $\mathrm{U}_0 = \mathrm{V}_0 = 1.200.000$ F.
1) Calcule $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{V}_1$ et V_2.
2) Montre que (U_n) est une suite arithmétique et (V_n) une suite géométrique. On précisera la raison de chacune d'elle.
3) On suppose que M. Yacouba a signé le contrat avec la société qui la meilleure proposition de salaire durant les 12 années de contrat. Trouve la société avec laquelle M. Yacouba a signé le contrat (La réponse doit être justifiée par des calculs).

Exercice 40

Une société engage un jeune manœuvre et lui propose deux types de rémunération à partir du 1er janvier 2020.

Premier type de rémunération : Pour cette première année 2020 il percevra 420000 FCFA puis une augmentation annuelle constante de 15000 FCFA. On note u_0 le salaire pour l'année 2020, u_1 le salaire pour l'année 2021, et d'une manière générale u_n le salaire en franc CFA pour l'année $2020 + n$. (n étant un entier naturel)

1) Calcule le salaire u_1 pour l'année 2021 et u_2 pour l'année 2022.
2) Exprime u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire la nature de la suite (u_n).
3) Montre que $u_n = 420000 + 15000n$.

Deuxième type de rémunération : Pour l'année 2020 il percevra 420000 FCFA mais ensuite chaque année une augmentation de 3% par rapport à l'année précédente. Dans ce cas, soit v_n le montant en franc CFA de la rémunération pour l'année $2020 + n$ (n étant un entier naturel).

1) Calcule le salaire annuel v_1 pour l'année 2021 et v_2 pour l'année 2022.
2) Montre que $v_{n+1} = 1{,}03v_n$ pour tout n. En déduis la nature de la suite (v_n).
3) En déduis l'expression de v_n en fonction de n.

Comparaison

1) Calcule dans chacun des deux cas le salaire annuel pour l'année 2035.
2) Pour cette année 2035, précise le type de contrat le plus avantageux.

Exercice 41

Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé.
La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries. On suppose que la population augmente de 6,5 % toutes les heures et que le biologiste rajoute 100 bactéries à la préparation toutes les heures.
On note R_n le nombre de bactéries présentes dans la population au bout de n heures.
On admettra que pour tout entier naturel n : $R_{n+1} = 100 + 1{,}065R_n$.
On introduit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = R_n + \frac{100000}{65}$.

1) Montre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2) Exprime (U_n) en fonction de n puis en déduis l'expression de R_n en fonction de n.
3) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera t – il égal à 90 % de la capacité maximale du milieu ?

Exercice 42

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année (2015+n).

1) a) Détermine le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.
   b) Exprime X_{n+1} en fonction de X_n.
2) On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$.
   a) Montre que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1er terme.
   b) Exprime U_n en fonction de n, en déduire X_n en fonction de n
   c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?
   d) Calcule la limite de la suite (X_n). Conclus.

Exercice 43

On ajoute une certaine dose d'un antibiotique à un bouillon de culture contenant des microbes sensibles à cet antibiotique. Un ordinateur compte et indique à chaque heure le nombre de microbes vivants dans le bouillon ; on s'aperçoit qu'à chaque heure, le nombre de microbes vivants est la moitié du nombre de microbes à l'heure précédente.

1) a) Sachant qu'à 6heures le bouillon contenait N microbes, Calcule le nombre de microbes vivants aux heures suivantes : 7h ; 8h ; 9h ; 10h.
   b) Montre que ces nombres sont en progression géométrique ; Calcule pour un entier positif n la somme S_n des n premiers termes de cette progression.
2) A 12heures, on ajoute au bouillon un produit qui annule l'effet de l'antibiotique.
   On constate alors que le nombre de microbes vivants dans le bouillon augmente de 25% par heure.
   Calcule le nombre de microbes vivants dans le bouillon à 14h si $N = 10^{10}$.

Exercice 44

Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

1) Ecris z_1, z_2 et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique.

2) Montre qu'il existe deux suites géométrique (U) et (V) telles que $\mathrm{U}_2 = \mathrm{V}_2 = z_1$ et $\mathrm{U}_4 = \mathrm{V}_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles.

Exercice 45

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne l'équation d'inconnue complexe z :

$(E) :\ z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0$.

1) Résous l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1.
   On désigne z_2 par la 3$^{\text{ème}}$ solution.
2) Ecris z_0 et z_1 sous forme trigonométrique.
3) Vérifie que z_0, z_1 et z_2 sont dans cet ordre les trois premiers termes consécutifs d'une suite géométrique complexe (U_n) dont on précisera la raison.
4) Ecris U_4 et U_7 sous forme trigonométrique.

Exercice 46

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique le centimètre.
On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
On note A et B les points d'affixes respectives 8 et $4+4i$.

1) On considère la similitude directe S de centre O telle que : $S(A) = B$.
   a) Justifie que la similitude directe S a pour écriture complexe : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.
   b) Détermine le rapport et l'angle de S.
2) On considère les points A_n tels que : $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$.
   On désigne par z_n l'affixe du point A_n.
   a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = 8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$.
   b) Démontre que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_{n+1}.
3) a) Place successivement les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.
   b) Justifie que l'aire a_1 en cm², du triangle OA_0A_1 est 16.
   c) Déduis du résultat précédent l'aire a, en cm^2, du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$.

Exercice 47

Partie A :

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(E) : 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

1) Détermine les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.
2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.
3) a) Développe, réduis et ordonne $(2z+1)\left[2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4\right] = 0$
   b) En déduis les solutions de (E).
4) Soit $z_0 = -\frac{1}{2}$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$
   Exprime chacun des nombres complexes z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ où unité est 1 cm.
On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.
S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1) a) Détermine l'écriture complexe de S.
   b) Justifie que $\mathrm{S}(\mathrm{M}_0) = \mathrm{M}_1$ et $\mathrm{S}(\mathrm{M}_1) = \mathrm{M}_2$.
2) soit M_n un point du plan d'affixe z_n. On pose pour tout nombre entier naturel n, $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{S}(\mathrm{M}_n)$.
   Justifie que $z_{n+1} = (1+i\sqrt{3})z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}.
3) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par $u_n = |z_n|$.
   a) Démontre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et premier terme.
   b) Justifie que la distance $\mathrm{OM}_{12} = 2048$.

Exercice 48

Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de 1er terme $\mathrm{U}_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.
Soit $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de 1er terme $\mathrm{V}_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.
Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1) a) Exprime U_n et V_n en fonction de n.
   b) Déduis-en z_n.
2) Démontre que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.
3) Soit le plan complexe (P) rapporté au repère orthogonal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n.
   a) Détermine la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}.
   b) Donne ses éléments caractéristiques.
4) Pour tout entier naturel $n, z_n = z_0 \times z_1 \times z_2 \times ... \times z_n$.
   a) Exprime en fonction de n un argument de z_n.
   b) Démontre que si n est impair alors z_n est réel.

Exercice 49

Partie A :
On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

1) a) Calcule $p(i)$.
   b) Détermine les nombres complexes a et b tels que $p(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.
2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$.
3) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $p(z) = 0$.

Partie B :
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$ où unité est 5 cm.
On pose $\begin{cases} z_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$ et on note A_n le point d'affixe de z_n.

1) a) Calcule z_1 et z_2.
   b) Place les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.
2) On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.
   b) Démontre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.
   c) Exprime U_n en fonction de n.
3) Détermine la nature exacte du triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$.
4) On désigne par $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ la longueur de la ligne brisée $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 ... \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$.
   a) Calcule ℓ_n.
   b) Etudie la convergence de la suite (ℓ_n).

Exercice 50

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(0, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
S est la similitude directe de centre 0, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. φ est l'application complexe associée à S.

1) Détermine l'expression de $\varphi(z)$ en fonction du nombre complexe z.
2) On pose $z_0 = 1 - i$ et $z_1 = \varphi(z_0)$.
   a) Ecris z_0 sous forme trigonométrique.
   b) Calcule le module r_1 de z_1 et détermine un argument θ_1 de z_1.
3) Pour tout nombre entier naturel n, on pose : $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ où θ_n désigne un argument de z_n et r_n son module.
   On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $z_0 = 1 - i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} z_n$.
   a) Précise la nature de cette suite et donne les éléments caractéristiques.
   b) Calcule z_n en fonction de n.
   c) Calcule r_n et θ_n en fonction de n.
   d) Précise la nature de chacune des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donne les éléments caractéristiques.

DENOMBREMENT ET PROBABILITE

Dénombrement

Exercice 1

Simplifie au maximum les expressions suivantes :

$A = \frac{21!}{18!}$; $B = \frac{7! \times 4!}{3! \times 5!}$; $C = \frac{n!}{(n-1)!}$; $D = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$

Exercice 2

Résous dans $\mathbb{N}$, les équations suivantes :

$a)\ C_n^2 = 5n$; $b)\ A_n^2 = n(2n+5)$; $c)\ A_n^2 = C_n^3$; $d)\ n^2 + 3C_n^2 = 1$; $e)\ 2C_n^2 + 6C_n^3 = 0$; $f)\ A_{n+1}^3 = n(n^2-1)$

$g)\ A_n^3 + A_n^2 = n^3 - 28$; $h)\ C_n^2 = 45$; $i)\ C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 475n.$

Exercice 3

Une urne contient 2 boules rouges, 3 noires et 1 blanche. On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne.

1) Détermine le nombre de tirages possibles.

2) Calcule les cardinaux des ensembles suivants :

A : « 2 boules rouges suivies d'une boules noire ».

B : « un tirage unicolore ».

C : « Le tirage ne contient pas de boules rouges ».

Exercice 4

Dans une classe de 20 élèves dont 12 garçons et 8 filles, on veut élire un comité comprenant : un président, un vice-président et un trésorier (pas de cumul de poste).

1) Détermine le nombre de comités qu'on peut former.

2) Calcule les cardinaux des ensembles suivants :

A « un comité comprenant que des filles ».

B « un comité comprenant des personnes de même sexe ».

C « un comité comprenant 2 filles et 1 garçon ».

D « le président est un garçon ».

E « un comité comprenant au moins une fille ».

F « un comité comprenant au plus une fille ».

Exercice 5

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 4 boules blanches .On tire simultanément 3 boules.

1) Détermine le nombre de tirages possibles.

2) Dénombre les cardinaux des ensembles suivants :

A « obtenir 2 boules rouges et une boules noire ».

B « obtenir un tirage unicolore ».

C « obtenir un tirage tricolore ».

Exercice 6

Une urne contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 1 boule noire. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1) Détermine le nombre de tirages possibles.

2) Détermine le nombre de tirages contenant des boules de même couleur.

3) Détermine le nombre de tirages contenant des boules de couleur différente.

4) Détermine le nombre de tirages ne contenant pas de boules blanches.

5) Détermine le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche.

6) Détermine le nombre de tirages contenant au plus une boule blanche.

Exercice 7

Dans une classe de 42 élèves, 25 pratiquent le football, 30 pratiquent le basket et 20 pratiquent les deux.

1) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football.

2) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket.

3) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent ni le football ni le basket.

Exercice 8
On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en prend simultanément 8, ce qui constitue une « main ».
1) Combien y a-t-il de mains différentes ?
2) Dénombre les mains qui contiennent :
   a) Exactement deux as.
   b) Aucun as.
   c) Au moins un as.
   d) Au plus deux as.
   e) Exactement deux cœurs et trois piques.
   f) Exactement deux cœurs, trois piques et un trèfle.

Equiprobabilité

Exercice 9
Dans une ville, il existe deux lycées, l'un des garçons et l'autre des filles, chaque lycée a une classe de SBT1, une de SBT2 et une de SBT3. Une bourse d'étude est offerte par la ville à six élèves pris parmi les élèves des six classes de terminales. Pour cela on choisit les six meilleurs élèves de chaque classe, soit un total de 36 élèves et les noms des six boursiers sont alors déterminés par tirages au sort parmi les 36 élèves.
Calcule la probabilité suivante :
1) Pour que les 6 boursiers soient les 6 élèves de la SBT2 garçons.
2) Pour que les 6 boursiers soient des élèves de la SBT2.
3) Pour que les 6 boursiers soient des filles.
4) Pour que les 6 boursiers soient 3 filles et 3 garçons.
5) Pour que parmi les 6 boursiers, il ait moins de 3 garçons.

Exercice 10
Pour célébrer leur succès au bac six élèves d'une classe de TSExp se donnent rendez-vous dans un restaurant de la ville.
Il y a six restaurants au total dans la ville et chaque élève choisit au hasard un restaurant.
1) Quelle est la probabilité pour que chacun des six élèves ait choisit un restaurant différent ?
2) Calcule la probabilité pour que les six élèves choisissent le même restaurant.

Exercice 11
Dans une classe de 65 élèves, 35 pratiquent du football, 40 pratiquent du basketball et 5 ne pratiquent aucun de ces deux sports.
1) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois le football et le basketball.
2) Détermine le nombre d'élèves qui jouent :
   a) uniquement au football.
   b) uniquement au basketball.
3) Dans cette classe on choisit au hasard 3 élèves pour représenter la classe à une compétition interclasse.
   a) Quelle est la probabilité pour que les trois élèves pratiquent à la fois le football et le basketball ?
   b) Quelle est la probabilité pour que parmi les trois élèves: 1 pratique uniquement le football, 1 pratique uniquement le basketball et 1 pratique à la fois le football et le basketball ?

Exercice 12
On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance une fois le dé et on note le numéro de la face de dessus. On note Pi la probabilité de l'événement : « le résultat du lancer est i ».
1) sachant que l'on a $P_2 = P_1$; $P_3 = 3P_1$; $P_4 = 2P_1$; $P_5 = 2P_1$; $P_6 = 2P_3$, montre que $P_1 = \frac{1}{15}$ et en déduis P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.
2) Calcule la probabilité de l'événement : « obtenir un numéro pair ».
3) On lance cinq fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 fois un numéro pair ?

Exercice 13
Une urne contient 3 boules jaunes, 1 boule rouge et 2 boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. (*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles*)
1) Détermine le nombre de tirages possibles.
2) Calcule la probabilité d'avoir exactement trois boules de même couleur.
3) Calcule la probabilité d'avoir les trois couleurs en même temps.
4) Calcule la probabilité d'avoir au moins une boule verte.

Exercice 14

Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous forme de fractions.
Une urne contient 30 boules numérotées de 1 à 30 indiscernables au toucher.
1) Indique les numéros qui sont multiples de 3 et de 5.
2) On tire au hasard une boule de l'urne. Calcule :
   a) La probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 et de 5.
   b) La probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 ou de 5.
3) On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise.
   Calcule la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5.

Exercice 15

Un libraire propose 30 titres différents d'un même auteur : 5 de ces livres sont couverts de cuir et coûtent 9000 francs l'un ; 12 ont une couverture toilée et coûtent 6000 francs l'un ; les autres sont cartonnés et coûtent 3000 francs l'un. Un client vient acheter 3 livres de cet auteur sans préciser de livre particulier.
Le libraire prend au hasard 3 livres de sa collection.
Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
1) A « Le libraire choisit 3 livres couverts de cuir »
2) B « Le libraire choisit au moins un livre couvert de cuir »
3) C « Le libraire choisit 3 livres ayant la même couverture »
4) D « Le libraire choisit 3 livres pour un montant exact de 15000 francs »
5) E « Le libraire choisit 3 livres dont le coût n'excède pas 12 000 francs ».

Exercice 16

On prélève cinq œufs dans un lot de dix œufs dont quatre proviennent d'une poule et d'un coq de race F et six d'une poule et d'un coq de race G. Les œufs d'une race sont indiscernables des œufs de l'autre race.
1) Trouve le nombre de façons possibles de prélever cinq œufs parmi les dix.
2) Calcule la probabilité des évènements suivants :
   A : « Il y a un seul œuf de race F parmi les cinq œufs prélevés ».
   B : « Le prélèvement contient exactement trois œufs de race F ».

Exercice 17

Dans le cadre de la prévention des angines hivernales, une étude a été menée pour tester l'efficacité réelle d'un médicament constitué d'un cocktail de vitamines. Dans ce but, on a sélectionné un échantillon de 600 personnes réparties de manière aléatoire en trois groupes : 240 personnes dans le groupe A, 35% de l'échantillon dans le groupe B, et le reste dans le groupe C.
On a administré aux personnes du groupe A durant la période hivernale une dose journalière de ce médicament en le leur disant. On a administré aux personnes du groupe B un placebo (c'est-à-dire un comprimé neutre, ne contenant aucun élément médicinal actif), tout en leur disant qu'il s'agissait du médicament.
On a administré aux personnes du groupe C le médicament en leur disant qu'il s'agissait d'un placebo.
Les résultats de l'étude sont recensés sur 600 fiches individuelles.
- 28% des fiches signalent un traitement efficace. Parmi celles-ci 72 fiches correspondent à des personnes du groupe B.
- 75% des fiches correspondant aux personnes du groupe A ne signalent aucune amélioration significative.

1) Reproduis et complète le tableau suivant :

	Groupe A	Groupe B	Groupe C	Total
Nombre de fiches signalant un traitement efficace				
Nombre de fiches ne signalant aucune amélioration significative				
Total	**240**			**600**

2) a) On choisit une fiche au hasard parmi les 600.
   On considère les évènements suivants :
   E_1 : «Il s'agit d'une fiche du groupe A.»,
   E_2 : «Il s'agit d'une fiche signalant un traitement efficace.»,
   $E_3 = E_1 \cap E_2$
   $E_4 = E_1 \cup E_2$
   Calcule les probabilités de ces quatre évènements.
   b) On choisit au hasard une fiche du groupe B.
   On considère l'évènement E_5: «Il s'agit d'une fiche signalant un traitement efficace.».

Calcule la probabilité de l'évènement E_5. *Le résultat sera arrondi à 10^{-2}*.
3) Pour chacun des groupes, donner les fréquences en pourcentage des fiches signalant un traitement efficace.

Probabilité conditionnelle

Exercice 18

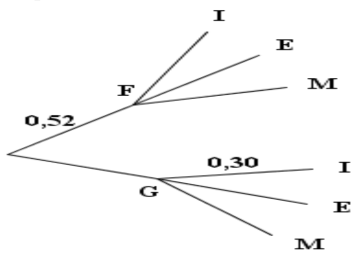
Une usine fabrique des ampoules électriques ; 75% sont conformes aux normes et 25% non conformes.
Un contrôle qui n'est pas infaillible accepte 10% des ampoules non conformes et rejette 4% des ampoules conformes.
1) Calcule la probabilité qu'une ampoule soit acceptée par le contrôle.
2) Sachant qu'une ampoule est acceptée, quelle est la probabilité qu'elle soit conforme aux normes ?

Exercice 19

Dans une population, 30% de personnes sont atteintes d'une affection des voies respiratoires supérieures.
Il y a 60% de fumeurs parmi les malades et 10% de fumeurs parmi les personnes non atteintes par cette affection.
Calcule la probabilité qu'un fumeur soit atteint de l'affection.

Exercice 20

Dans une liste des candidats devant passer le baccalauréat, on compte 52 % de filles. Les filles se répartissent de la manière suivante : 20 % sont dans le domaine des Sciences et Mathématiques (SM), 45 % dans le domaine des Sciences Humaines (SH) et les autres dans le domaine des Langues et communication (LC). En ce qui concerne les candidats garçons, 30 % sont dans le domaine SM, 45 % dans le domaine SH et 25 % dans le domaine LC.
On choisit au hasard un nom dans la liste des candidats. On note :
F, l'évènement « le nom choisi est celui d'une fille » ;
G, l'évènement « le nom choisi est celui d'un garçon » ;
I, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine SM » ;
E, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine SH » ;
M, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine LC ».
1) On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.
   a) Montre que la probabilité de l'évènement I est égale à 0,248.
   b) Recopie et complète l'arbre de probabilité donné ci - contre.
   c) Les évènements F et I sont-ils indépendants ?
2) Détermine $P_I(F)$, la probabilité de l'évènement F sachant I.
3) Montre que les évènements F et E sont indépendants.



Exercice 21

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.
1) Démontre que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$.
2) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?
3) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 22

Une maladie atteint 3% d'une population.
Un test de dépistage donne les résultats suivants :
- Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% de tests sont positifs et 99% négatifs.

On note M l'évènement : ≪ être malade ≫ et T l'évènement : ≪ le test est positif ≫
1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2) Donne la probabilité des évènements : ≪ $M \cap T$ ≫ et ≪ $\overline{M} \cap \overline{T}$ ≫.

3) Détermine $P(T)$ et $P(\overline{T})$.
4) a) Calcule la probabilité de ne pas être malade, sachant que le test est positif.
b) Calcule la probabilité d'être malade, sachant que le test est négatif.

Exercice 23

Les résultats d'une étude présentés par l'Institut National de la statistique révèlent :
- 45% de la population active sont des hommes.
- 25% des femmes et 20% des hommes de cette population active sont au chômage.

On interroge au hasard une personne.
1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2) Détermine les probabilités des évènements suivants :
a) H : ≪ être un homme ≫.
b) F : ≪ être une femme ≫.
c) ≪ être au chômage sachant qu′on est homme femme ≫.
d) ≪ être au chômage sachant qu′on est femme ≫.
3) Calcule la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé au hasard soit au chômage.
4) Quelle est la probabilité que l'individu interrogé soit une femme sachant qu'il est au chômage.

Exercice 24

Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants.
Calcule la probabilité pour qu'il soit :
1) un homme atteint de paludisme.
2) une femme atteinte de paludisme.
3) Une personne atteinte de paludisme.
4) un homme non atteint de paludisme.
5) un homme sachant qu'il est atteint de paludisme.
6) une femme, sachant que cet individu est atteint de paludisme.

Variable aléatoire

Exercice 25

Mamadou a dans sa poche 6 pièces de monnaie : 2 pièces de 100 frs, 3 pièces de 50 frs et une pièce de 25 frs.
Pour régler un achat de 225 frs, il tire au hasard et simultanément 3 pièces de sa poche.
1) a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 225 frs ?
b) Quelle est la probabilité qu'il obtienne une somme suffisante ?
2) On désigne par $\boldsymbol{x}$ la variable aléatoire, associons à chaque tirage la somme obtenue en francs.
a) Quelles sont les valeurs prises par $\boldsymbol{x}$?
b) Détermine la loi de probabilité de $\boldsymbol{x}$ et son espérance mathématique.

Exercice 26

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.
1) Calcule la probabilité de chacune des évènements suivants :
a) Aucune boule rouge n'est tirée.
b) Une boule rouge et une seule est tirée.
c) Deux boules rouges et deux seulement sont tirées.
d) Une boule rouge au moins est tirée.
e) Deux boules blanches au plus sont tirées.
2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
a) Donne la loi de probabilité de X.
b) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X.
c) Calcule la probabilité de l'évènement : $1 \leq X \leq 2$.

Exercice 27

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles
Un test oral comporte 10 questions dont 6 d'Anglais et 4 d'Allemand. Les questions sont numérotées de 1 à 10 sur des bouts de papier identiques et déposées dans une boîte opaque. Un candidat tire simultanément 3 de ces questions.

1) Justifie que le nombre de tirages possibles est 120.
2) Détermine la probabilité de chacun des événements suivants :
   a) « Les trois questions tirées sont des questions d'Anglais ».
   b) « Des trois questions tirées, deux sont des questions d'Allemand ».
3) Pour chaque question d'Allemand tirée, un bonus de 3 points est accordé au candidat.
   Soit X la variable aléatoire réelle égale à la somme des bonus obtenus par un candidat.
   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
   c) Calcule l'espérance mathématique de X.
   d) Calcule la variance de X.

Exercice 28

Dans un bassin piscicole, Monsieur Diarra dispose pour la vente de :
- 5 machoirons à 500 F l'unité
- 9 carpes à 300 F l'unité
- 3 silures à 350 F l'unité

Madame Konaté veut lui acheter 2 poissons. Monsieur Diarra impose que les poissons soient pêchés au hasard dans le bassin et que la cliente emporte, sans discussion, le colis composé des deux poissons obtenus. Chaque poisson dans le bassin a la même chance d'être pêché. Soit X la variable aléatoire égale au montant à payer par Madame Konaté.
1) Justifie que les valeurs prises par X sont : 600 F ; 650 F ; 700 F ; 800 F ; 850 F ; 1000 F.
2) Détermine la loi de probabilité de X.
3) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 29

Une urne contient 3 boules jaunes, 1 boule rouge et 2 boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
On associe à ce tirage le jeu dont voici les règles :
- Une boule jaune tirée fait gagner 25 F
- Une boule verte tirée fait gagner 75 F
- Une boule rouge tirée fait perdre 100 F

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe le gain ou la perte réalisé.
1) Déterminer les différentes valeurs prises par X.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 30

Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont 10 sont rouges, 3 bleues et 2 vertes.
Le principe d'un jeu est le suivant : le joueur paye 50F au début de chaque jeu et ensuite il tire simultanément 2 boules de l'urne;
- Le tirage d'une boule rouge ne donne rien.
- Chaque boule bleue tirée rapporte 50F.
- Chaque boule verte tirée rapporte 250F.

Un joueur joue une fois, quelle est la probabilité pour ce joueur :
1) de ne ni gagner, ni perdre ? (gagner 0F)
2) de perdre 50F ?
3) de gagner 50F ?
4) de gagner 250F ?

NB: Le gain algébrique du joueur est la différence entre le montant obtenu à l'issue du jeu et celui payé au début du jeu.

Exercice 31

Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3 ($x \geq 2$).
On tire simultanément 2 jetons de l'urne. On suppose que le tirage est équiprobable et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne.
1) a) Exprime en fonction de x les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
2) a) Démontre que l'espérance mathématique $E(X) = \frac{6x^2+2x+20}{x^2+5x+6}$.
   b) Détermine la valeur de x pour que E(X) soit égale 5.

Schéma de Bernoulli

Exercice 32

Un lot de vaccin contre le méningite est efficace à 75%, c'est-à-dire sur 100 personnes vaccinées 75 seulement sont sures d'être protégés contre la maladie. On vaccine 20 personnes avec ce produit.
Quelle est la probabilité pour que :
1) Aucune des personnes ne soit protégée ?
2) La moitié des personnes est protégées ?
3) Les 20 personnes sont protégées ?

Exercice 33

On prend au hasard 3 ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses.
Calcule la probabilité pour que :
1) Aucune ampoule ne soit défectueuse.
2) Exactement une ampoule soit défectueuse.
3) Au moins une ampoule soit défectueuse.
4) Les trois ampoules sont défectueuses.

Exercice 34

A la suite de plusieurs campagne de vaccination réalisées dans un village du Kourou, les études ont révélé que la probabilité pour qu'un enfant de moins de 5 ans soit atteint de poliomyélite est de 0,05.
On choisit au hasard un enfant de moins de 5 ans de ce village.
1) Quelle est la probabilité pour que cet enfant ne soit pas atteint de poliomyélite ?
2) On a effectué un contrôle sur 8 enfants âgés de moins de 5 ans dans ce village.
   Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « aucun enfant n'est atteint de poliomyélite »
   B : « trois enfants sont atteints de poliomyélite »
   C : « au moins quatre enfants sont atteints de poliomyélite ».

Exercice 35

Cinq individus ont été témoins d'un meurtre. Parmi eux, on sait que 2 seulement sont menteurs mais on ignore lesquels.
On questionne 2 témoins au hasard sur le meurtre, de façon indépendante. Quelle est la probabilité d'obtenir :
1) Deux versions véridiques ?
2) Deux versions contradictoires ?
3) Deux versions fausses ?

Exercice 36

Un car se présente à une frontière, le chauffeur sait que parmi ses 50 passagers, 10 tentent de frauder.
Le douanier choisit au hasard 8 personnes pour le contrôle. Quelle est la probabilité pour que :
1) Les 8 personnes soient des fraudeurs ?
2) L'une au moins soit un fraudeur ?

Exercices de perfectionnement

Exercice 37

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de taux avec une probabilité de $0,8$. On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.
1) Calcule la probabilité d'avoir une baisse de taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2) Démontre que la probabilité d'avoir une baisse de taux de glycémie est $0,52$.
3) On soumet au test un individu pris au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de taux de glycémie ?
4) On contrôle 5 individus au hasard.
   a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé ?
   b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé ?
5) On contrôle n individus pris au hasard. (n est un nombre entier non nul).
   Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieure à $0,98$.

Exercice 38

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- Pour un jour donne, la probabilité qu'il ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7.
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4 ;

On désigne par A l'évènement ≪ il y a affluence de clients ≫ et B l'évènement ≪ Mariam réalise un bénéfice ».

1) On choisit un jour au hasard.
   a) Calcule la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
   b) Démontre que la probabilité p(B) de l'évènement B est 0,58.
   c) Mariam réalise un bénéfice. Calcule la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. (Le résultat d'ordre 2).
2) Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
   c) Calcule l'Esperance mathématique E(X) de X.
3) Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
   a) Justifie que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0{,}42)^n$.
   b) Détermine la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$.

Exercice 49

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA.
Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1) Calcule la probabilité de l'événement A : « tirer trois pièces de 500F ».
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
3) L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.
   Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

Exercice 40

Un éleveur a dans son enclos 3 moutons et 5 chèvres. Pour célébrer le retour de sa quatrième épouse de son pèlerinage, il décide d'abattre au hasard quatre de ses bêtes.

1) Soit X le nombre de moutons tués.
   a) Détermine la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.
   b) Calcule l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type de X.
2) On estime qu'un mouton donne environ 20 kg de viande et une chèvre 15 kg et qu'il faut au moins 65 kg de viande pour satisfaire les invités.
   On note A l'événement « on a tué au moins 2 moutons » et B l'événement « il y a assez de viande ».
   a) Calcule P(A) et P(B)
   b) Calcule P(B/A) ; A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 41

Dans une ville, 30% de la population ont un âge supérieur ou égal à 65 ans.
60% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 65 ans sont atteintes de la Covid-19.
0,1% des personnes de moins de 65 ans sont atteintes de la Covid-19.

1) On prend une personne au hasard et donne les évènements suivants :
   S « la personne a un âge supérieur ou égal à 65 ans ».
   C « la personne est atteinte de la Covid-19 ».
   a) Dresse un arbre pondéré qui représente la situation.
   b) Donne la probabilité $P_S(C)$ des personnes atteintes de la Covid-19 sachant qu'elles ont plus de 65 ans.
   c) Calcule la probabilité pour que la personne ait au moins 65 ans et soit atteinte de la Covid-19.
2) Justifie que la probabilité de l'évènement C est : 0,1807.
3) On prend au hasard n $(n > 1)$ personnes dans la ville et on note P_n la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19.
   a) Justifie que : $P_n = 1 - (8{,}8193)^n$.

b) Détermine le nombre minimal de personne pour que la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 dépasse 99,99%.

Exercice 42

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On dit qu'on obtient un « double » si les faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.
A chaque lancer, si le joueur fait un double, il gagne 500 F ; sinon il perd 100 F.
1) On lance les dés une fois. Calcule la probabilité de gagner 500 F.
2) On lance les dés trois fois de suite dans des conditions indépendantes.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur sur l'ensemble des trois lancers.
a) Détermine la loi de probabilité de X.
b) Détermine l'espérance mathématique de X et interprète le résultat.
3) On lance les dés n fois de suite dans des conditions indépendantes.
a) Calcule la probabilité p_n de faire au moins un double sur les n lancers.
b) Quelle est la valeur minimale de n pour que l'on ait : $p_n \geq 0{,}8$.

Exercice 43

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.
Ce test a donné les résultats suivants :
- 75% des bacheliers sont admis.
- 52% des non bacheliers sont admis.

Partie A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :
B l'évènement : « l'élève est bachelier »
T l'évènement : « l'élève est admis au test »
A l'évènement : « l'élève est bachelier et est admis au test ».
1) Précise chacune des probabilités suivantes :
a) La probabilité $P(B)$ de l'évènement B.
b) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé.
c) La probabilité $P_{\overline{B}}(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé.
2) Démontre que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,3.
3) Calcule la probabilité de l'évènement T
4) Déduis des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.
5) Démontre que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$.

Partie B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiant bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.
1) Démontre que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323.
2) Calcule l'espérance mathématique de X.

Exercice 44

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.
On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux évènements suivants :
A « On obtient des boules de deux couleurs »
B « On obtient au plus une blanche »
1) a) Calcule la probabilité de l'évènement :
« Toutes les boules tirées sont de la même couleur »
b) Calcule la probabilité de l'évènement :
« On obtient exactement une boule blanche »
c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B), p(A)$ et $p(B)$ sont : $p(A \cap B) = \frac{1}{2^n}$, $p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$.
2) Montre que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si : $2^{n-1} = n + 1$.
3) Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal 2 par : $\mathrm{U}_n = 2^{n-1} - (n + 1)$.
Calcule $\mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3, \mathrm{U}_4$.
Démontre que la suite (U_n) est strictement croissante.
4) En déduis la valeur de l'entier naturel n tel que les évènements A et B soient indépendants.

STATISTIQUE

Exercice 1

Le prix d'un article augmente régulièrement sur le marché depuis maintenant quinze ans. On observe les résultats suivants sur les huit dernières années :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix y_i en francs	1 650	1 725	1 740	1 750	1 825	1 850	1 950	1 960

1) Trace le nuage de points associé à cette série statistique dans un repère d'unités graphiques.
   1 cm pour une année sur l'axe des abscisses ;
   2 cm pour 100 F sur l'axe des ordonnées (graduer l'axe des ordonnées à partir de 1 600 F).

2) a) Détermine les coordonnées du point moyen G et le place dans le repère précédent.
   b) Détermine une équation de la droite d'ajustement de y en x de ce nuage de points par la méthode des moindres carrés : les coefficients de l'équation seront arrondis à l'unité.
   c) Trace cette droite d'ajustement dans le repère de la question 1).

3) On considère que cette droite permet un ajustement de la série statistique valable jusqu'en 2022.
   a) Estime, à l'aide du graphique, le prix moyen annuel de l'article en 2017.
   b) Le prix de l'article atteindra-t-il 2400 F avant 2022 ? Justifie ta réponse.

Exercice 2

Le tableau suivant donne les dépenses en millions de francs CFA des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à1999.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépenses y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1285	1427	1490

1) Dessine le nuage de points $M_i(x_i;\ y_i)$dans le plan muni d'un repère orthogonal avec pour unités graphiques, 1cm pour un rang en abscisse et 1cm pour 200 millions de francs en ordonnée.

2) Détermine un ajustement affine de la série par la méthode de MAYER.

3) En utilisant cet ajustement, effectue une prévision des dépenses pour l'année 2005.

Exercice 3

Dans cet exercice, le détail des calculs n'est pas exigé. On donnera les formules utilisées pour répondre aux questions. Les résultats seront donnés à 10^{-1} près. Le tableau ci-dessus donne le poids moyen y d'un enfant en fonction de son âge x.

x (années)	0	1	2	4	7	11	12
y (kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

1) Représente le nuage de points de cette série dans un repère orthogonal.
   (unité graphique : en abscisse 1cm pour 1année et en ordonnée 1 cm pour 2 kg)

2) Détermine les coordonnées du point moyen G et place G.

3) a) Détermine le coefficient de corrélation linéaire r.
   b) Interprète votre résultat.

4) Donne une équation de la droite de régression (D) de y en x. Trace (D).

5) a) Détermine graphiquement, à partir de quel âge le poids sera supérieur à 15 kg.
   b) Retrouve ce résultat par le calcul.

Exercice 4

Une société de fabrication de bijoux ouvre de nouveaux points de vente. Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaires mensuel en fonction du nombre de points de vente de Janvier 2013 en Juin 2013.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Nombre de points de vente (x_i)	10	12	14	17	18	19
Chiffre d'affaires en millions de francs (y_i)	29	32	35	37	39	44

1) Représente le nuage de points de cette série statistique double dans un repère orthonormé, en choisissant 1 cm pour deux (2) points de vente en abscisse et 1 cm pour trois (3) millions en ordonnée.

2) Calcule les coordonnées du point moyen du nuage de points obtenus

3) a) Justifier qu'une équation de la droite (D) d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer est : $y = \frac{4}{3}x + 16$.
   b) Vérifie que le point moyen G appartient à la droite (D).
   c) Représente graphiquement cette droite.

4) Détermine graphiquement le chiffre d'affaires de cette société si elle ouvre quatre nouveaux points de vente.
5) Détermine par le calcul, le chiffre d'affaires de cette société si elle ouvre quatre nouveaux points de vente
6) Détermine graphiquement, le nombre de points de vente nécessaire pour atteindre un chiffre d'affaires de 50 millions de francs.

Exercice 5

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit.
Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous :

Prix de vente en milliers de francs x_i	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	180	160	150	130	100	90	80	70

1) Représente graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse et 1cm pour 10 acheteurs en ordonnée.
2) Détermine les coordonnées du point G.
3) Détermine le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
4) Détermine une équation de la droite (D) de régression de y en x. Trace (D).
5) Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
6) En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis Détermine :
   a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F.
   b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

Exercice 6

Il a été relevé chez huit planteurs de coton, la superficie X (en ha) et la production Y (en tonnes).
Dans le tableau ci-dessous:

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16
y_i	10	15	12	20	22	30	32	35

1) Représente le nuage de points dans un repère orthogonal (O, I, J). Unités graphiques:
   En abscisse 1 cm pour 2 ha et en ordonnée 1 cm pour 2 tonnes. On prendra pour origine du repère le point (1; 8).
2) a) Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
   b) Détermine les variances de X et Y.
   c) Justifie que la covariance de X et de Y est égale à 39,5.
3) Justifie que l'on peut ajuster linéairement cette série statistique.
4) a) Détermine une équation de la droite de régression (D) de y en x.
   b) Trace cette droite dans le repère précédent.
5) Un neuvième planteur a exploité une superficie de 22 ha. Selon l'ajustement précédent, à combien peut-on estimer sa production ? NB : On arrondira les résultats à l'ordre 2.

Exercice 7

Trachypenaeus est le nom d'une espèce de crevette se développant dans les eaux chaudes de l'île de la Guadeloupe.
L'objectif de l'exercice est l'étude de la croissance en taille de cette espèce en fonction de l'âge des crevettes.
Sur un échantillonnage et sur une courte durée, les relevés ont donné les résultats suivants :

Âge t_i (en nombre de semaines)	1	2	3	4	5	6	7	8
Taille y_i (exprimée en millimètre)	10	18	25	33	40	41	50	53

1) Soit G le point moyen du nuage de points associé à ce tableau.
   On considère la droite D passant par G et de coefficient directeur 6,14. Détermine une équation de la droite D.
2) On considère que la fonction affine représentée par la droite D traduit l'évolution de la taille en fonction de l'âge des crevettes avec les unités considérées. Détermine selon ce modèle la taille d'une crevette de 12 semaines.
3) On estime que l'espérance de vie d'une crevette *Trachypenaeus* en haute mer est de 3 années.
   Calcule, avec le modèle retenu, la taille atteinte au bout de 3 ans.

Exercice 8

Une société fabrique et commercialise des produits cosmétiques. Les relevés, en millions de Francs CFA, des frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau suivant.

Frais publicitaires	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	60	66	69	75	81

Le directeur commercial veut investir d'avantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel atteigne 100 millions de Francs CFA. Informé du problème, sa fille, qui est une de tes camarades de classe, te sollicite pour trouver le montant des frais à investir dans la publicité afin d'atteindre 100 millions comme chiffres d'affaire. Fais une proposition argumentée.

Exercice 9

A la fin du premier trimestre, afin de les exhorter à bien travailler, le directeur du cours du soir la clef présente aux élèves de terminale les résultats des 6 derniers années au baccalauréat. Ces résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Années	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang X de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6
Nombre Y d'admis (y_i)	405	458	460	525	586	612

Le directeur note une hausse des résultats chaque année et souhaite que cette tendance se maintienne. De retour en classe, les élèves veulent savoir, dans le cas où la tendance se maintenait, quelle serait une estimation du nombre d'admis en 2019. En utilisant tes connaissances en statistique, détermine une estimation du nombre d'admis en 2019.

Exercice 10

Pour satisfaire sa clientèle, une banque de la place disposant de 28 caisses, se propose de réduire le temps moyen d'attente d'un client à une caisse. Pour cela, elle réalise une étude statistique sur le temps d'attente d'un client en fonction du nombre de caisses ouvertes. L'étude fournit les données suivantes :

Nombre de caisses ouvertes	4	5	6	7	8	9	11	12	13
Temps moyen d'attente d'un client	12,25	12	11,5	11,75	10	10	9	8,25	8

La banque se préoccupe de trouver le nombre de caisse à ouvrir pour que le temps moyen d'attente d'un client à une caisse soit de 3mn. Elle pense que l'estimation du nombre de caisses correspondantes pourrait se faire à l'aide d'une droite de régression.

Consigne :

En t'appuyant sur les informations ci-dessus, propose une solution à la question soulevée par la banque.

Exercice 11

Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau (en m^3) utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne le résultat suivant :

Nombre de jours écoulés (x_i)	1	3	5	8	10
Volume utilisé en (m^3) (y_i)	2,25	4,3	8	17,5	27

L'agriculteur vient te voir et te demande à combien peut-il estimer le volume d'eau utilisé le 20ème jour si la tendance s'est maintenant par la suite. Utilise tes connaissances de terminale D sur les statistiques pour répondre à la préoccupation de l'agriculteur.

Exercice 12

(On arrondira les résultats au millième près).

L'évolution du prix, en F CFA, du kilogramme d'une certaine variété de riz est donnée par le tableau suivant :

Années	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rangs de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix (y_i)	235	260	270	290	295	300	320	360

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
- Sur l'axe des abscisses, on choisira 2 cm pour 1 rang.
- Sur l'axe des ordonnées, on choisira 1 cm pour 10 F CFA.

On graduera l'axe des ordonnées à partir de 230.

1) a) Représente le nuage de points de cette série statistique double.
   b) Calcule les coordonnées du point moyen G puis place le point G dans le repère.
2) a) Démontre que le coefficient de corrélation linéaire est $r = 0{,}968$.
   b) Un ajustement affine peut-il être envisagé ? Pourquoi ?
   c) Démontre qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est (D): $y = 15{,}119x + 223{,}215$.
   d) Construis la droite (D).
3) Madame Soli et sa famille ont une consommation d'une tonne de cette variété de riz par an. Quel est le budget annuel alloué à l'achat de ce riz par Madame Soli pour l'année 2015 ?

Exercice 13

On a relevé (en tonne) la quantité de riz importé par une ville qui mène une politique d'autosuffisance en riz.
Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

Année (x_i)	2007	2008	2009	2010	2011
Quantité de riz (y_i)	81,5	79	76	74	70,5

On désigne par X le caractère « Année » et par Y le caractère « Quantité de riz importé ».
Les conditions du relevé ne changent pas à long terme.

1) a) Représente le nuage de points de la série statistique de caractère (X ; Y).
Echelles : 2 cm pour 1 an et 1 cm pour une tonne de riz.
b) Le nuage de points est-il justiciable d'un ajustement linéaire ?
2) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r entre X et Y sous forme d'un arrondi d'ordre 3.
Interprète graphiquement le résultat.
3) a) Trouve une équation de la droite (D) de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.
b) Trace la droite (D).
4) a) A combien peut-on estimer la quantité de riz importé en 2012 ?
b) Estime, par lecture graphique, la quantité de riz importé en 2012 ?
5) En quelle année la ville va cesser d'importer du riz ?

Exercice 14

Le tableau suivant indique pour chaque année, le nombre de milliers de mariages contractés dans les mairies de Côte d'Ivoire, x_i désigne le rang de l'année tandis que y_i désigne le nombre (en milliers) de mariages.

Années	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	395	374	p	334	312	q	266

Le nombre de milliers de mariages contractés en 2005 et en 2008 dans les archives de la direction générale des statistiques ont été égarées. Cependant, ces valeurs avaient permis par la méthode des moindres carrées d'obtenir la droite de régression de y en x dont l'équation réduite est la suivante : $(D) : y = -22x + 397$.

1) On suppose que la relation entre x en y traduire par la droite (D) reste encore valable pour les années à venir :
a) A combien peut-on estimer le nombre de mariage en Côte d'ivoire au cours de l'année 2020 ?
b) A partir de quelle année l'on assistera à deux fois moins de mariages qu'en 2009 ?
2) a) Calcule la moyenne $\overline{x}$ et la variance V(X) de x.
b) Vérifie que $\overline{y} = \frac{1681+p+q}{7}$.
c) Démontre $cov(x,y) = \frac{2q-p-823}{7}$.
3) Détermine les valeurs de p et de q.

Exercice 15

On considère la série statistique à double variable *X* et *Y* définie par le tableau ci-après :

X	-2	0	1	*a*	4
Y	-10	-8	*b*	0	12

1) Déterminer les réels *a* et *b* pour que le point moyen *G* du nuage statistique, ait pour coordonnées (1; -2).
2) Dans la suite, on prendra $a = 2$ et $b = -4$.
a) Représente graphiquement les points du nuage de cette série statistique.
b) Détermine l'équation de la droite de régression de *X* en *Y*.
c) Calcule le coefficient de corrélation linéaire entre *X* et *Y*, puis interprète le résultat.