Prof. : M. TEHUA
Tel. : 0546234613

LIMITES ET CONTINUITE

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de IR vers IR. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}+x-1$;

c) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}-x+3$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+2}$;

e) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$;

g) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$;

f) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}-x+3$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).
Démontre que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).

EXERCICE 3

Soit g et h deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + sinx$ et $h(x) = \sqrt{x^2-1}$
1) Justifie que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Justifie que h est continue sur $]-\infty;-1]$.

EXERCICE 4

Calcule les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$.

EXERCICE 5

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Mettre sous la forme a^{α} où α est un nombre rationnel, les nombres réels suivants : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$; $\frac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}}$; $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{a}$.
2. Justifie que : $\frac{4\times\sqrt[10]{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{256}}} = 2\sqrt{2}$.
3. Justifie que pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b}}\times\sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} = ab$.

EXERCICE 6

On considère la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$.

1. Calcule la limite de f en + ∞ puis interprète graphiquement le résultat.
2. Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en - ∞.
3. Etudie la position de (C_f) par rapport à (D).

EXERCICE 7

Partie A . g est la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Calcule les limites de g en -∞ et en +∞.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que l'équation $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.
4. Démontre que : $\forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B. f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule les limites de f en -1 et en +∞ puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontre que : $\forall\, x \in]-1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

d) Etudie la position de (C) par rapport à (T).

3. Trace (T) et (C).

SITUATION COMPLEXE

Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C. L'étude du phénomène thermique conduit à $f(t) = \frac{200}{t} + 10$ où $f(t)$ désigne la température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant t (t est exprimé en minutes).

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$). Ils n'arrivent pas à déterminer la température de l'objet après une très longue période de refroidissement.

En utilisant tes connaissances, détermine cette température.