Gpm Cluster Tle D

FICHE DES TRAVAUX DIRIGES&EVALUATION
CLASSE : TERMINALE D

- FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
- FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE
- PROBABILITE
- STATISTIQUE
- CALCUL INTEGRAL
- EQUATION DIFFERENTIELLE
- EVALUATION CRITERIEE ET DIAGNOSTIQUE
- EVALUATION SOMMATIVE

GRANDS PROFS DE MATHS

TRAVAUX DIRIGES : FONCTION LOGARITHMES NEPERIEN

$\underline{A - \ Propriétés\ Algébriques}$

$\underline{\textbf{Exercice 1}}$

1) $Exprimer\ en\ fonction\ de\ ln2\ et\ ln3$

$$a)\ ln(864)\ ;\quad b)\ ln(144) - ln(243)\ ;\ c)\ ln(12\sqrt{3}) +\ ln(\frac{4\sqrt{2}}{27})\ ;\ d)\ \frac{ln(648)}{ln(18\sqrt{2}}$$

2) $Simplifier\ au\ maximum\ chaque\ expression$

$$a)\ \ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})\ ;\ b)\ \frac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)};\quad c)\ \ln(e^2\sqrt{e}) +\ \ln(\frac{1}{e});\ d)\ [\ln(e^3)]^2$$

$\textbf{NB}$: $On\ rappelle\ que\ \ln e^n = n\ et\ e \simeq 2{,}72$

$\textbf{Exercice 2}$: $Répondre\ par\ vrai\ ou\ faux\ en\ justifiant\ la\ réponse$

$a)\ Pour\ tout\ réel\ x\ strictement\ positif, on\ a : \ln(x^2) +\ \ln(x) =\ ln[x(x+1)]$

$b)\ pour\ \ tout\ réel\ a\ et\ tout\ réel\ b, on\ a : ln(e^a + e^b) =\ a + b$

$c)\ pour\ tout\ réel\ x\ , on\ a : \frac{2^{2x}}{3^{x-1}}\ =\ 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^x$

$d)\ \ ln(e^3) + ln(e^2) = 5$

$e)\ )\ ln\big(\sqrt{2} + 1\big) + ln(\sqrt{2} - 1) = 0$

$B -\ Equations\ et\ inéquations$

$\textbf{Exercice 1}$: $\textbf{Résoudre dans } \mathbb{R} \textbf{ les equations et inéquations suivantes}$

$a)\ ln(5x+3)\ =\ ln(5-x)$

$b)\ ln(x+2) - ln(5-2x) = ln(x+\ 3)$

$c)\ ln\left(\frac{x+3}{2x+2}\right) >\ 1$

$d)\ ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x+3}\right) \geq\ \ ln\ (2x-1)$

$Rappel : Soit\ a\ et\ b\ deux\ réels\ strictement\ positifs$

- $lna = lnb\ \Leftrightarrow\ a = b\ \ ;\ \ lna > lnb\ \Leftrightarrow a > b$

$\textbf{Exercice 2}$: $Résoudre\ dans\ \mathbb{R}^2\ les\ systèmes\ ci-dessous$:

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ lnx + lny = ln6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} lnx + lny = 3 \\ \frac{lnx}{lny} = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = e^2 \\ \ln(x+y) = 1 + ln2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3^x - 2^{y+1} = 2 \\ 3^{x+1} - 5 \times 2^y = 11 \end{cases}$

$\underline{C - \ Dérivées}$

$\textbf{Exercice 1}$: Déterminer l'ensemble D des réels en lesquels la fonctions f est dérivable puis déterminer la dérivée f' de f.

$a)\ f(x) = \ ln(x^3+1)$
$b)\ f(x) = (x^2+2)\ ln(x^2+2)$
$c)\ f\ (x) = \ ln(\sqrt{x^2+1}-x)$
$d)\ f(x) = \ \frac{2+lnx}{1-lnx}$

Rappel : Soit U une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K. La fonction $f(x) = lnU(x)$ est dérivable sur K et on $a\ f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

***Exercice* 2** : Déterminer l'ensemble D des réels en lesquels la fonctions f est dérivable puis déterminer la dérivée f' de f.

$a)\ f(x) = \ \frac{1}{2^{x+1}}$
$b)\ f(x) = \ \frac{3^{x+2}}{2^{x+1}}$
$c)\ \ f(x) = \ -3x^{\frac{3}{4}}$

Rappel : Soit a un réel strictement positif $a^x = e^{xlna}$

D – PRIMITIVES

***Exercice* 1** : *Pour chacune des fonctions suivantes* :
$a)$ *Justifier que f admet des primitives sur I* ;
$b)$ *Déterminer toutes les primitives de f sur I* ;
$c)$ *Déterminer la primitives de f sur I qui prend la valeur* y_o *en* x_o .

1) $f(x) = \ \frac{x^3}{x^4+2};\ I = \ \mathbb{R};\ \ x_o\ = \ 0\ \ et\ y_o\ = ln(\sqrt{2})$
2) $f(x) = \ \frac{x}{x^2+2};\ I = \ \mathbb{R};\ \ x_o\ = \ 0\ \ et\ y_o\ = ln(e-1)$
3) $\ f(x) = \ \frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2}\ ;\ I =]2\ ;+\infty[\ \ x_o\ = \ 3\ \ et\ y_o\ = \ 0$
4) $f(x) = \ 5\sqrt[3]{x^2};\ I =]0\ ;+\infty[\ \ ;\ \ x_o\ = \ 1\ et\ y_o\ = 3$

Rappel :Soit U une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle K. La fonction $\frac{U'}{U}$ admet pour primitive ln$|U|$+k ou k est un nombre réel.

***Exercice* 2** : *Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse*

1) *La fonction F définie sur* $I\ =]\frac{(-1+\sqrt{5})}{2}\ ;+\infty[$ *par* $F(x) = \ ln(x^2+x-1)$ *est la primitive sur I de la fonction f définie par* $f(x)\ = \frac{(2x+1)}{(x^2+x-1)}$ *qui s'annule en* 1.

2) *La fonction F définie sur* $I\ =]-1\ ;+\infty[$ *par*
$F(x) = \ ln\left(\frac{x^3+1}{3}\right)$ *est la primitive sur I de la fonction f définie par*
$f\ (x)\ = \ \frac{x^2}{x^3+1}$.

3) *La fonction F définie sur* I =]1 ;+∞[*par* $F(x) = \ ln(x-1) - \frac{(2x-1)}{(x-1)^2}$
est la primitive sur I de la fonction f définie par $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x-1)^3}$.

4) *Les fonctions F et G définies sur* $I\ = \ [0\ ;+\infty[$ *par*
$F(x) = \ ln(2x+1) + \ln(x+4)\ et$

$G(x) = \ln(x^2 + \frac{9}{2}x + 2)$ *sont deux primitives sur I d'une même fonction f .*

E – LIMITES

Exercice 1 : *Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.*

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^{16}lnx)$=0

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln(x^2+1)}{x^2}$=0

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}ln(1+x^2)$=0

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-lnx+x^2)$= -∞

Exercice 2: Déterminer chacune des limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}ln\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{2}}{2}^+}ln\left(\frac{x^2+2}{2x^2-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(sinx+1)}{x}$=0

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$

Indication 4) On pourra poser $t = \frac{1}{x}$

rappel : - $\lim\limits_{x\to 0^+}(xlnx)$=0 ; - $\lim\limits_{x\to 0^+}(lnx)$=-∞ ; - $\lim\limits_{x\to +\infty}(lnx)$= +∞

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{lnx}{x}\right)$= 0

F – ETUDES DES FONCTIONS

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur]0 ; +∞[*par* $f(x) = \frac{1}{2}x + 2\frac{lnx}{x}$. *On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I ; J)*
du plan (unité graphique : 2cm)

1)*a) Etudier la limite de f en* $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ *est une asymptote à (C) en* $+\infty$ *et étudier la position de (C) par rapport à (D)*

2) *Etudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.*

3) *Etudier les variations de f sur* $\mathbb{R}$.

4) *Tracer la droite (D) et la courbe (C).*

Exercice 2 : *Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse*

Soit la fonction définie par $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ *et D son ensemble de définition.*

1) D=]0 ; +∞[

2) *f est dérivable sur D et pour tout x appartenant à D,* $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$

3) $Pour\ tout\ x\ appartenant$ à $D, f(x) < 0$

4) $ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$ $est\ l'unique\ solution\ de\ l'$équation $f(x) = -1.$

Exercice 3: Pour chaque question, une et une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer laquelle en justifiant votre choix.

1) $Soit\ f\ la\ fonction\ définie\ sur$ $]0\ ;\ +\infty[$ $par\ f(x)$=$\frac{\ln(1+x)}{x}$.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ =0 ;

b) $\lim_{x\to0} f(x) = \ln2$;

c) $Pour\ tout\ reel\ non\ nul, f(1) + f(2) = 1$

2) $Soit\ f\ la\ fonction\ définie\ sur$ $]0, +\infty[$ $par : f(x)$=$\frac{1+xlnx}{x}$

$a)\ La\ fonction\ g\ définie\ par\ g(x) = \frac{1+x}{x^2}\ est\ la\ fonction\ dérivée\ de\ f\ sur$ $]0, +\infty[$

$b)\ La\ fonction\ H\ définie\ par\ H(x)\ =\ (1 + x)lnx - x\ est$
$une\ primitive\ de\ la\ fonction\ f\ sur$ $]0, +\infty[$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ =0

3) $Soit\ f\ la\ fonction\ définie\ sur$ $]2\ ; +\infty[$ $par\ f(x) = x + 1$- $ln\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)$.

$On\ désigne\ par\ (C)\ sa\ courbe\ représentative\ dans\ un\ repère\ orthonormé\ du\ plan.$

$a)\ La\ droite\ (D)\ d'équation\ y = x + 1\ est\ une\ asymptote\ de\ la\ courbe\ (C)$

$b)\ La\ courbe\ (C)\ est\ en\ dessous\ de\ la\ droite\ (D)\ d'équation\ y = x + 1\ sur\ l'intervalle$ $]2\ ;\ +\infty[$.

$c)\ La\ droite\ d'équation\ x = 2\ est\ une\ asymptote\ de\ la\ courbe\ (C)$

4) $Soit\ f\ la\ fonction\ définie\ sur$ $]0\ ;\ +\infty[$ $par\ f(x)$ =$ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

$On\ désigne\ par\ (C)\ sa\ courbe\ représentative\ dans\ un\ repère\ orthonormé\ du\ plan.$

$a)$ $La\ droite\ (D)\ d'équation\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + ln3\ est\ tangente$ à (C)

$b)\ (C)\ admet\ une\ asymptote\ horizontale\ d'équation\ y = 2$

$c)\ (C)\ est\ au\ dessus\ de\ la\ droite\ d'équation\ y = 1\ sur\ l'intervalle$ $]\frac{1}{e-1}\ ;\ +\infty$

<u>PROBLEME :</u> (12pts)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{ln(1+e^x)}{e^x}$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) , les unités graphiques étant 1cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.(C) est la courbe de f dans ce repère.

<u>PARTIE A</u> : (5,5pts)

1) Calculer la dérivée f' de f sur ℝ. Montrer que, pour tout x réel, f'(x)est du signe de
$$g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - ln(1 + e^x). (1pt)$$
2) a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. (0,5pt)
   b) Calculer g'(x). (0,5pt)
   c) Déterminer le sens de variation de g et en déduire le signe de g. (1pt)
   d) En déduire le signe de f'(x). (0,25pt)

3) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (On pourra utiliser les résultats suivants) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+e^{x})}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1 \text{ (1pt)}$$

4) Dresser le tableau de variation de f. Construire (C). (1,25pt)

PARTIE B : (2,5pts)

1) a) Déterminer a et b des réels tels que, pour tout réel x, $\frac{1}{1+e^{x}}=\text{a}+\frac{be^{x}}{1+e^{x}}$. (0,5pt)

b) En déduire $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{x}}\, dx$. (0,5pt)

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$. (0,75pt)

b) En déduire en cm^2 l'aire de la portion du plan comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation x= 1 et la courbe (C). (0,75pt)

PARTIE C : (4pts)

On considère la fonction f_n définie par $f_n(\text{x})=x^n e^{x}$ et on pose $I_n=\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

1) Calculer I_0, puis I_1 par une intégration par parties. (1pt)

2) a) En utilisant une intégration par partie, montrer que I_{n+1} = e – (n+1) I_n (0,75pt)

b) En déduire la valeur de I_2 . (0,5pt)

c) Calculer J= $\int_0^1 (1+x+x^2)e^{x}\, dx$. (0,5pt)

3) a) Montrer que pour tout n ∈ ℕ, $I_n \geq 0$. (0,5pt)

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. (0,5pt)

c) Etudier la conversation de (I_n). (0,25pt)

Il faut toujours faire ce que l'on sait faire

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE 1 :

1- Résoudre dans R les équations suivant :

a) $e^{3x+2} = e$; b) $e^{2x} - 8 = 0$; c) $e^{2x} + e^{x} - 6 = 0$; d) $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$;
e) $e^{x} - 2e^{-x} + 1 = 0$

2- Résoudre dans R les inéquations suivants :

a) $e^{2x} + e^{x} - 6 \leq 0$; b) $e^{x} - 2e^{-x} + 1 > 0$; c) $e^{x} - e^{-x} > 0$

3- Résoudre les systèmes suivant :

a) $\begin{cases} xy = -15 \\ e^{x}e^{y} = e^{-2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2e^{x} - 3e^{y} + e^{z} = -4 \\ 3e^{x} - 2e^{y} - e^{z} = -1 \\ e^{x} + e^{y} + e^{z} = 3 \end{cases}$; c): $\begin{cases} 4e^{2x+1} - e^{-y} = 2 \\ -e^{2x+1} + 2e^{-y} = -3 \end{cases}$

EXERCICE 2 :

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$

1- Verifier que 1 et -1 sont les racines de $P(x)$

2- a- factoriser $P(x)$
b- résoudre dans R, l'équation $P(x) = 0$

3- en déduire la résolution dans de l'équation : $e^{3x} + 2e^{2x} - 16e^{x} - 2 + 15e^{-x} = 0$

EXERCICE 3 :

Déterminer $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f

1- $f(x) = (x^2 + 5x)e^{x}$; 2) $f(x) = e^{3x+2}$; 3) $f(x) = \frac{e^{x}}{e^{x}-x^2}$; 4) $f(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$; 5)$f(x) = ln(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1})$;
6) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; 7) $f(x) = e^{cos(x)}$

EXERCICE 4 :

Déterminer sur l'intervalle $]0; +\infty[$, une primitive de f

1) $f(x) = 3xe^{x^2}$; 2) $f(x) = sinx.e^{cosx}$; 3) $f(x) = e^{-2x} + e^{-x} + 1$; 4) $f(x) = \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$;
5) $f(x) = (x+1)e^{3x^2+6x+1}$; 6) $f(x) = \frac{e^{x}+2}{e^{x}+2x}$; 7) $f(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

EXERCICE 5 :

1- Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = 4x^2e^{2x}$
a- Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ vérifier $G'(x) = f(x)$
b- En déduire les primitives de f sur R

2- Même question avec $fx) = x^2e^{-x}$ et $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

3- Même question avec $f(x) = e^{-x}.sinx$ et $G(x) = (a.cosx + b.sinx)e^{-x}$

EXERCICE 6 :

Calculer les limites des fonctions suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - e^{x})$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x}-e}{x-1}$

EXERCICE 7 :

On considère la fonction polynôme définie par : $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

1- Résoudre l'équation $P(x) = 0$

2- En déduire dans R les solutions des équations et inéquations suivantes

a- (E_1): $(lnx)^3 - (lnx)^2 - 4lnx + 4 = 0$

b- (E_1): $e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$

c- (I_1) : $(lnx)^3 - (lnx)^2 - 4lnx + 4 > 0$

d- (I_2) : $e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 \leq 0$

PROBLEME 1 :

Le plan est muni d'un repère $(0, i, j)$. (C_f) representative de la fonction f deinie par $f(x) = (x + 1)(e^{-2x} + 1)$

1- Soit la fonction numérique g définie par $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$. Etudier les variations de $g(x)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

2- Montrer que tout réel x , $f'(x) = e^{-2x}g(x)$, en deduire ses variation puis dresser son tableau de variation

3- Démontrer la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à (C_f) et étudier les positions relative de (C_f)et (D)

4- Construire (C_f)et (D)

5- On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$

a- Justifier que h est une bijection de $]-\infty; 0[$ vers un intervalle que l'on précisera

b- Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque h^{-1} de h, puis tracer sa courbe représentative dans le même repère que (C_f)

6- On pose pour tout réel $\alpha \geq -1, I_\alpha = \int_{-1}^{\alpha}(x + 1)e^{-2x}dx$. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer I_α en fonction de α

7- Soit D_α le domaine du plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1 \ et\ \alpha$

a- Déduire de la question 6) l'aire notée A_α du domaine D_α

b- Déterminer la limite de A_α lorsque $\alpha\ \ tend\ vers + \infty$

PROBLEME 2 :

Le nombre d'habitants d'une région ayant un fort taux de natalité est donné par la fonction exponentielle : $f: t \to 12e^{0,05t}$ ou $f(t)$ est la population exprimé en millions d'habitants pour l'année $2000 + t$

1- A partir de quelle date la population aura-t-elle plus que triplé ?

2- Cette région ne peut pas nourrir plus de 20 $millions$ de personnes. Pendant combien d'année après 2000 la nourriture sera-t-elle suffisante ?

PROBLEME 3:

On considère les suites $(U_n)_{n \in N}$ et $(V_n)_{n \in N}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = (\frac{3}{2}U_n)^2 \end{cases}$ $et\ \ V_n = ln(\frac{3}{2}U_n)$

1- Calculer V_0

2- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2

3- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

4- Calculer la limite de V_n puis en déduire celle de U_n

5- Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}\ et\ \ T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$

a- Démontrer que : $S_n = (1 - 2^n)ln2$

b- Justifier que :$T_n = (\frac{2}{3})^n e^{S_n}$

6- Exprimer T_n en fonction de n

Chapitre : PROBABILITE

I-QUELQUES RAPPELS SUR L'ANALYSE COMBINATOIRE

Outils de dénombrement

a) *Quelques modes de tirages*

Soient n et p deux entiers naturels .

Le nombre disposition de p éléments dans n éléments se trouve en fonction du mode opératoire dans de nombreux problèmes de dénombrement .

Modèles de tirage et caractérisations			*Outils*	*Nombres de tirages*
Tirages successifs avec remise	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments ne sont pas distincts	p-uplet de E	n^p
Tirages successifs sans remise	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Arrangement de p élement de E	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)}$ $n \geq p$
Tirages simultanés	Les p éléments ne sont pas ordonnés	Les p éléments sont distincts	Combinaison de p éléments de E	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ $n \geq p$

b) Quelques formules

- $C_n^{n-p} = C_n^p$
- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ **(Formule du binôme de Newton)**
- $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$
- $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$
- $A_n^p = A_{n-1}^p + pA_{n-1}^{p-1}$
- Le nombre d'élément d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E et est noté $Card(E)$.
- Le nombre de parties d'un ensemble fini E à n éléments est 2^n, soit $2^{Card(E)}$ où $Card(E)$ est le cardinal de E. On écrit :Card(P (E))= $2^{Card(E)}$.
- Si E est un ensemble fini et non vide et A,B deux parties non vides de E , alors :
  - $Card(A \setminus B) = Card(A) - Card(A \cap B)$
  - $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
  - $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ (c'est-à-dire A et B sont disjoints).
  - $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$, $A \times B$ étant le produit cartésien de A par B.
  - On appelle anagramme d'un mot le nombre de mots ayant un sens ou pas dont on peut écrire avec les différentes lettres de ce mot. En considérant un mot ayant n

lettres dont chacune des lettre le constituant se répète $n_1, n_2, \ldots, n_k$ fois tel que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Le nombre d'anagramme de ce mot est : $\frac{n}{n_1\, n_2 \ldots n_k}$

Exercice d'application

Exercice 1

Pour avoir à son compte bancaire, Paul doit saisir un code de cinq chiffres. Répondre à chacune des questions suivantes dans les deux cas suivants : Un chiffre peut se répéter et tous les chiffres sont distincts.

a- Combien de codes peut-elle former ?
b- Combien de codes constituer uniquement de chiffres impairs peut-elle former ?
c- Combien de codes ne commençant pas par zéro peut-elle former ?
d- Combien de codes peut-elle former sachant que le premier chiffre est impair et le dernier est pair

Exercice 2

Une urne contient 12 boules dont 05 Noires et 07 blanches. On tire simultanément 04 boules de l'urne.
1) De combien de façons peut-on effectuer ce tirage ?
2) De combien de façons peut-on obtenir les boules de mêmes couleurs?
3) De combien de façons peut-on obtenir 02 boules rouges et 02 boules blanches ?
4) De combien de façons peut-on obtenir au moins une boule blanche ?

5) répondre aux mêmes questions dans des tirages successifs avec remise et successif sans remise

II-PROBABILITES

1- vocabulaire

- Une **expérience aléatoire** est une expérience au cours de laquelle on ne peut pas prévoir à priori et avec certitude le résultat à obtenir
- Chaque résultat possible est appelé **éventualité**
- L'**univers** est l'ensemble formé de tous les éventualités et est généralement noté Ω.
- Toute partie de l'univers Ω est appelé **évènement**
- **Un évènement élémentaire** est un évènement ayant une seule éventualité.
- **L'évènement impossible** noté ∅ est un évènement n'ayant aucune éventualité autrement dit non réalisable.
- **L'évènement certain** est l'évènement constitué de toute les éventualités.
- Pour tout évènement A, il existe un évènement $\bar{A}$ appelé évènement contraire de A qui est realisé lorsque A n'est pas réalisé.
- Soient A et B deux évènements
  - On note par $A \cap B$ (se lit A inter B) l'evenement constitué des éventualités qui sont à la fois dans A et B (intersection de A et B)
  - On note par $A \cup B$ (se lit A union B) l'évènement constitué des éventualités qui sont dans A ou B

  Remarque

Deux évènements A et B sonts incompatibles ou disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$ autrement dit lorsque l'evenement $A \cap B$ est l'évènement impossible.

<u>Exercice d'application</u>

on lance deux fois de suite un dé non truqué à six face numéroté de 1 à 6. On s'intéresse au numéro lu après chaque lancée sur la face supérieure

1- Cette expérience est-elle déterministe ou aléatoire ? justifie ta réponse.
2- Donne une éventualité et un évènement obtenu à l'issu de cette expérience.
3- Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience et le nombre total des éventualité.
4- a- Déterminer les évènement A et B constitué respectivement des lancés dont les deux numéros lus sont pairs et les deux numerus lus sont impaire
   b- Détermine $\bar{A}$ et $\bar{B}$

2- Définition et propretés

Définition

Soit Ω un univers et $p(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Une probabilité sur Ω est une application P de $p(\Omega)$ vers $[0,1]$ vérifiant :

- Pour tout $A \in p(\Omega), 0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités de ses évènements élémentaires.

Quelques propriétés

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
- Le triplet $(\Omega, p(\Omega), P)$ est appelé espace probabilisé .
- D'une manière générale, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tout $A, B \in p(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ (c'est-à-dire A et B sont incompatibles, ce qui veut dire que $p(A \cap B) = 0$).
- En situation d'équiprobabilité (C'est-à-dire lorsque chaque évènement élémentaire à la même chance d'être réalisée),on a : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.

<u>Exercice d'application</u>

Exercice 1

Dans l'exercice précèdent, calculer :

1- La probabilité d'avoir un évènement élémentaire.
2- La probabilité des évènements A et B.
3- La probabilité des évènements $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
4- Calculer les probabilités des évènements $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, A \cup B, \bar{A} \cup B$

Exercice 2

Une urne contient 10 boules : 2 bleues, 5 noires, 3 rouges. On effectue deux tirages successifs sans remise. On peut représenter cette situation par un arbre. Calculer les probabilités des événements :

a) B_1: « tirer une boule bleue au deuxième tirage » ;
b) B_2: « tirer une boule bleue au premier tirage » ;
c) N_1: « tirer une boule noire au premier tirage » ;
d) R_1: « tirer une boule rouge au premier tirage ».
e) Refaire ces questions dans le cas du tirage simultanée

Exercice 3

Une urne contient cinq jetons blancs numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et deux jetons noirs numérotés 1, 2. On tire un jeton au hasard. Calculer la probabilité :

a) qu'il soit noir et pair ;

b) qu'il soit noir sachant qu'il est pair ;

c) qu'il est pair sachant qu'il est noir.

2- Probabilité conditionnelle

1-Définition et propriétés

Définition :

Désignons par Ω l'univers, P une probabilité sur Ω, A et B deux évènements tels $B \neq \emptyset$.
La probabilité de A sachant B, notée $p_B(A)$ ou $p(A/B)$ est la probabilité de réalisation de l'évènement A tout en sachant que l'évènement B est réalisé.
Elle est définie par: $p_B(A) = p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Remarques :

- Deux évènements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- Si les évènements A et B sont indépendants alors $p_B(A) = p(A)$.

Propriété :

Si A est un évènement de probabilité non nulle, alors, pour tout évènement B,on a :

- $p(B) = P(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$.
- Si on a aussi $p(\bar{A}) \neq 0$, alors : $p(B) = p(A) \times p(B/A) + p(\bar{A}) \times p(B/\bar{A})$.

Remarque (Formule de probabilité totale)

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'évènements c'est-à-dire

- ✓ aucun A_i n'est impossible (i.e. $A_i \neq \emptyset$) ;
- ✓ Les A_i sont deux à deux incompatibles (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j; i,j \in [1;n] \cap \mathbb{N}$) ;
- ✓ La réunion des A_i est égale à l'univers Ω (i.e. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$).

. Alors, pour tout évènement A, on a :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap A_i)=\sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(A) \times p(A_i)$$

<u>Exercice d'application</u>

Exercice 1

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6% sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98% des lecteurs MP3 défectueux et 3% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement. On note :

-D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;

-R l'évènement « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. a) Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
b) On dit qu'il y a erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il y ait erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égal à 0,8942.

4. Calculer la probabilité que le lecteur MP3 ne soit pas défectueux sachant qu'il n'est pas rejeté.

Exercice 2

Dans une usine d'automobiles, trois chaînes « a », « b » et « c » fournissent respectivement 25%, 35% et 40% de la production de moteurs.
Certains de ces moteurs sont écartés comme défectueux, dans les proportions suivantes : 5% pour la chaîne « a », 4% pour la chaîne « b » et 1% pour la chaîne « c ». On prend un moteur au hasard et on définit les évènements suivants :

A : « Le moteur est issu de la chaîne « a » » ; B : « Le moteur est issu de la chaîne « b » » ; C : « Le moteur est issu de la chaîne « c » » ; D : « Le moteur est défectueux ». Les résultats sont donnés à 10^{-4} près.

1. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités et tracer un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer P(D).

3. Quelle est la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « a » sachant qu'il est défectueux ?

4. Calculer la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « c » sachant qu'il n'est pas défectueux ?

3-Variable aléatoire réelle, loi de probabilité et fonction de répartition

1-Variable aléatoire

Définition:

On appelle variable aléatoire réelle, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble des valeurs prises par X, noté $X(\Omega)$ s'appelle **univers image** de Ω par X.
On note : $\boldsymbol{X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}}$.

2-Loi de probabilité

Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle associée à une expérience aléatoire telle que $\boldsymbol{X(\Omega)} = \{\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}\}$, $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*)$.
Pour tout i,on note $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$,l'ensemble des antécédents de $x_i$par X. Les évènements $(X = x_i)$ sont appelés évènements élémentaires associés à la variable aléatoire X, chacun de ces évènements aune probabilité p_i (En effet, $p_i = p(X = x_i)$).
La donnée de $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ s'appelle la **loi de probabilité de la variable aléatoire X.**

Remarque : On peut représenter une loi de probabilité par tableau, comme celui-ci-dessous :

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_n}$
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	…	$\boldsymbol{p_n}$

3-Fonction de répartition

Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini Ω.
La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = p(X \leq x)$.

4- Espérance mathématique, variance et écart-type.

Définitions :

Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives
$p_1, p_2, \dots, p_n$.

- L' espérance mathématique de X est le réel noté $E(X)$ définie par :
  $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$.
- La variance de X est le réel positif noté $V(X)$ défini par :
  $V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$.
- L'écart-type de X ,noté $\sigma(X)$, est le réel positif défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque : On a **:** $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (***Formule de Köenig***)

III. La loi binomiale

Définitions :

- Une épreuve de Bernoulli est toute expérience aléatoire pouvant se mettre sous la forme d'une expérience aléatoire ayant unique deux éventualités : le succès de probabilité p et l' échec de probabilité $q = 1 - p$
- Un schéma de Bernoulli est une répétition de n $(n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$ épreuves de Bernoulli de façon indépendante.
- Dans le cas d'un schéma de Bernoulli, le nombre X de succès a pour loi de probabilité : $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, avec $0 \leq k \leq n$ et p la probabilité de chaque succès et n le nombre de répétition de l'épreuve de Bernoulli. Cette loi de probabilité est appelée **loi binomiale.** Et on dit que
  X suit la loi binomiale de parametre n et p

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de parametre n et p.
On définit :

- L'espérance mathématique par : $E(X) = np$;
- La variance : $Var(X) = np(1 - p)$.

Exercices d'application

Exercice 1

A- On lance deux dés non truqués et on relève la somme X des points marqués à chaque lancé.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. On vous propose le jeu suivant : Vous misez 1000 francs, puis vous lancez les dés. Si X>9, vous gagnez 500 francs.

Le jeu est-il équitable ? Sinon, vous est-il favorable ou défavorable ?

B- Dans une foire, on propose le jeu suivant.

Le joueur mise 200 francs sur l'un des numéros 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Puis on lance deux dés réguliers à six faces :

- si le numéro sort deux fois, le joueur remporte deux fois sa mise ;

- s'il sort une fois, le joueur récupère sa mise ;

- s'il ne sort pas, le joueur perd sa mise.

Quelle est l'espérance de gain net ?

Exercice 2

Un questionnaire à choix multiples consiste à répondre successivement à quatre questions indépendantes. Pour chaque question trois réponses sont proposées, dont une seule est correcte. Un candidat répond au hasard à chaque question.

1. On appelle X la variable aléatoire qui désigne le nombre de bonnes réponses.

Etudier X (loi de probabilité, espérance, écart-type).

2. On appelle Z le score du candidat, sachant que chaque bonne réponse rapporte deux points et chaque mauvaise réponse enlève un point.

Etudier Z.

Bon à savoir.

Ajustement linéaire par la Méthode des Moindres Carrés

C'est une méthode qui consiste à déterminer la droite de régression de y en x ou de x en y.

- **Covariance d'un couple de caractère**

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux variables x et y, d'effectif total N.
La covariance de cette série est le nombre réel noté $cov(x,y)$ et défini par :
$\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{N}\sum n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$.

Le calcul facile de la covariance se fait à l'aide de la formule de König suivante :
$\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{N}\sum n_{ij}\, x_i y_j - \bar{x}\ \bar{y}$.

⚠ Si les n_{ij} sont tous égaux à 1, alors on a : $\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{N}\sum x_i y_j - \bar{x}\ \bar{y}$

- **Droites de régression de y en x et de x en y**

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux variables x et y, d'effectif total N et de moyennes respectives $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

La droite de régression de y en x est la droite passant par le point moyen $G(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage associé à cette série et dont une équation est de la forme $y = ax + b$ avec $a = \frac{cov(x,y)}{V_x}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ où V_x désigne la variance de x.

Une équation de cette droite peut aussi s'écrire : $y - \bar{y} = \frac{Cov(x,y)}{V_x}(x - \bar{x})$.

La droite de régression de x en y est la droite passant par le point moyen $G(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage associé à cette série et dont une équation est de la forme $x = ay + b$ avec $a = \frac{cov(x,y)}{V_y}$ et $b = \bar{x} - a\bar{y}$

Une équation de cette droite peut aussi s'écrire : $x - \bar{x} = \frac{Cov(x,y)}{V_y}(y - \bar{y})$.

- **Corrélation linéaire**

*On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (x,y), le nombre réel r défini par : $r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$ avec $\sigma_x = \sqrt{V_x}$ et $\sigma_y = \sqrt{V_y}$ les écarts types respectifs de x et de y .

* V_x et V_y les variances respectives de x et de y avec $V_x = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$ et $V_y = \frac{1}{N}\sum n_j y_j^2 - \bar{y}^2$. Si $n_i = 1$, alors $V_x = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$.

* $|r| \le 1$

* Si $|r| > 0,8$, on dit que la corrélation linéaire entre y et x est très forte .

* Si $|r| = 1$, alors la corrélation linéaire est dite parfaite.

une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse en km/h: X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

1) Répresenter le nuage de points.On prendra en abscisse $1cm$ pour $10km/h$ et en ordonnée $1cm$ pour $5m$.

NB : On commencera en abscisse les graduations à partir de $40km/h$ et en ordonnée à partir de $8m$

2) a) Calculer les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ de cette série double.

b) Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$.

c) Montrer que $cov(X,Y) \approx 522$.

d) En déduire une équation de regression de Y en X Par la méthode de moindres carrées.

3) Déterminer le coefficient de correlation lineaire r puis conclure.

4) a) On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à $150km/h$ entame un frainage à $85m$ d'un obstacle immobile. Percecutera-t-il l'obstacle ?

b) Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du frainage pour ne pas heurter l'obstacle ?

Exercice 2 Le tableau suivant donne l'évolution du taux horaire des enseignants dans un établissement privés.

Année	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Taux horaire en francs y_i	2 000	2 250	2 500	2 750	3 000

1) Calculer le pourcentage d'augmentation du taux horaire des enseignants dans cet établissement privé entre 2009 et 2013.
2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.
3) Monter que le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y est : $r = 1$ puis conclure.
4) En utilisant la méthode des moindre carrée, montrer que l'équation de la droite de régression de y en x est : $y = 250x + 1750$.
5) En quelle année le taux horaire des enseignants dans cet établissement sera de 4 750F ?

Exercice 3 Une étude sur l'éffectif X des familles d'une cité et la quantité Y de sucre en kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les resultats ci-dessous :

Y \ X	$[5;7]$	$[8;10]$	$[11;13]$	$[14;18]$
$[10;15]$	1	3	0	0
$[15;25]$	5	9	8	3
$[25;35]$	0	7	5	9

1) Calculer la moyenne et l'écart type des series marginales X et Y.

2) A chaque centre X_i de classe de la serie X, on associe la moyenne Z_i de Y.

a) Montrer qu'on obtient le série (X,Z) définie par le tableau suivant :

X_i	6	9	12	16
Z_i	18,75	22,5	23,85	27,5

Avec $X = X_i$ et $Z = Z_i$

b) Calculer le coefficient de correlation lineaire r entre les variables X et Z puis conclure.

c) Déterminer une équation de la droite de regression de Z en X Par la méthode de moindres carrées.

d) Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'éffectif égal à 20.

Exercice 4 63 candidats se sont présentés au baccalauréat comportant une epreuve de Mathématique et une épreuve de science physique.

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné.

X \ Y	2	6	10	14	16	Totaux
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13
14	0	1	0	1	3	5
Totaux	7	16	22	12	6	63

On appelle $X = (X_i)$ la serie statistique des notes de sciences physiques et $Y = (Y_i)$ la série statistique des notes de mathématiques.

1) Déterminer pour chaque X_i la moyenne Z_i de Y.

2) On considère la série double (X_i, Z_i).

   a) Dans le plan rapporté à un repére orthonormé, construire le nuage de point $M(X_i, Z_i)$.

   b) Calculer le coéfficient de corrélation linéaire entre la série $X = (X_i)$ et $Z = (Z_i)$ puis conclure.

   c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de Z en X par la méthode des moindres carrés.

   d) Tracer cette droite.

Exercice 5 Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuels d'une grande entreprise ont donné en 2014 la nomenclature suivante,après une étude statistique ; les montants étant exprimés en dizaines de millions de francs CFA. On considère la série statistique suivante où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

x_i	40	50	α	80	90	120	β	150	180
y_i	165	172	182	180	190	194	183	188	193

1) a) sachant que la moyenne de x_i est 100 est leur écart type est $\frac{20}{3}\sqrt{46}$, calculer α et β.

   b) Construire le nuage de points (unité 1cm pour 100 dépenses en abscisse et 1cm pour 100 chiffres d'affaires en ordonnée)

2) On suppose que $\alpha = 60$ et $\beta = 130$.

   a) Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite (D) de regression de y en x puis représenter graphiquement (D).

   b) Calculer le coefficient de correlation linéaire. Que peut-on conclure ?

   c) Quelle est en deux mois le chriffre d'affaires si la depense bimensuelle est de 300 millions de francs CFA.

Exercice 6 Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des six naissances d'une journée, l'âge x de la mère (en année) et le poids y du nouveau née (en kilogramme). Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant.

Age de la mère : x_i	16	18	20	22	26	27
Poids du nouveau né : y_i	2,8	3,4	3,1	2,9	3,6	4

1) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage des points de cette série double.
2) A l'ide de la methode de Mayer, montrer que la droite d'ajustement linéaire de cette série double $(x_i; y_i)$ a pour équation réduite $y = \frac{2}{35}x + \frac{29}{14}$.
3) En supposant que la relation entre le poids du nouveau né et l'âge de la mère est générale, donner une estimation du poids d'un nouveau né d'une mère de 30 ans.

Exercice 7 Lors d'une épidémie, on a relevé, à intervalle de temps réguliers, le nombre de cas déclarés.

Numéro du relevé x_i	1	2	3	4
Nombre de cas declarés y_i	94	221	446	1050

1) Représenter le nuage de points associé à cette série. Un agustement affine peut-il être justifié ?
2) On pose $z_i = ln\,(y_i)$. Représenter les points de coordonnées $(x_i;\ z_i)$ dans un repère, sur un paper millimétré. (déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près des z_i).
3) On admet qu'un ajustement affine conduit, pour la série $(x_i;\ z_i)$ à : $y = 0,798x + 3,764$.
   a) Tracer cette droite sur le graphique de la question 2)
   b) Utiliser cet ajustement affine pour obtenir une formule donnant une approximation de y_i en fonction de x_i.
   c) Déduire de la question précèdente le nombre de cas prévisibles au $5^{\text{ème}}$ relevé.

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES SUR LE CALCUL INTEGRAL

CLASSE : Tle D

I/ Rappels de Cours

Définition et vocabulaire

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I. On appelle intégrale ou somme de a à b de la fonction f le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ tel que $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Vocabulaire :

- Le réel $[F(x)]_a^b$ se lit $F(x)$ pris entre a et b.
- Les réels a et b sont les bornes de l'intégrale.

Propriétés algébriques

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I. On a :

$\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$; $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$. (Linéarité de l'intégrale)

Propriétés de comparaison

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

- Si $a \leq b$ et si f est positive sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $a \leq b$ et si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que pour tout élément x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ (Inégalité de la moyenne)

On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$.

Techniques d'intégration

Intégration par parties : soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que les dérivées u' et v' sont continues sur I, a et b deux éléments de I.

On a : $\int_a^b u(x).v'(x)\, dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\, dx$.

Changement de variable affine: Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha x + \beta)\, dx$, on peut effectuer un changement de variable en posant $t = \alpha x + \beta$; on obtient alors : $\int_a^b f(\alpha x + \beta)\, dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(t)\, dt$

Calcul d'aire et calcul de volume

- Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$ du plan, on appelle **unité d'aire**, en abrégé **u.a**, l'aire du rectangle de dimensions OI et OJ. **1 u.a = OI × OJ**

- L'aire A (en unité d'aire) du domaine D délimité par la courbe (C_f) d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par : A= $\int_a^b f(x)\,dx$ si f est positive sur $[a, b]$ et A= $-\int_a^b f(x)\,dx$ si f est négative sur $[a, b]$.
- L'aire A (en unité d'aire) du domaine D délimité par les courbes (C_f) et (C_g) de deux fonctions f et g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par : A= $\int_a^b \mid f(x) - g(x) \mid dx$
- Dans un repère orthogonal $(O; I, J, K)$ de l'espace, on appelle **unité de volume**, en abrégé **u.v**, le volume du pavé droit de dimensions OI, OJ et OK. **1 u.v = OI × OJ × OK**
- Le volume V (en unité de volume) du solide Σ engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine D délimité par la courbe (C_f) d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donné par : V= $\int_a^b \pi\, [f(x)]^2\, dx$.

B/ Exercices d'application

Exercice 1

1. Calculer chacune des intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \sqrt{3x+1}dx$, $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tan^2x\, dx$,

   $K = \int_0^1 e^{1-2x}dx$ $L = \int_{-2}^0 \left(x + 1 + \frac{4}{x-1}\right) dx$, $M = \int_{-1}^1 \frac{1}{(3x+5)^3} dx$ et $N = \int_0^2 \mid 1 - x^2 \mid dx$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{8-x^2}{2} & si\ \ x < 2 \\ \frac{2}{x-1} & si\ \ x > 2 \end{cases}$.

   Calculer la valeur de $\int_0^3 f(x)dx$

Exercice 2

A l'aide d'un changement de variable affine, calculer chacune des intégrales suivantes :

$I = \int_{-1}^0 x^2\sqrt{1-x}dx$ et $J = \int_0^3 \frac{3x}{\sqrt{x+1}} dx$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = xe^{x^2}$, $I = [-1, 2]$

b) $f(x) = sinx$, $I = [0, \frac{\pi}{4}]$

Exercice 4

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :

   $I = \int_1^{-1} xe^{2x}\, dx$; $J = \int_1^e \frac{lnx}{x^2} dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\, ln(1 + cosx)dx$ et $L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{sin^2x} dx$

2. A l'aide d'une double intégration par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :

   $I = \int_1^e x(lnx)^2dx$, $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}cosxdx$ et $\int_0^1 x^2e^{2x}\, dx$

Exercice 5

On se propose de calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} dx$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$.

1) **Calcul de *I*.**
Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2}\,)$.
a) Calculer la dérivée première de la fonction$g$: $x \longmapsto \sqrt{x^2+2}$.
b) En déduire la dérivée première f' de f.
c) Calculer la valeur de I.

2) **Calcul de *J* et *K*.**
a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $J + 2I = K$.
b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
c) En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 6

On se propose de calculer les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin^2 x\, dx$.

1. Calculer I + J.

2. Montrer que $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\ \ dx$ et calculer la valeur de $I - J$ à l'aide de deux intégrations par parties

3. En déduire les valeurs de I et de J. Donner une interprétation géométrique de I.

Exercice 7

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinx\, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosx\, dx$.

1. Calculer I_0 et J_0.
2. On suppose maintenant que n est non nul.

   a) En intégrant par parties, montrer que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$.

   b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Exercice 8

1. On considère la suite (I_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ et $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.
2. Calculer $I_0 + I_1$ et I_1. En déduire la valeur de I_0.
3. Exprimer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n. En déduire la valeur de I_2 et I_3.
4. **a)** Comparer, pour $x \in [0;1]$, les nombres e^{nx} et $e^{(n+1)x}$.
   b) Sans calculer I_n, démontrer que (I_n) est croissante.
5. **a)** Montrer que, pour tout réel $x \in [0;1]$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.
   b) En déduire un encadrement de I_n.
6. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Exercice 9

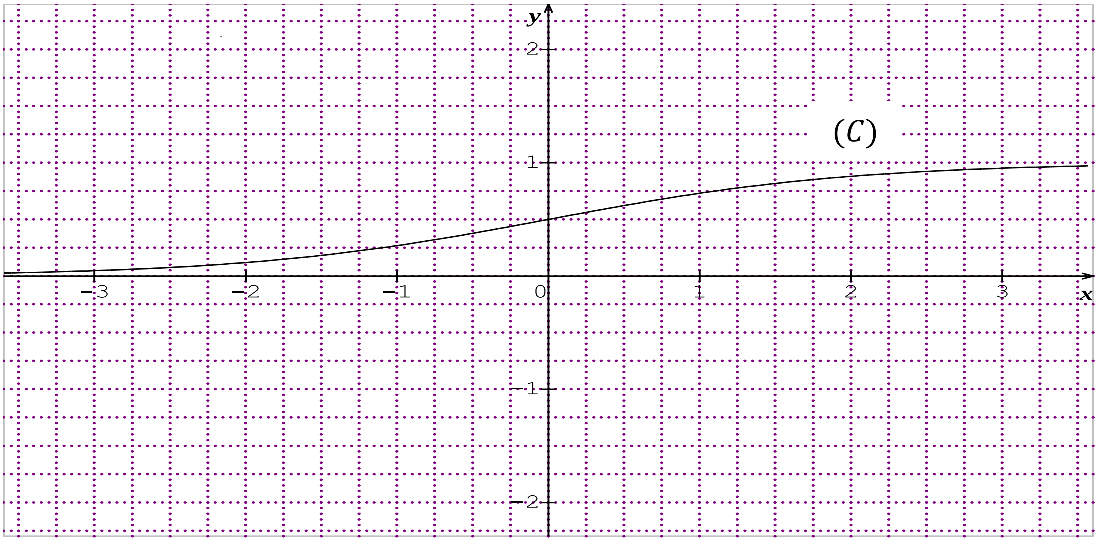
On définit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n t\, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel p, $I_p + I_{p+2} = \frac{1}{p+1}$. En déduire I_2 et I_3.
3. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
4. **a)** En utilisant les questions , prouver que pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

   b) Déterminer la limite de la suite (I_n)

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et dont la courbe représentative (C) est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.



1. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$. A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
   a) Calculer A_n.
   b) Etudier la limite éventuelle de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Soit λ un réel négatif. On note V(λ) le volume, exprimé en unité de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe (C) obtenue pour $\lambda \leq x \leq 0$.
   a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x : $\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{ae^x}{(e^x+1)} + \frac{be^x}{(e^x+1)^2}$.
   b) Exprimer V(λ) en fonction de λ.
   c) Etudier la limite éventuelle de V(λ) lorsque λ tend vers $-\infty$.

TRAVAUX DIRIGES : EQUATIONS DIFFERENTIELLES TERMINALE D

A) QUELQUES RAPPELS SUR LE COURS

1) Equations différentielles du type $\boldsymbol{y' - ay = 0}$ $\quad (\boldsymbol{a \in IR})$

Les équations du type $y' - ay = 0$ sont appelées équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant sans second membre. Les solutions de cette équation différentielle sont des fonctions f_k définies de $IR\ vers\ IR$ par $f_k(x) = ke^x$, $k \in IR$

2) EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : $\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}$, $\boldsymbol{a\ et\ b\ des\ nombres\ réels}$

Ces types d'équations différentielles sont appelées équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant et sans second membre.

Pour résoudre une telle équation, on résout d'abord dans C son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ et on utilise le tableau suivant:

$\Delta = b^2 - 4ac$	Solution de l'équation caractéristique	Solution de l'équation différentielle
$\Delta = 0$	Une solution double r_0	$x \to (Ax + B)e^{r_0 x}$, $\quad A, B \in IR$
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles $r_1\ et\ r_2$	$x \to Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, $\quad A, B \in IR$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta\ et\ \alpha - i\beta$	$x \to e^{\alpha x}(A\cos\beta\, x + B\sin\beta x)$ $A, B \in IR$

3) EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC SECOND MEMBRE

On appelle équation différentielle avec second membre, toute équation différentielle dont le second membre est une fonction non nulle.

B) EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : $\boldsymbol{y' - ay = 0}$ $\quad (\boldsymbol{a \in IR})$

EXERCICE 1 : Dans chacun des cas, résoudre dans IR les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 2y = 0$
2) $y' + 5y = 0$
3) $3y' + 2y = 0$
4) $y' - \sqrt{7}y = 0$
5) $y' = 0$

EXERCICE 2: Dans chacun des cas, résoudre dans IR les équations différentielles suivantes avec conditions initiales:

1) $y' - 2y = 0$ $\qquad y(0) = \frac{3}{4}$

2) $y' + \frac{1}{3}y = 0$ $y(2) = 3$

C) EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : $\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}$ $\boldsymbol{(a \text{ et } b \text{ des nombres réels})}$

EXERCICE : Dans chacun des cas, résoudre dans IR les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$
2) $y'' + 2y' = 0$
3) $y'' + y' - y = 0$
4) $5y'' - y' - 4y = 0$
5) $y'' - 4y = 0$
6) $y'' + 2y' + y = 0$
7) $y'' - 4y' + 4y = 0$
8) $y'' = 0$
9) $y'' - 2y' + 3y = 0$
10) $y'' - \sqrt{2}y' + y = 0$
11) $y'' + 4y = 0$

D) EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : $\boldsymbol{y'' = u(x)}$ ou $\boldsymbol{y' = v(x)}$ où $\boldsymbol{u \text{ et } v \text{ sont des fonctions continues sur un intervalle } I}$

EXERCICE : Dans chacun des cas, résoudre dans IR les équations différentielles suivantes avec conditions initiales:

3) $y'' = e^{2x}$ $y'(0) = -2 \; et \; y(0) = \frac{3}{4}$
4) $y' = 2x + 1$ $y'(0) = 1 \; et \; y(0) = 2$

E) EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC SECOND MEMBRE

EXERCICE 1: On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$.

1) Déterminer le réel a telle que la fonction f_0 définie par $f_0 = axe^{3x}$ est solution particulière de (E)
2) Résoudre l'équation différentielle (E'): $y'' - 7y' + 12y = 0$.
3) Montrer que la fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $g - f_0$ est solution de (E').
4) Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que $f(0) = -1$ et $f'(0) = -1$

EXERCICE 2 : On considère l'équation différentielle (E): $y' + 2y = e^{-2x}$

1) Vérifier que la fonction $g : x \to (x+1)e^{-2x}$ est solution de (E)

2) Montrer qu'une fonction $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de (E'): $y' + 2y = 0$

3) En déduire les solutions sur IR de l'équation (E)

<u>EXERCICE 3 </u>**:** On considère l'équation différentielle (E): $y' + 3y = 10\cos x$

1) Résoudre l'équation différentielle (E'): $y' + 3y = 0$
2) Déterminer les nombres réels $\alpha\ et\ \beta$ pour que la fonction $g: x \to \alpha\cos x + \beta\sin x$ soit solution de l'équation (E)
3) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E')
4) En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E)

<u>EXERCICE 4 </u>**:** On considère les équations différentielles suivantes:

(E_1) : $y'' + 2y' + y = 0$

(E_2) : $y'' + 2y' + y = x + 3$

1) Déterminer un polynôme u de degré un, solution de l'équation différentielle (E_2).

2) Montrer qu'une fonction g est solution de l'équation différentielle (E_2) si et seulement si $g - u$ est solution de (E_1).

3) Résoudre l'équation différentielle (E_1) puis en déduire les solutions générales de l'équation différentielle (E_2).

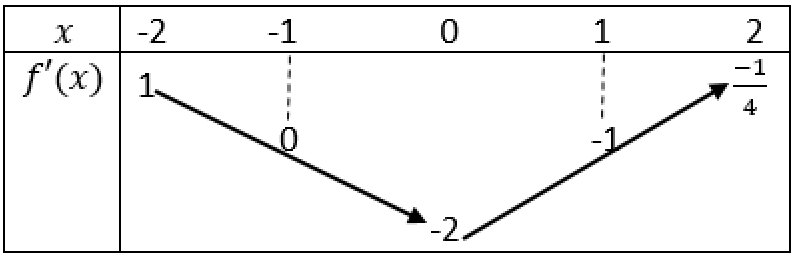
4) Déterminer la solution g de (E_2) telle que $g(0) = 1$ et l'équation de tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ admet pour coefficient directeur le réel 2.

EVALUATION DIAGNOSTIQUE : Terminale D&TI

Durée : 3 heures

Partie I : Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse (**5points**)

1) Si Z_A, Z_B et Z_A sont les affixes des points A, B et C tel que $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A} = -i$ alors le triangle ABC est : a) Isocèle b) Rectangle c) Rectangle isocèle.
2) L'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet sur $\mathbb{R}$: a) aucune solution b) une solution c) Deux solutions d) Trois solution.
3) Une primitive sur $]1;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{1-x}$ est :
a) $F(x) = \ln(1-x) + K$ b) $F(x) = \ln(x-1) + K$ c) $F(x) = |\ln(1-x) + K|, K \in \mathbb{R}$.
4) Le centre de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x-1}$ est le point : a) $A(1;-1)$ b) $A(-1;3)$ c) $A(1;7)$.
5) Le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^{2x}+e^x-4}{e^x+1}$ est : a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
6) La valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+3}dx$ est : a) $\ln\frac{e+3}{4}$ b) $\frac{e}{e+3} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{\ln(e+3)}{\ln 4}$
7) L'équation différentielle $y'' + 6y' + 10y = 0$ admet pour solution les fonctions f définies par : a) $f(x) = Ae^{3x} + Be^{-x}$ b) $f(x) = e^{-3x}(A\cos x + B\sin x)$ c) $f(x) = e^{-4x}(Ax + B)$
8) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est : a) $-\infty$ b) n'existe pas c) $+\infty$
9) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n^2+2}{n}$: a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ b) $u_n \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ c) (u_n) est majorée par 1.
10) Si f est une fonction dérivable sur $[-2;2]$ dont le tableau de variations de f' est le suivant : a) $f(-2) < f(-1)$ b) $f(-1) < f(0)$ c) $f(0) < f(1)$



Partie II : Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse. (**5points**)

1) Si une fonction est paire et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2) Si une fonction n'est pas définie en a alors nécessairement la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale.
3) Si une suite (u_n) prend un nombre fini de valeurs alors (u_n) est convergente.
4) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $(u_n + v_n)$ converge alors (u_n) et (v_n) convergent.
5) Soit f une fonction continue sur $[1;+\infty[$ telle que $f(1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, alors f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers $[2;3[$
6) Si deux primitives sur I d'une fonction f coïncident en un réel x_0 de I, alors elles sont égales.

7) $\int_{-1}^{1}|x|dx = 1$
8) $\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \ln x < x < e^{x}$
9) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ est paire.
10) Dans une expérience aléatoire, la probabilité d'un évènement A est égale à 0,2. On répète huit fois de façon indépendante cette expérience. La probabilité que l'évènement A se réalise au moins une fois est $1-(0{,}8)^{8}$

Partie III : (10 points)

1) a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires. **0,5pt**
   b) Enoncer l'inégalité des accroissement finis. **0,5pt**
2) Complète les phrases suivantes : **0,25ptx4**
   a) Une suite croissante et majorée est ………………………..
   b) Sis A, B, C et D sont 4 points d'affixes Z_A, Z_B, Z_C et Z_D tel que $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D} \in \mathbb{R}$, alors les droites (AB) et (CD) sont …………………
   c) Si une fonction est dérivable en un point d'abscisse x_0 alors sa courbe possède en ce point une tangente d'équation ………………………..
   d) Une fonction admet des primitives sur un intervalle I si et seulement si cette fonction est ………………… sur I
3) Linéariser $(\sin^2 x)(\cos^3 x)$ **1pt**
4) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
5) Soit P le polynome de $\mathbb{C}$ défini par $P(x) = z^3 + (6-3i)z^2 + (13-18i)z - 39i$.
   a) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution imaginaire z_0. **0,5pt**
   b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$. **0,5pt**
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **0,5pt**
6) Soit (U_n) la suite definie par $U_0 = a$ et $U_{n+1} = 2U_n - 3$. Démontrer par récurrence que : **0,5ptx3**
   a) Si $a = 3$, alors (U_n) est constante.
   b) Si $a > 3$, alors (U_n) est croissante.
   c) Si $a < 3$, alors (U_n) est décroissante.
7) Déterminer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ **1pt**
8) On considère la suite (U_n) definie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{3U_n+4}{U_n+3}$. On pose $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (V_n) est elle convergente ? **0,75pt**
   b) Exprimer U_n en fonction de n et en déduire que (U_n) est convergente. **0,75pt**
9) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessus : **0,5ptx3**

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,15	0,24	0,35	0,26

   a) Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.
   b) Déterminer les probabilités suivantes : $P(X \geq 2)$
   c) Déterminer l'espérance et l'écart-type, arrondi au millième, de la variable X.

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie.

Exercice 1 : 5 points

Le plan est muni d'un repère orthogonale (0,I,J). On donne les points A, B, C et D d'affixe respectives $a = -2; b = -3i, c = 2 - 6i$ et $d = 2 - 3i$.

1. a) Placer les points A, B, C et D dans le repère. **0,5pt**
   b) Démontrer que les points A, B et C sont alignés. **0,5pt**
   c) Calculer $\frac{d-b}{d-c}$ et en déduire que les points B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **1pt**
2. Soit S la similitude de centre D qui transforme B en C.
   a) Déterminer l'angle et le rapport de S. **0,75pt**
   b) Donner l'écriture complexe de S. **0,5pt**
   c) Construire le point E, image de C par S, puis déterminer son affixe e. **1pt**
3. Déterminer les nombres complexes α, β et γ pour que le polynôme $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ de degré 3 admettent a, b et c comme racines. **0,75pt**

Exercice 2 : 4 points

1. On se propose de calculer les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx$
   a) Calculer $I + J$. **0,5pt**
   b) Montrer que $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, cos \, 2x \, dx$ et en déduire à l'aide d'une intégration par partie la valeur de $I - J$. **1pt**
   c) En déduire les valeurs de I et J. **0,5pt**
2. On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $\begin{cases} U_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}$ et $V_n = ln\,(U_n) - 2$.
   a) Calculer U1 et V1. **0,5pt**
   b) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **0,5pt**
   c) Ecrire V_n puis V_n en fonction de n. **0,5pt**
   d) Etudier la convergence des suites (V_n) et(U_n). **0,5pt**

Exercice 3 : 3points

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer trois pièces de 500F ». **0,5pt**

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X. **1pt**
   b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X. **1pt**
3. L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie. Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ? **0,5pt**

Problème : 8 points

Partie A : 1,5point

Soit l'équation différentielle $(E) : -12y'' + 32y' - y = 0$. Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point A $(0 ; -1)$ et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses. **1pt**

Partie B : 4 points

1. Dresser le tableau de variations de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - e^{x}$. **1pt**
2. Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. ; unité 2cm.
   a) Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse ln 2. **0,5pt**
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat. **0,5pt**
3. a) Tracer (Γ). **1pt**
   b) Calculer l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 du domaine délimité par (Γ) , les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ $(\alpha < 0)$, $x = \ln 2$ et l'axe des abscisses. **0,5pt**
   c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat. **0,5pt**

Partie C : 2,5points

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Démontrer que h est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. **0,5pt**
2. Démontrer que h^{-1} est dérivable en 3 puis calculer $h^{-1}(3)$. **0,75pt**
3. Déterminer $h^{-1}(x)$ pour $x \in J$. **0,5pt**
4. Tracer (Γ') la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **0,75pt**