R.C.I * MENET-FP * DREN ABIDJAN 4 — COLLEGE EULALIE BLAH — C.I * MENET-FP* DREN ABIDJAN 4

DEVOIR DE NIVEAU

MATHÉMATIQUE

Coefficient : 4
Durée : 4 H
Niveau : Tle-D
M.KALLO

Cette épreuve comporte trois (3) pages numérotées 1/3 ,2/3 et 3/3

Seules les calculatrices non graphiques sont autorisées

EXERCICE 1 **(2points)**

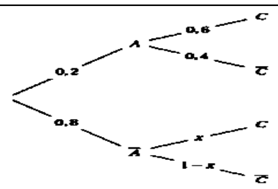
On donne les groupes de mots ou les expressions **(** $\boldsymbol{np}$ **;** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ **;** $\boldsymbol{np(1-p)}$ **;** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ **une bijection ; extremum relatif ; fonction dérivable)** et les phrases incomplètes dans le tableau ci-dessous

Nº	Phrases incomplètes
1.	Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle K définit....................de K de f(K).
2.	Soit une fonction f de courbe représentative (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J). Lorsqu'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et ....on dit que la courbe (C_f) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) .
3.	L'espérance mathématique de la variable aléatoire X suivant une loi binomiale B(n,p) est ....
4.	Toute ……………………..en un point a est continue en a

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque phrase incomplète suivi du groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que la phrase soit vraie.

EXERCICE 2 **(2points)**

Pour chaque énoncé du tableau ci -dessous, les informations des colonnes **A, B** et **C** permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.
Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

<table>
<tr><th>Nº</th><th>Affirmation incomplète</th><th colspan="2">Réponses</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1.</td><td rowspan="3">X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{1}{4}$ alors la variance de V(X) est égale à ....</td><td>A</td><td>1 , 25</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0,9375</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0, 968</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2.</td><td rowspan="3">Soient u et v deux fonctions telles que : $\lim\limits_{x\to2} u(x)=3$ et $\lim\limits_{x\to3} v(x)=-7$, alors :</td><td>A</td><td>$\lim\limits_{x\to2} v^o u(x)=-7$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\lim\limits_{x\to2} v^o u(x)=3$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$\lim\limits_{x\to3} v^o u(x)=-7$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.</td><td rowspan="3">On donne l'arbre de probabilité ci-contre, ainsi que la probabilité $P(C)=0{,}48$
La valeur de x est égale à ….

</td><td>A</td><td>0,36</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0,45</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4.</td><td rowspan="3">Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle k telle que :
$\forall x \in k, f'(x)>0$. f est une bijection de k vers $f(k)$.
$\forall a \in$ $(f^{-1})'(a)$ est égal …….</td><td>A</td><td>$\frac{1}{f'(a)}$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\frac{-1}{f^{-1}(a)}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$\frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$</td></tr>
</table>

EXERCICE 3 (3oints)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \ , \ si \ x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x} \ , \ x > 1 \end{cases}$

1- Étudie la dérivabilité de f en 1 .

2- On considère h la restriction de h à $[3 ; 5]$.

a) Justifie que : $\forall x \in [3 ; 5]$, $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq h'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que : $\forall x \in [3 ; 5]$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} - \sqrt{3} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

EXERCICE 4 (4 points)

L'ONG « MEMA » lutte contre la mauvaise utilisation de l'internet en milieu scolaire, fait remplir un questionnaire anonyme à chacun des élèves du COLLEGE EULALIE BLAH ..
Un quart des élèves de ce lycée est au second cycle et le reste au premier cycle.
Les résultats du questionnaire sont les suivants :

- 40% des élèves du second cycle utilisent rationnellement l'internet.
- 20% des élèves du premier cycle utilisent rationnellement l'internet.

On choisit un élève du collège et on donne des événements suivants :

- R l'événement « l'élève choisi utilise rationnellement l'internet »
- S l'événement « l'élève choisi est au second cycle »

1. a) Dresse un arbre pondéré qui présente la situation.

b) Donne la probabilité $P_S(R)$ l'élève utilise rationnellement l'internet sachant qu'il est au second cycle

c) Calcule la probabilité pour que l'élève est au second cycle et utilise rationnement l'internet

2. Justifie que la probabilité de l'événement R est : 0,25

3. Détermine la probabilité pour que l'élève choisi soit au premier cycle sachant qu'il utilise rationnellement l'internet.

4. L'ONG dispose de cinq clés internet qu'elle désire distribuer à cinq élèves tirés au sort et de façon indépendante.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves qui utilisent de façon rationnelle l'internet sur les cinq choisis .

a) Détermine la loi de probabilité de X.

b) Justifie que l'espérance mathématique de X est $\frac{5}{4}$. Interprète ce résultat.

c) Calcule la probabilité pour qu'au moins trois élèves sur les cinq choisis utilisent rationnellement l'interne

EXERCICE 5 **(5 points)**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(0; \mathrm{I}; \mathrm{J})$.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x^3 + x^2 - 9 \ , \ si \ \ x \leq 2 \\ f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 4} \ \ , \ \ x \geq 2 \end{cases}$

On note (C_f) sa représentative graphique .

1- Justifie que f est continue en 2.

2- a) Étudie la dérivabilité de f en 2 .

b) Précise les tangentes à (C_f) au points d'abscisse 2.

3- Soit g la restriction de f à $[2 \ ; \ +\infty \ [$

3-1. Étudie le sens de variations de g puis dresse ton tableau de variation

3-2. Démontre que g réalise une bijection de $[2 \ ; \ +\infty \ [$ sur un intervalle J à préciser .

3-3. Vérifie que : $g(2\sqrt{2}) = 5$

3-4. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g

Démontre que g^{-1} est dérivable en 5 puis calculer $(g^{-1})'(5 \ )$

4- Soit h restriction de f à $]-\infty \ ; \ 2 \ ]$ et (C_h) sa représentative graphique .

a) Calcule les 2 premières dérivées de h

b) Démontre que (C_h) admet un point d'inflexion dont tu préciseras les coordonnées .

EXERCICE 6 **(4 Points)**

A la veille des congés de noël, les élèves de terminale de ton établissement décident d'organiser une journée récréative.

A cette journée, ils veulent organiser des jeux dont l'un se présente sous la forme suivante :

Dans une urne se trouve dix jetons indiscernable au toucher dont 4 sont rouges, 2 sont verts, 3 sont blancs et 1 est noir.

Le jeu consistera à miser 200 F, puis à tirer au hasard un jeton de l'urne.

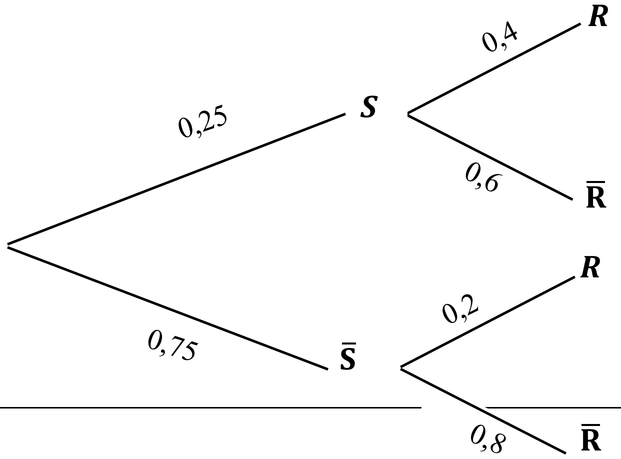
- Si le joueur tire un jeton vert, il gagne 1000F et une enveloppe contenant un montant inconnu S.
- Si le joueur tire un jeton blanc, il gagne une enveloppe contenant un montant inconnu S.
- Si le joueur tire un jeton rouge, il paie 1000F aux organisateur du jeu.
- Si le joueur tire un jeton noir, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage

- Si le nouveau jeton tiré est noir, il paie 300F aux organisateurs.
- Dans les autres cas, il gagne 200F

Le président du conseil scolaire veut déterminer la valeur de la somme S à mettre dans les enveloppes pour que le gain moyen du joueur soit 2500F.

Ne sachant pas comment déterminer ce montant, il te sollicite :

En utilisant des connaissances mathématiques, trouve une solution à la préoccupation du président du conseil scolaire

CORRIGE	BAREME
EXERCICE 1 **(2 points)**	
1. Bijection **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ **3.** np **4. fonction dérivable**	$4 \times 0,5\ pts$
EXERCICE 2 **(2 points)**	
1-B ; 2-A ; 3-C ; 4- C	$4 \times 0,5\ pts$
EXERCICE 3 **(3 points)**	
1- Etudions la dérivabilité de f en 1. • $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} x+1 = \mathbf{2}$ et on a : $f_g{}'(1) = 2$ • $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$ et on a : $f_d{}'(1) = \frac{1}{2}$ Comme $f_g{}'(1) \neq f_d{}'(1)$, alors f **n'est pas dérivable en 1..**	$1\ pt$
2-a) Justification correcte	$1\ pt$
b) démonstration correcte	$1\ pt$
EXERCICE 4 **(4 points)**	
1. a) Dressons un arbre pondéré qui présente la situation.  	$0,5\ pt$

b) $P_S(R) = \frac{40}{100} = 0{,}4$

c) $P(S \cap R) = P(S) \times P_S(R) = 0{,}25 \times 0{,}4 = \mathbf{0,1}$

2. Justifions que la probabilité de l'événement R est : $\mathbf{0,25}$

$P(R) = P(S \cap R) + P(\bar{S} \cap R) = P(S) \times P_S(R) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(R)$ **0,5 pt**

$P(R) = 0{,}25 \times 0{,}4 + 0{,}75 \times 0{,}2 = 0{,}1 + 0{,}15 = \mathbf{0,25}$ **0,5 pt**

3. Déterminons la probabilité pour que l'élève choisi soit au premier cycle sachant qu'il utilise rationnellement l'internet.

$P_R(\bar{S}) = \frac{P(\bar{S} \cap R)}{P(R)} = \frac{P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(R)}{P(R)} = \frac{0{,}75 \times 0{,}2}{0{,}25} = \mathbf{0,6}$ **0,5 pt**

4. a) Déterminons la loi de probabilité de X.

- L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ **0,5 pt**
- X suit la loi binomiale de paramètre 5 et $P(R) = \frac{1}{4}$

Donc $P(X = k) = C_5^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$ avec $0 \leq k \leq 5$

$P(X = 0) = C_5^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$

$P(X = 1) = C_5^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{405}{1024}$

$P(X = 2) = C_5^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}$

$P(X = 3) = C_5^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{1024} = \frac{45}{512}$

$P(X = 4) = C_5^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{15}{1024}$

$P(X = 5) = C_5^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{1024}$

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

b) Justifions que l'espérance mathématique de X est $\frac{5}{4}$.

$E(X) = n \times P(R) = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ **0,5 pt**

j) Interprétation correcte de $E(X)$

0,25 pt

c) Calculons la probabilité pour qu'au moins trois élèves sur les cinq choisis utilisent rationnellement l'internet. **0,25 pt**

$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 3)$

$P(X \geq 3) = \frac{90 + 15 + 1}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512} \approx 0{,}104$

0,25 pt

0,25 pt

EXERCICE 5 **(5 points)**

1- Justifie que f est continue en 2.

$f(2) = 3$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 3$ donc f **est continue en 2** - - - - - - - - - - ->

2- a) Étudions la dérivabilité de f en 2.

Dérivabilité de f à gauche en 2

- $f(2) = 3$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (x^2 + 3x + 6) = \mathbf{16}$

  Donc f dérivable à guache en 2 et on a : $\boldsymbol{f_g}'(\mathbf{2}) = \mathbf{16}$

0,5 pt

Dérivabilité de f à droite en 2

- $f(2) = 3$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x^2-4}{(x-2)^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = +\infty$

  Donc f n'est pas dérivable à droite en 2

On en déduit que f n'est pas dérivable en 2

0,75 pt

b) Précisons les tangentes à (C_f) au points d'abscisse 2.

- on a : $\boldsymbol{f_g}'(\mathbf{2}) = \mathbf{16}$, donc (C_f) admet au point d'abscisse 2 à gauche une demi –tangente $(\boldsymbol{T_g})$ d'équation $\boldsymbol{y = 16x - 29}$ - - - - - - - - - - ->
- on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$ donc (C_f) admet au point d'abscisse 2 à droite une demi –tangente verticale - - - - - - - - - - ->

3-1. Étudions le sens de variations de g puis dresse ton tableau de variation

0,25 pt

- g est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et $\forall x \in]-2\,;\,+\infty[$, $\boldsymbol{g'(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
- $\forall x \in]-2\,;\,+\infty[$, $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ donc est g est strictement croissante sur] 2 ; +∞[
- Calculons la limite de f en $+\infty$ et en 2

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} 3 + \sqrt{x^2 - 4} = 3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \sqrt{x^2 - 4} = +\infty \end{cases}$$

0,25 pt

- **Tableau de variation de g**

0,5 pt

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	3	↗	$+\infty$

3-2. Démontrons que g réalise une bijection de $[2\ ;\ +\infty\ [$ sur un intervalle J à préciser .

g est continue et strictement croissante sur $[2\ ;\ +\infty\ [$ telle que $g([2\ ;\ +\infty\ [) = [3\ ;\ +\infty\ [$

Donc g réalise une bijection de $[2\ ;\ +\infty\ [$ sur$[3\ ;\ +\infty\ [= \mathrm{J}$

$\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt}$

3-3. Vérifions que : $\boldsymbol{g(2\sqrt{2}) = 5}$

$$g(2\sqrt{2}) = 3 + \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4} = 3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = \mathbf{5}$$

3-4. Démontrons que $\boldsymbol{g^{-1}}$ est dérivable en 5 puis calculer $\boldsymbol{(g^{-1})'(5\ )}$

- <u>Démontrons que g^{-1} est dérivable en 5</u>

$\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt}$

On a : $g(2\sqrt{2}) = 5$ et $g'(\ 2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\mathbf{2}}$

Comme $g'(\ 2\sqrt{2}) \neq 0$, donc $\boldsymbol{g^{-1}}$ **est dérivable en 5**

$\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}$

- <u>Calculons : $(g^{-1})'(5\ )$</u>

$$(g^{-1})'(5\ ) = \frac{1}{g'(\ 2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

4- a) Calculons les 2 premières dérivées de $\boldsymbol{h}$

- h est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 2\ ]$ et $h'(\ x) = (x^3 + x^2 - 9)' = 3x^2 + 2x$
- h' est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 2\ ]$ et $h''(\ x) = (3x^2 + 2\ )' = 6x + 2$

$\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}$

4- b) Démontrons que $(\boldsymbol{C_h})$ admet un point d'inflexion dont tu préciseras les coordonnées

$\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}$

On a : $h''(\ x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

- $h''(\ x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$ et $h''(\ x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$
- h'' s'annule en $-\frac{1}{3}$ en changeant de signe de plus $h\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{241}{27}$

$\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}$

$\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}$

D'où (C_h)admet le point $A\left(-\frac{1}{3}\ ;-\frac{241}{27}\ \right)$comme point d'inflexion

$\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt}$

<table>
<tr><th>CORRIGE</th><th>EXERCICE 6 :(4 points)</th><th>BAREME</th></tr>
<tr><th>Critères</th><th>Indicateurs</th><th></th></tr>
<tr><td>CM1
Pertinence</td><td>
▪ Pour répondre à la préoccupation du président du conseil scolaire je vais utiliser les notions de probabilités conditionnelle et de variable aléatoire.
Pour cela je vais :
▪ Définir une variable aléatoire X
▪ Déterminer les valeurs prises par X
▪ Déterminer la loi de probabilité de X
▪ Exprimer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de S
▪ Déterminer S pour $E(X) = 2500$</td><td>
$(\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$
1ind /6 → $\mathbf{0,25}\boldsymbol{pt}$
2ind /6 → $\mathbf{0,5}\boldsymbol{pt}$
3ind /6 → $\mathbf{0,75}\boldsymbol{pt}$
A partir de 4ind → $\mathbf{1}\boldsymbol{pt}$</td></tr>
<tr><td>CM2
Utilisation correcte des outils mathématique</td><td>
▪ <u>Définir une variable aléatoire X</u>
Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébriqu du joueur
▪ <u>Déterminer les valeurs prises par X</u>
$\Omega(X) = \{-1200\ ;\ -500\ ;\ 0\ ;\ S-200\ ;\ S+800\ \}$
▪ <u>Déterminons la loi de probabilité de X</u>
<table>
<tr><td>k</td><td>-1200</td><td>-500</td><td>0</td><td>$S-200$</td><td>$S+800$</td></tr>
<tr><td>$P(X=k)$</td><td>$\frac{2}{5}$</td><td>$\frac{1}{100}$</td><td>$\frac{9}{100}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td></tr>
</table>
▪ <u>Exprimons l'espérance mathématique $E(X)$ en</u> fonction de S
$E(X) = \frac{-38\,500 + 50\,S}{100} = \frac{-770\ +\ S}{2}$
▪ Déterminons S pour $E(X) = 2500$
- E(X) = 2500 ⇔ $S = 5770$
- Pour que le gain moyen du joueur soit de 2500F, la valeur de S à mettre dans les enveloppes est 5770 F</td><td>
$(\mathbf{2}\ \boldsymbol{pts})$
1ind /10 → $\mathbf{0,25}\boldsymbol{pt}$
2ind /10 → $\mathbf{0,5}\boldsymbol{pt}$
3ind /10 → $\mathbf{0,75}\boldsymbol{pt}$
4ind /10 → $\mathbf{1}\boldsymbol{pt}$
5ind /10 → $\mathbf{1,25}\boldsymbol{pts}$
6ind /10 → $\mathbf{1,5}\boldsymbol{pts}$
A partir de 7ind → $\mathbf{2}\boldsymbol{pts}$</td></tr>
<tr><td>CM3
Cohérence de la réponse</td><td>
▪ Détermination d'une variable aléatoire X
▪ Détermination les valeurs prises par X
▪ Calcule de loi de probabilité de X
▪ Expression de l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de S
▪ Résolution de l'équation E(X) = 2500</td><td>
$(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$
1ind /5 → $\mathbf{0,25}\boldsymbol{pt}$
A partir de 3ind → $\mathbf{0,5}\boldsymbol{pt}$</td></tr>
<tr><td>CP
Critère de perfection-nement</td><td>
▪ Présence des titres des étapes , pas de rature et de surcharge
▪ Démarche correcte non classique au-delà de la production attendue
▪ Production juste en peu de mots esprit de synthèse)</td><td>
$(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pts})$
1ind /3 → $\mathbf{0,25}\boldsymbol{pt}$
A partir de 3ind → $\mathbf{0,5}\boldsymbol{pt}$</td></tr>
</table>