Cours de renforcement de Mathématiques TleD

EXERCICE 1

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.

a) $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$; b) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$; c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$; d) $f(x) = \frac{e^x+3}{e^x-1}$; e) $f(x) = \ln|e^x - 1|$

2. Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 3x + e^x$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-3}{3e^{2x}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x - e^{-x}$

EXERCICE 2

Soit h la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par : $h(x) = \frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$

1. Justifie que $\forall\, x \in\,]-2\,;+\infty[, h(x) = 3 - \frac{13}{(x+2)^2}$

2. a) Déduis-en une primitive H de h sur $]-2\,;+\infty[$

   b) Déduis-en la primitive G de h sur $]-2\,;+\infty[$ qui s'annule en -4

EXERCICE 3

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ définie par : $g(x) = 4x^2 - \ln x + 1$.

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2.a) Montre que : $\forall\, x \in\,]0;\ +\infty[\,, g'(x) = \frac{8x^2-1}{x}$.

   b) Etudie le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

3. Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

4. Démontre que : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 4x - 2$

Par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 2 cm

1.a) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$, puis interprete graphiquement le résultat obtenu.

   b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2.a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 4x - 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

   b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

3.a) Justifie que : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

   b) En déduis les variations de f, puis dresse son tableau de variation.

4.a) Démontre que l'équation $\forall\, x \in]0;+\infty[, f(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b) Justifie que : $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

5. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point 1.

6. Trace (D) , (T) et (C).