EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Exercice 1 :

Résoudre chacun des cas suivants et donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

1) $3y' + 7y = 0$ avec $y(2) = 5$.
2) $y' + y\ln 2 = 0$ avec $y(1) = 1$.
3) $y' - \pi y = 0$ avec $y(2) = e^{\pi}$.
4) $y'' + y = 0$ avec $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
5) $y'' - 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.
6) $y'' - 4y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 6$ et $y'(0) = 10$.
7) $y'' + y' + y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
8) $25y'' - 20y' + 4y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
9) $9y'' - 18y' + 10y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{3}$ et $y(\pi) = 0$.
10) $9f'' + f = 0$ sachant que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = 3$.

Exercice 2 :

On considère les équations différentielles (E_0) et (E_1) définies par :

$y' + y = 0$ (E_0);

$y' + y = x^2 + x$ (E_1).

1) Résoudre l'équation différentielle (E_0). (On notera ses solutions g)
2) Déterminer a, b et c tels que le polynôme p défini par :
   $p(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E_1).
3) Soit g une solution de (E_0).
   Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = g(x) + p(x)$ est une solution de (E_1).

Exercice 3 :

On considère les équations différentielles (E_0) et (E_1) suivantes :

$y'' + 4y = 0$ (E_0);

$y'' + 4y = 3\cos x$ (E_1).

1) Quelles sont les fonctions g solutions de (E_0) ?
2) Vérifier que la fonction cosinus est solution de (E_1).
3) Soit g une solution de (E_0). Démontrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = g(x) + \cos x$ est solution de (E_1).
4) Parmi les fonctions f définies au 3) déterminer celle qui vérifie : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 4 :

1) Résoudre l'équation différentielle (E) suivante : $9y'' + \pi^2 y = 0$.
2) On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormal, passe par le point $P\left(1; -\sqrt{2}\right)$ et admet en ce point une tangente horizontale.
   a) Préciser $f(1)$ et $f'(1)$.
   b) Déterminer f.
   c) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$.
3) Montrer que f est 6-périodique.
4) Calculer la moyenne quadratique I de f sur $[0; 6]$. (C'est le réel I défini par $I^2 = \frac{1}{6}\int_0^6 [f(x)]^2 dx$)

Exercice 5 :

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 8y = 20\sin 2x - 10\cos 2x$.

1) Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 8y = 0$ (E').
2) Déterminer les coefficients a et b tels que la fonction g définie par :
   $g(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ est solution de (E).
3) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').
4) Donner toutes les solutions de (E).

Exercice 6 :

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$.
   Puis déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
2) Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. A l'aide de deux intégrations par parties, déterminer F.

Exercice 7 :

1) On donne l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0$ (E_1).
   a) Résoudre (E_1).
   b) Déterminer la solution particulière f de (E_1) telle que $f(0) = 4$ et $f(1) = 3e$.
2) On considère maintenant l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 2e^x$ (E_2).
   Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ est solution de (E_2).
3) Calculer $J = \int_1^3 g(t)dt$.

Exercice 8 :

On donne l'équation différentielle $f'' + 2f' + f = 0$ (E). On pose pour tout réel x, $k(x) = e^{-x}h(x)$.

1) Démontrer k est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $h''(x) = 0$.
2) Résoudre l'équation différentielle $h'' = 0$.
3) En déduire la solution générale f de (E).
4) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.
2) Déterminer la solution f qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
3) On pose : $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$.
   a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$; expliciter $F(x)$.
   b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Exercice 10 :

On considère l'équation différentielle $2y' - y = -\frac{x+1}{3}$. (1)

1) Résoudre l'équation $2y' - y = 0$. (2)
2) Déterminer les deux réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (1).
3) Montrer que f est solution de (1) si et seulement $f - g$ est solution de (2).
   En déduire les solutions de (1).
4) Déterminer celle de ces solutions qui vérifie $f(0) = 0$.
   Dans toute la suite f désigne cette fonction.
5) Etudier les variations de f.
   Montrer que f admet un maximum strictement positif que l'on calculera.
6) Montrer que la courbe représentative (C_f) de f dans un repère orthonormal admet une asymptote (D) dont on donnera une équation. Tracer (D) et (C_f).

Exercice 11 :

Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1) a) Quelles sont les solutions de (E) ?

   b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$?

   On dit que (C) et (C') sont tangentes.

2) Représenter dans un repère les courbes (C) et (C') dont vous préciser les positions relatives.

3) λ étant un réel strictement positif, soit h_λ la fonction définie par : $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$.

   a) Montrer que h_λ est solution de (E).

   b) Soit (C_λ) la courbe représentative de h_λ. Après avoir calculé en fonction de λ les coordonnées du point commun à (C_λ) et (C'), montrer que ces courbes sont tangentes en ce point.

   c) Préciser les positions relatives de (C_λ) et (C).

Exercice 12 :

On considère la fonction $f : x \longmapsto (1 + x)e^{-2x}$.

1) Déterminer les réels a et b pour que f soit une solution de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n, la dérivée d'ordre n de f est aussi une solution de (E).

3) Déterminer la primitive de f solution de (E).

Exercice 13 :

Partie A :

1) a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   b) Donner la solution satisfaisant aux conditions suivantes : $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$.

2) On considère la fonction $g(x) = e^x - e^{2x}$.

   a) Etudier les variations de g et construire sa courbe représentative (C_g) dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité 1 cm.

   b) A tout réel β, on associe (P_β) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient : $\begin{cases} \beta \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases}$. Hachurer ce domaine.

   Calculer en cm², l'aire $A(\beta)$ de ce domaine et la limite de cette aire lorsque β tend vers $-\infty$.

Partie B :

On considère la fonction $h(x) = |e^x - e^{2x}|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Déterminer $\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u}$ en justifiant.

2) Etudier la dérivabilité de h à droite puis à gauche en 0.

3) Faire l'étude complète de h et construire sa courbe représentative (C_h) dans un deuxième repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On représentera les demi-tangentes en 0 à (C_h).

Partie C :

On considère la fonction $f(x) = \ln|e^x - e^{2x}|$.

1) a) Préciser le domaine de définition de f.

   b) Démontrer que $f(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x})$ quelque soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   c) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x})$.

   d) En déduire l'existence d'une asymptote oblique (D_1) à (C_f).

   On étudiera éventuellement la position de (C_f) par rapport à (D_1).

2) a) Démontrer que $f(x) - x = \ln(1 - e^x)$ quelque soit $x \in \mathbb{R}_-^*$.

   b) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} \ln(1 - e^x)$ en déduire l'existence d'une asymptote oblique (D_2) à (C_f).

   On étudiera éventuellement la position de (C_f) par rapport à (D_2).

3) Faire l'étude complète de f et construire (C_f) dans un troisième repère $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

4) Montrer que la restriction k de f à $\mathbb{R}_+^*$ admet une bijection réciproque k^{-1} et construire la courbe (C') de k^{-1} dans le repère $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Exercice 14 :

L'objet de l'exercice est de résoudre une équation différentielle et d'étudier une solution particulière de cette équation.

Partie A :

On considère l'équation différentielle : $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$. (E_1) où f désigne une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer, f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1) Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que la fonction f est solution de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la fonction $h = (f - g)$ est solution de l'équation différentielle : $h'' - 3h' + 2h = 0$. (E_2)
3) Résoudre l'équation différentielle (E_2). En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1).
4) Déterminer la solution particulière φ de l'équation (E_1) telle que : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

Partie B :

On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = -4e^{2x} + 8e^x + 4x^2 - 4$.

1) a) Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$; on vérifiera que $\varphi''(x) = -8(2e^x + 1)(e^x - 1)$.
   Etudier les variations de la fonction φ'.
   En déduire le signe de $\varphi'(x)$ et le sens de variation de la fonction φ.
   b) Déterminer la limite de φ en $-\infty$. Déterminer la limite de φ en $+\infty$; on pourra remarquer que : $\varphi(x) = -4e^{2x}\left(1 - \frac{2}{e^x} - \frac{x^2}{e^{2x}}\right) - 4$.
2) Dresser le tableau de variations de la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^2 - 4$.
3) On désigne respectivement par (C_φ) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions φ et g dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
   a) Montrer que pour tout x réel, $\varphi(x) - g(x) = -4e^x(e^x - 2)$.
   En déduire la position relative des courbes (C_φ) et (C_g). Déterminer la limite de $(\varphi - g)$ en $-\infty$.
   b) Tracer les courbes (C_φ) et (C_g) sur un même graphique.
   On prendra 2 cm pour unité de longueur.
4) Calculer l'intégrale $\int_\alpha^{\ln 2}(-4e^{2x} + 8e^x)dx$ où α est un réel strictement inférieur à ln 2.
5) On note D_α la partie du plan limitée par (C_φ), (C_g) et les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ et $x = \ln 2$.
   a) Mettre en évidence la partie D_α sur le graphique.
   b) Déterminer, en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ de D_α exprimée en cm^2.
   c) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

Exercice 15 :

Partie A :

On donne l'équation différentielle suivante : $4y'' + 4y' + y = 0$. Déterminer la solution de l'équation dont la représentation graphique admet à l'origine des coordonnées, une tangente perpendiculaire à la droite (D) d'équation $2x + y - 1 = 0$.

Partie B :

On désigne par f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} \, si \, x \leq 0 \\ f(x) = x(-1 + \ln x)^2 + x \, si \, x > 0 \end{cases}$.

1) a) Rappeler $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ puis démontrer que $\lim_{x \to 0} x(\ln x)^2 = 0$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats trouvés.

2) a) Montrer que $f'(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)e^{-\frac{x}{2}} \, si \, x \leq 0$ et $f'(x) = (\ln x)^2 \, si \, x > 0$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

c) (T_1) et (T_2) sont respectivement les tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisses 1 et e. Tracer (C_f), (T_1) et (T_2) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Démontrer que la restriction h de f à $]0; +\infty[$ admet une réciproque h^{-1}.

b) Dresser le tableau de variations de h^{-1} et représenter h^{-1}.

4) Soit $\alpha \in]0; e[$ et n un entier naturel ; on pose pour tout n : $I_n(\alpha) = \int_\alpha^e x(\ln x)^n dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de n et $I_{n-1}(\alpha)$.

b) Calculer $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

c) On donne $J(\alpha) = \int_\alpha^e h(x)dx$. Calculer $J(\alpha)$ en fonction de α.

Calculer $\lim_{\alpha \to 0^+} J(\alpha)$ puis interpréter le résultat.