# LES NOMBRES COMPLEXES

## Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des points $M$ de l'espace d'affixe $Z$ tels que :

1. $|Z+2+i| = |3Z-9+3i|$.
2. $\left|\frac{\bar{Z}-2+i}{Z+5-2i}\right| = 1$.
3. $|Z+\bar{Z}-1| = 5$.
4. $|Z-\bar{Z}-1+i| = 3$.
5. $|(1-i)Z-2i| = |Z+2+3i|$.
   6)$\arg(3i-Z) \equiv 0[2\pi]$.
6. $\arg\left(\frac{1}{Z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
7. $\arg(Z^2-4) \equiv \arg(Z+2)[2\pi]$.

## Exercice 2 :

A tout nombre complexe $z$ différent de $2i$, on associe complexe $Z$ :

$$Z = \frac{2iz-5}{z-2i}.$$

Déterminer et représenter les ensembles des points $M$ du plan dont l'affixe $Z$ vérifie la condition indiquée :

a) $Z$ est un réel strictement positif.
b) $Z$ est un réel strictement négatif.
c) $Z$ est un nombre imaginaire.
d) $Z$ est un nombre imaginaire pur.
e) $|Z| = 1$;
f) $|Z| = 4$.

## Exercice 3 :

On considère les nombres complexes ci-après :

$$\mathrm{Z}_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } \mathrm{Z}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

1.a) Écrire le produit $Z_1Z_2$ sous forme algébrique.

b) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes $Z_1, Z_2$ et $Z_1Z_2$.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) On pose $Z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Z_1$.

a) Vérifier que :

$$\mathrm{Z}_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}\right).$$

b) En déduire le module et un argument de $Z_3$.

c) Démontrer que $Z_3^{12}$ est un nombre réel strictement négatif.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : $2\ \mathrm{cm}$ ), on considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $Z_1$ et $Z_2$.

a) Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de $Z_1$.

b)Déterminer géométriquement l'ensemble des points $M$ d'affixes $\mathrm{z}$ tels que :

$$\left|z - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \left|z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right|$$

## Exercice 4 :

$\mathbf{1}^{\circ}$) Résoudre dans $\mathbb{C}: z^3 = 1$.

$\mathbf{2}^{\circ}$) a) Développer $(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2})^3$

b) Soit l'équation $E: z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.

En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation $E$.

$3°$) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

## Exercice 6 :

### 1e partie :

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i)$.

Résoudre $\mathrm{P}(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

### 2e partie :

On considère l'équation suivante :

$$(\mathrm{E}): z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0$$

1. Montrer que (E) admet une unique racine réelle $z_1$ et unique racine imaginaire pure $z_2$ que I'on précisera.
2. Achever la résolution de (E).

### 3e partie :

On considère l'équation suivante :
(E): $z^3 + (2+i)z^2 + 2(1+i)z + 2i = 0$.

1. Montrer que (E) admet une unique racine imaginaire pure $z_1$ que l'on précisera.
2. Déterminer les autres racines $z_2$ et $z_3$ de (E).

### 4e partie :

Soit $\mathrm{P}(z) = z^3 + (1-3i)z^2 + (2-3\hat{\imath})z - 6i$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $a$ tel que $ai$ soit une racine de $P$.
2. Montrer qu'il existe deux réels $b$ et $c$ tels que :

$$P(z) = (z-3i)(z^2 + bz + c).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

**5e partie :**

1. Trouver les racines carrées de $-45 - 28i$.

Soit $\mathrm{P}(z) = z^3 - 6z^2 + (24 + 7i)z - 25 - 25i, z$ étant un nombre complexe.

2. a) Préciser le produit $p$ des racines de $\mathrm{P}(z)$.

b) Représenter dans le plan complexe les points d'affixes les racines cubiques de $p$.

3. a) Calculer $\mathrm{P}(i)$ et $\mathrm{P}(2 + i)$.

b) En déduire une factorisation de $\mathrm{P}(z)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.