



LN ET EXPO

Exercice 1 : EQUATIONS ET INEQUATIONS

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- a) $\ln(x^2 - x - 1) = 0$.
- b) $\ln(x + 3) + \ln(x + 5) = \ln 45$
- c) $\ln(|2x - 5| - \ln|3x + 2|) = \ln|x + 1|$
- d) $e^{x^2 - 3x + 2} = 0$;
- e) $e^{3x} + 3e^{2x} - e^x = 3$
- f) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
- g) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$
- h) $\ln(x + 2) \leq \ln(x + 3)$
- i) $\ln(x + 4) + \ln(2 - x) > \ln(3x + 2)$
- j) $3e^x - 7e^{-x} < -20$;
- k) $e^{x^2 - 3} > e^{2x}$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de définition \mathcal{D} de f et calculer les limites de f aux bornes de \mathcal{D} :

1. $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$
2. $f(x) = (1 - x)^2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{3x^2 - 4})$
4. $f(x) = (\sqrt{x} - 2)^2 \ln \left(1 - \frac{e}{x} \right)$
5. $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{x-1}}$
6. $f(x) = \exp \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right)$
7. $f(x) = \frac{\ln(1 - e^x)}{e^x}$

$$8. f(x) = \frac{e^x}{\ln(x^2+1)}$$

$$9. f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$$

$$10. f(x) = \frac{\sin 2x}{1-e^x}$$

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

- 1.a) Étudie le sens de variation de g .
- b) Détermine la limite de g en $+\infty$.
- c) Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout x strictement positif.
- 2) Démontre que pour tout $x \in [2; 3]$, on a : $g(x) < \frac{1}{2}$.

Partie B

- 3.a) Détermine la limite de $x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$ en 0^+ .
- b) Démontre que f est continue en 0 .
- 4) Étudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation graphique du résultat obtenu.
- 5) Étudie le sens de variation de f .
- 6.a) Démontre que la limite en $+\infty$ de $x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$ est égale à 2 .
- b) Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à

la courbe (c) de f au voisinage de $+\infty$.

7) Trace la droite (Δ), la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ dans le repère.

8.a) Démontre que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

b) Trace dans le même repère précédent la courbe (C') de la réciproque.

c) Démontre que le point $A'(1 + \ln 4; 2)$ appartient à (C').

d) Calcule $(f^{-1})'(1 + \ln 4)$.

Partie C

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2; 3]$.

9) Soit h la fonction définie par : $h(x) = f(x) - x$.

a) Démontre que pour tout x élément de I, $h'(x) < 0$.

b) Déduis-en le sens de variation de h.

c) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans I et que l'on note α .

10.a) Démontre que pour tout x de I, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

b) En déduis que pour tout x de I,

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|.$$

11) Démontre que $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$.

Exercice 4 :

On désire étudier la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} \end{cases}$$

Soit u et v deux fonctions définies par :

$$u(x) = e^x - x - 1 \text{ et } v(x) = -x + 1 + \ln x.$$

1.a) Étudie les variations des fonctions u et v .

b) Dédus-en que $\forall \epsilon]0 ; +\infty[e^x \geq x + 1$ et $\ln x \leq x - 1$ puis $e^x - \ln x \geq 2$.

2.a) Démontre que le domaine de définition D de f est $D =]0 ; +\infty[$.

b) Étudie la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

3) Détermine la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.

4) On désigne par g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$$

a) Étudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et justifie que $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$.

