



EXERCICE 1.

On considère la fonction polynôme P à variable complexe définie par :

$$P(z) = z^3 - (6 + 6i)z^2 + iz - 5 - 5i$$

1. Calculer $P(i)$.
2. En déduire que $P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$ où a , b et c sont des nombres complexes que l'on déterminera.
3. Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $z^2 - (6 + 5i)z + 5 - 5i = 0$; en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
4. A , B et C sont des points du plan complexes d'affixes respectives :
 $\alpha = i$; $\beta = 3 + i$; $\gamma = 3 - i$
 - a) Calculer le rapport $\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \gamma}$
 - b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

EXERCICE 2.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations :
 $(E1) : Z^2 + 2Z\sqrt{3} + 4 = 0$ et $(E2) : Z^2 - 2Z\sqrt{3} + 4 = 0$.
2. Pour tout nombre complexe Z , on pose $P(Z) = Z^4 - 4Z^2 + 16$, et on considère dans \mathbb{C} l'équation $(E) : P(Z) = 0$.
 - a. Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a tel que :
 $P(Z) = (Z^2 + aZ + 4)(Z^2 - aZ + 4)$.
 - b. En déduire les solutions de l'équation (E) .
3. Soient A ; B ; C ; D ; E et F les points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; $2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $-2i$; et $\sqrt{3} - i$ dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, i, j) .
 - a. Montrer que ces points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2 .
 - b. Placer ces points dans le plan.

EXERCICE 3.

Dans cet exercice, \mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes et $\text{Re}(z)$ la partie réelle du nombre complexe Z .

On note $p(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i$.

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $W = -2i$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0$.
3. a) Montrer que $p(z) = [z^2 - (3 + 3i)z + 5i][z - (3 + 2i)]$.
b) Déduire dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes les solutions de l'équation
 $(E) : z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i$

On notera z_1 , z_2 et z_3 les trois solutions de (E) telles que :

$$\text{Re}(z_1) < \text{Re}(z_2) < \text{Re}(z_3).$$

4. Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ unité de longueur sur les axes : 2cm .
 - a) Placer les points M , P et Q d'affixes respectives $2 + i$, $1 + 2i$ et $3 + 2i$.
 - b) Montrer que le triangle MPQ est rectangle isocèle de sommet principal M .